1. Expresa en todas sus formas el número complejo que tiene módulo 4 y argumento 120º. (1 punto)

2. a) Halla las soluciones complejas de la ecuación: $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$. Comprueba el resultado para una de ellas. (1 punto)

b) Calcula $\dfrac{2-4i}{1+3i}$ (0,5 puntos)

c) Halla $\sqrt[4]{-16i}$. Representa gráficamente las soluciones. (1,5 puntos)

3. Dados los vectores $\vec{v} = (4, -2)$ y $\vec{u} = (-1, -2)$, halla:

a) El ángulo que forman. (0,5 puntos)

b) Un vector perpendicular a $\vec{v}$ cuyo módulo sea 1. (0,5 puntos)

c) Halla y representa gráficamente $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-2\vec{v}$. (0,5 puntos)

4. Dados los puntos *A*(–1, –2), *B*(3, 4) y *C*(6, 1), halla:

a) La ecuación de la recta que pasa por *A* y *B*. (0,6 puntos)

b) La paralela a la recta *A*–*B* que pasa por el punto *C*. (0,6 puntos)

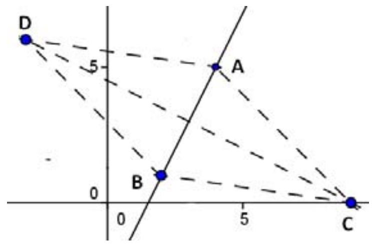
c) La perpendicular a la recta *A*–*B* desde el mismo punto *C*. (0,6 puntos)

d) La distancia del punto *C* a la recta *A*–*B*. (0,6 puntos)

e) La superficie del triángulo *ABC*. (0,6 puntos)

f) Haz un dibujo explicativo de todo el ejercicio. (0,6 puntos)

5. Los puntos *A*(4, 5) y *B*(2, 1) son vértices opuestos de un rombo. El vértice *C* está situado sobre el eje de abscisas. Halla el vértice *D*. (1,5 puntos)

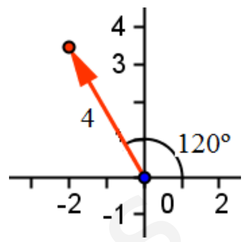


SOLUCIONES

1. Expresa en todas sus formas el número complejo que tiene módulo 4 y argumento 120º. (1 punto)

<u>Solución</u>:

Forma polar: $z = 4_{120^\circ}$



Forma trigonométrica: $z = 4(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$

Forma binómica:

$$z = 4(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = 4\left(-\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2\sqrt{3}\cdot i$$

2. a) Halla las soluciones complejas de la ecuación: $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$. Comprueba el resultado para una de ellas. (1 punto)

b) Calcula $\dfrac{2-4i}{1+3i}$ (0,5 puntos)

c) Halla $\sqrt[4]{-16i}$. Representa gráficamente las soluciones. (1,5 puntos)

<u>Solución</u>:

a) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4\cdot 1\cdot 9}}{2} = \dfrac{-10 \pm \sqrt{64}}{2} = \dfrac{-10 \pm 8}{2} = \begin{cases} -1 \\ -9 \end{cases}$.

Si $x^2 = -1 \Rightarrow x = \sqrt{-1} = \pm i$.

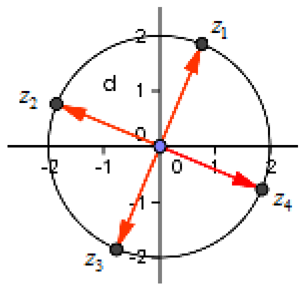
Si $x^2 = -9 \Rightarrow x = \sqrt{-9} = \pm 3i$.

Voy a comprobar el resultado para $x = -3i \rightarrow$

En efecto $(-3i)^4 + 10\cdot(-3i)^2 + 9 = 81i^4 + 10\cdot 9i^2 + 9 = 81 - 90 + 9 = 0$

b) $\dfrac{2-4i}{1+3i} = \dfrac{(2-4i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \dfrac{2-6i-4i-12}{1^2-(3i)^2} = \dfrac{-10-10i}{10} = -1-i$.

c) $\sqrt[4]{-16i} = \sqrt[4]{16_{270^\circ + k\cdot 360^\circ}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)_{\frac{270^\circ + k\cdot 360^\circ}{4}} = 2_{67{,}5^\circ + 90\cdot k}$.



Dando valores a k se obtienen las cuatro raíces:

$$z_1 = 2_{67{,}5^\circ};\ z_2 = 2_{157{,}5^\circ};\ z_3 = 2_{247{,}5^\circ};\ z_4 = 2_{337{,}5^\circ}$$

3. Dados los vectores $\vec{v} = (4, -2)$ y $\vec{u} = (-1, -2)$, halla:

a) El ángulo que forman. (0,5 puntos)

b) Un vector perpendicular a $\vec{v}$ cuyo módulo sea 1. (0,5 puntos)

c) Halla y representa gráficamente $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - 2\vec{v}$. (0,5 puntos)

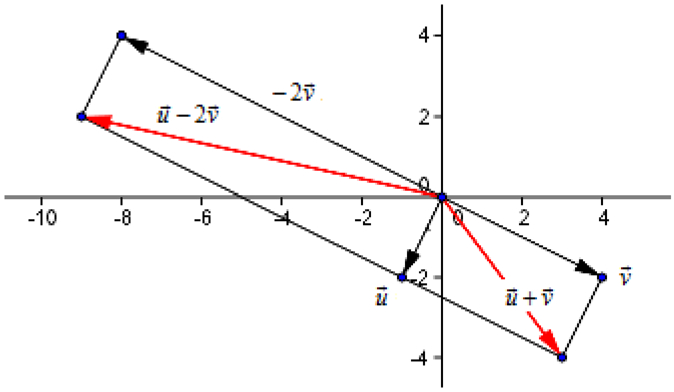
<u>Solución</u>:

a) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|} = \dfrac{(4,-2)\cdot(-1,-2)}{\sqrt{16+4}\cdot\sqrt{1+4}} = \dfrac{-4+4}{10} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$.

b) El vector $\vec{u} = (-1, -2)$ es perpendicular a $\vec{v}$; el unitario en la dirección de $\vec{u}$ es

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{1+4}}(-1,-2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

c) $\vec{u}+\vec{v}$ = (–1, –2) + (4, –2) = (3, –4).
$\vec{u}-2\vec{v}$ = (–1, –2) – 2 · (4, –2) = (–1, –2) – (8, –4) = (–9, 2).

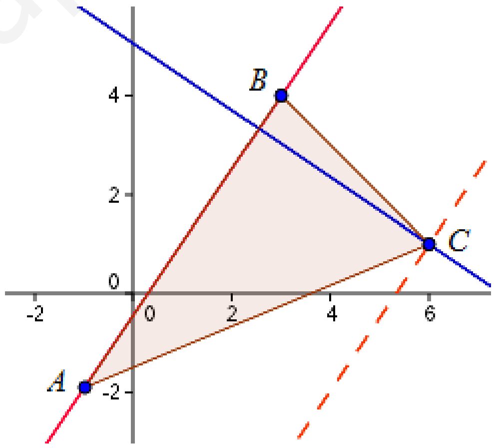


4. Dados los puntos *A*(–1, –2), *B*(3, 4) y *C*(6, 1), halla:
a) La ecuación de la recta que pasa por *A* y *B*. (0,6 puntos)
b) La paralela a la recta *A–B* que pasa por el punto *C*. (0,6 puntos)
c) La perpendicular a la recta *A–B* desde el mismo punto *C*. (0,6 puntos)
d) La distancia del punto *C* a la recta *A–B*. (0,6 puntos)
e) La superficie del triángulo *ABC*. (0,6 puntos)
f) Haz un dibujo explicativo de todo el ejercicio. (0,6 puntos)

Solución:

a) Recta que pasa por *A* y *B*:

$$\frac{x+1}{3+1}=\frac{y+2}{4+2}\Rightarrow 3x-2y-1=0\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$$



b) Paralela a *A–B* por *C*:

$$y-1=\frac{3}{2}(x-6)\Rightarrow y=\frac{3}{2}x-8$$

También: $3\cdot(x-6)-2\cdot(y-1)=0\Rightarrow 3x-2y-16=0$

c) Perpendicular a *A–B* por *C*:

$$y-1=-\frac{2}{3}(x-6)\Rightarrow y=-\frac{2}{3}x+5$$

También: $2\cdot(x-6)+3\cdot(y-1)=0\Rightarrow 2x+3y-15=0$

d) $d\left(C(6,1), r: 3x-2y-1=0\right)=\dfrac{3\cdot 6-2\cdot 1-1}{\sqrt{9+4}}=\dfrac{15}{\sqrt{13}}$.

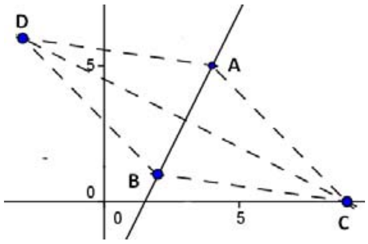
e) La superficie del triángulo *ABC* = $\dfrac{(base)\cdot(altura)}{2}$.

La base puede ser la medida del lado *AB* = $d(A,B)=\sqrt{(3+1)^2+(4+2)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$.

La altura es la distancia del punto *C* a la recta *A–B*, que es $\dfrac{15}{\sqrt{13}}$.

Por tanto: $S_{ABC}=\dfrac{2\sqrt{13}\cdot\dfrac{15}{\sqrt{13}}}{2}=15\ \text{u}^2$.

5. Los puntos *A*(4, 5) y *B*(2, 1) son vértices opuestos de un rombo. El vértice *C* está situado sobre el eje de abscisas. Halla el vértice *D*. (1,5 puntos)



<u>Solución</u>:

Para resolver este problema debe saberse que las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí. Además, como en todo paralelogramo, se cortan en su punto medio.

Dada la simetría del rombo, al vértice *D* puede llegarse sumando al vector **OB** el vector **CA**, pues **BD** y **CA** son equipolentes..

El punto *C* es el de corte de la mediatriz del segmento *AB* con el eje *OX*.

Mediatriz de *AB*:

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} \Rightarrow 4x+8y-36=0 \Rightarrow x-2y-9=0$$

Corte con eje *OX* → y = 0 ⇒ x = 9 → *C* = (9, 0).

Vector **CA** = (4, 5) – (9, 0) = (–5, 5).

Luego **OD** = **OB** + **CA** = (2, 1) + (–5, 5) = (–3, 6).

El punto *D* = (–3, 6).