1. Contesta a los siguientes apartados utilizando la teoría del Binomio de Newton:

   a) Desarrollar la potencia $\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$ y simplificar en lo posible el resultado. (**1 punto**)

   b) Escribe, simplificado, el término de grado 4 en el desarrollo de $\left(2x + \dfrac{1}{x}\right)^6$. (**0,5 puntos**)

2. Contesta a las siguientes cuestiones relacionadas con los radicales:

   a) Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{\sqrt{8} - \sqrt{32} - 3\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ (**0,6 puntos**)

   b) Simplifica reduciendo a común índice y extrayendo factores: $\dfrac{\sqrt[6]{ab}\sqrt[3]{a^2b^4}\sqrt{b^5}}{\sqrt[4]{a^2b^3}}$ (**0,6 puntos**)

   c) Racionaliza y simplifica el resultado: $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3}$ (**0,8 puntos**)

3. Disponer la siguiente operación en notación científica y, posteriormente, dar el resultado en notación científica con tres cifras significativas (utilícese la calculadora): $\dfrac{0{,}00016\,(25 \cdot 10^3 + 2000)}{0{,}0025}$ (**0,8 puntos**)
   Determinar una cota del error absoluto. (**0,2 puntos**)

4. Hallar, en forma de intervalo, los números reales que verifican la siguiente desigualdad: $|x-4| > 3$. (**0,5 puntos**)

5. Factorizar el siguiente polinomio: $x^5 - 5x^4 - x^3 + 19x^2 - 14x$. (**0,6 puntos**)
   Escribir todas sus raíces. (**0,4 puntos**)

6. Realiza la siguiente operación con fracciones algebraicas y simplifica el resultado: (**1 punto**)

$$\frac{x^2+1}{x} - \frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2}$$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $(x-2)x - \dfrac{x+2}{3} - \dfrac{x^2-4}{2} = (x-2)^2 - 4$ (**1 punto**)

   b) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+4} = 6$ (**1 punto**)

   c) $\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{3+x}{x-1} = 2$ (**1 punto**)

## *Soluciones*

1. a) $\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 = x^4-4x^3\dfrac{1}{\sqrt{x}}+6x^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2-4x\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^3+\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 =$
$= x^4-4x^3\dfrac{\sqrt{x}}{x}+6x^2\dfrac{1}{x}-4x\dfrac{1}{x\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2} = x^4-4x^2\sqrt{x}+6x-\dfrac{4\sqrt{x}}{x}+\dfrac{1}{x^2}$

   b) $\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^6 = (2x)^6+6(2x)^5\dfrac{1}{x}+15(2x)^4\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+20(2x)^3\left(\dfrac{1}{x}\right)^3+15(2x)^2\left(\dfrac{1}{x}\right)^4+6(2x)\left(\dfrac{1}{x}\right)^5+$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)^6 = 64x^6+192x^4+240x^2+160+\dfrac{60}{x^2}+\dfrac{12}{x^4}+\dfrac{1}{x^6}$

   Por tanto el término de grado cuatro es $192x^4$.

2. a) $\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{32}-3\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}-4\sqrt{2}-3\cdot 6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{(2-4-18)\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -20$

   b) $\dfrac{\sqrt[6]{ab}\sqrt[3]{a^2b^4}\sqrt{b^5}}{\sqrt[4]{a^2b^3}} = \dfrac{\sqrt[12]{a^2b^2}\ \sqrt[12]{a^8b^{16}}\ \sqrt[12]{b^{30}}}{\sqrt[12]{a^6b^9}} = \dfrac{\sqrt[12]{a^{10}b^{48}}}{\sqrt[12]{a^6b^9}} = \sqrt[12]{\dfrac{a^{10}b^{48}}{a^6b^9}} = \sqrt[12]{a^4b^{39}} = b^3\ \sqrt[12]{a^4b^3}$

   c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3} = \dfrac{\sqrt{2}\left(2\sqrt{2}-3\right)}{\left(2\sqrt{2}+3\right)\left(2\sqrt{2}-3\right)} = \dfrac{4-3\sqrt{2}}{\left(2\sqrt{2}\right)^2-3^2} = \dfrac{4-3\sqrt{2}}{8-9} = \dfrac{4-3\sqrt{2}}{-1} = 3\sqrt{2}-4$

3. $\dfrac{0{,}00016\,(25\cdot 10^3+2000)}{0{,}0025} = \dfrac{1{,}6\cdot 10^{-4}(2,5\cdot 10^4+2\cdot 10^3)}{2{,}50\cdot 10^{-3}} = 1{,}73\cdot 10^3$

   Con tres cifras significativas, la cota del error absoluto es $0{,}005\cdot 10^3 = 5$. El resultado exacto es $1728 = 1{,}728\cdot 10^3$ que, si se redondea a dos cifras significativas es $1{,}73\cdot 10^3 = 1730$. Obsérvese como no se comete un error mayor que 5 al tomar 1730 como aproximación de 1728.

4. Resolvamos la desigualdad contraria: $|x-4|\leqslant 3 \Leftrightarrow -3\leqslant x-4\leqslant 3 \Leftrightarrow 1\leqslant x\leqslant 7 \Leftrightarrow x\in[1,7]$. Por tanto el intervalo de números que verifican la desigualdad $|x-4|>3$ es $(-\infty,1)\cup(7,+\infty)$.

5. Extraemos $x$ factor común: $x^5-5x^4-x^3+19x^2-14x = x\left(x^4-5x^3-x^2+19x-14\right)$. Aplicando la regla de Ruffini se obtienen dos raíces de $x^4-5x^3-x^2+19x-14$: 1 y $-2$, con lo que $x^5-5x^4-x^3+19x^2-14x = x(x-1)(x+2)\left(x^2-6x+7\right)$.
   Finalmente, para obtener las raíces de $x^2-6x+7$ resolvemos la ecuación $x^2-6x+7=0$:

$$x = \frac{6\pm\sqrt{36-28}}{2} = \frac{6\pm\sqrt{8}}{2} = \frac{6\pm 2\sqrt{2}}{2} = 3\pm\sqrt{2}$$

   De este modo la factorización queda:

$$x^5-5x^4-x^3+19x^2-14x = x(x-1)(x+2)\left(x-\left(3+\sqrt{2}\right)\right)\left(x-\left(3-\sqrt{2}\right)\right) =$$

$$= x(x-1)(x+2)\left(x-3-\sqrt{2}\right)\left(x-3+\sqrt{2}\right)$$

   Las raíces son: $0,\ 1,\ -2,\ 3+\sqrt{2}$ y $3-\sqrt{2}$.

6. $\dfrac{x^2+1}{x}-\dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)^2(x^2+1)}{x(x-1)^2}-\dfrac{x(x^2-2x+1)}{x(x-1)^2}=\dfrac{(x^2-2x+1)(x^2+1)}{x(x-1)^2}-\dfrac{x^3-2x^2+x}{x(x-1)^2}=$
$\dfrac{(x^4-2x^3+2x^2-2x+1)-(x^3-2x^2+x)}{x(x-1)^2}=\dfrac{x^4-3x^3+4x^2-3x+1}{x(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)^2(x^2-x+1)}{x(x-1)^2}=$
$\dfrac{x^2-x+1}{x}$

Hay una forma más sencilla de hacerlo si tenemos en cuenta que $x^2-2x+1=(x-1)^2$. Entonces:

$$\frac{x^2+1}{x}-\frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2}=\frac{x^2+1}{x}-\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2+1}{x}-1=\frac{x^2+1}{x}-\frac{x}{x}=\frac{x^2-x+1}{x}$$

7. a) $(x-2)x-\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{x^2-4}{2}=(x-2)^2-4 \Leftrightarrow 6x(x-2)-2(x+2)-3(x^2-4)=6(x^2-4x+4)-24 \Leftrightarrow$
$6x^2-12x-2x-4-3x^2+12=6x^2-24x+24-24 \Leftrightarrow 3x^2-14x+8=6x^2-24x \Leftrightarrow$
$3x^2-10x-8=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{10\pm\sqrt{100+96}}{6}=\dfrac{10\pm 14}{6}=\begin{cases} x_1=\frac{24}{6}=4 \\ x_2=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}\end{cases}$

b) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+4}=6 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=6-\sqrt{x+4}=6 \Leftrightarrow 2x-1=36-12\sqrt{x+4}+x+4 \Leftrightarrow$
$12\sqrt{x+4}=41-x \Leftrightarrow 144(x+4)=1681-82x+x^2 \Leftrightarrow x^2-226x+1105=0$

El discriminante es $\Delta=(-226)^2-4\cdot 1\cdot 1105=51076-4420=46656$.

Entonces: $x=\dfrac{226\pm 216}{2}=\begin{cases} x_1=221 \\ x_2=5\end{cases}$

La solución $x_1=221$ no es válida pues $\sqrt{2\cdot 221-1}+\sqrt{221+4}=\sqrt{441}+\sqrt{225}=21+15=$
$36\neq 6$.

c) $\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{3+x}{x-1}=2 \Leftrightarrow (x-1)^2-(3+x)(x+1)=2(x+1)(x-1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2-2x+1-(3x+3+x^2+x)=2x^2-2 \Leftrightarrow -6x-2=2x^2-2 \Leftrightarrow 2x^2+6x=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x(x+3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-3\end{cases}$