

## Ecuaciones

1. Resuelve las siguientes ecuaciones y di en qué campo numérico tienen solución: a)  $x^2 + 4 = 0$ ; b)  $x^2 - 9 = 0$ ; c)  $x^2 + 1 = 0$ .

Sol: a)  $2i$ ; b)  $3$ ; c)  $i$

2. Resuelve las ecuaciones: a)  $x^2 - 2x + 5 = 0$ ; b)  $x^2 - 6x + 13 = 0$ ; c)  $x^2 - 4x + 5 = 0$ .

Sol: a)  $1 + 2i$ ; b)  $3 + 2i$ ; c)  $2 + i$

3. Encuentra los puntos de intersección de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 2$  y la recta  $y = x$ . ¿Son soluciones reales o imaginarias? Sol: reales:  $(1, 1)$ ,  $(-1, -1)$

4. Encuentra los puntos de intersección de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  y la recta  $y = x - 3$ . ¿Son soluciones reales o imaginarias?

Sol: imaginarias  $x = 3/2 + (\sqrt{5}/2)i$

5. ¿A qué campo numérico pertenecen las soluciones de estas ecuaciones? a)  $x^2 - 3x + 2 = 0$ ; b)  $x^2 - 2x + 2 = 0$ ; c)  $2x^2 - 7x + 3 = 0$ ; d)  $(x^2/2) + 8 = 0$ .

Sol: a) Real,  $x = 2$ ,  $x = 1$ ; b) Imaginaria  $x = 1 + i$ ; c) Real,  $x = 1/2$ ,  $x = 3$ ; d) Imaginaria,  $x = 4i$

6. Calcula los puntos de intersección de la elipse  $(x^2/4) + (y^2/9) = 1$  con la recta  $x = 5$ .

Sol:  $9/4 + i$

7. Resuelve las ecuaciones siguientes indicando el campo numérico al que pertenecen las soluciones: a)  $x^2 - 4 = 0$ ; b)  $x^2 - 5 = 0$ ; c)  $x^2 + 1 = 0$ .

Sol: a)  $2$ ; b)  $\sqrt{5}$ ; c)  $i$

8. Resuelve las ecuaciones: a)  $x^2 - 10x + 29 = 0$ ; b)  $x^2 - 6x + 10 = 0$ ; c)  $x^2 - 4x + 13 = 0$ .

Sol: a)  $5 + 2i$ ; b)  $3 + i$ ; c)  $2 + 3i$

9. Representa gráficamente las raíces de las ecuaciones: a)  $x^2 + 4 = 0$ ; b)  $x^2 + 1 = 0$ ; c)  $x^2 - 9 = 0$ ; d)  $x^2 + 9 = 0$ . Sol: a)  $2i$ ; b)  $i$ ; c)  $3$ ; d)  $3i$

10. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean  $2 + 2i$  y  $2 - 2i$ . (Recuerda:  $x_1 + x_2 = (-b/a)$ ;  $x_1 \cdot x_2 = (c/a)$ ). Sol:  $x^2 - 4x + 8 = 0$

11. Resuelve la ecuación  $x^3 + 27 = 0$ . Representa gráficamente todas sus soluciones. Sol:  $x = 3^{180^\circ}$ ,  $x = 3^{300^\circ}$ ,  $x = 3^{60^\circ}$

12. Resuelve la ecuación de segundo grado  $x^2 - 2x + 17 = 0$ . Tiene dos raíces complejas. ¿Cómo son entre sí? ¿Se puede generalizar el resultado?

Sol: a)  $1 + 4i$ ; b) conjugadas; c) sí

13. Resuelve las ecuaciones: a)  $x^3 - 8 = 0$ ; b)  $x^5 - 32 = 0$ ; c)  $x^4 - 81 = 0$ ; d)  $x^3 - 1 = 0$ .

Sol: a)  $x = 2^{120k}$ ; b)  $x = 2^{72k}$ ; c)  $x = 3$ ;  $x = 3i$ ; d)  $x = 1$ ,  $x = 1^{120}$ ,  $x = 1^{240}$

14. Resuelve la ecuación  $x^2 - 4x + 5 = 0$  y comprueba que, en efecto, las raíces obtenidas verifican dicha ecuación. Sol: a)  $2 + i$

15. Resuelve las ecuaciones  $x^6 + 64 = 0$  y  $x^4 + 81 = 0$ . Sol: a)  $x = 2^{90+60k}$ ; b)  $x = 3^{45+90k}$

16. Escribe una ecuación de raíces  $1 + 3i$ ,  $1 - 3i$ . Sol:  $x^2 - 2x + 10 = 0$

17. Probar que  $3 + i$  y  $3 - i$  son raíces de la ecuación  $x^2 - 6x + 10$ . Sol:  $[x - (3 + i)][x - (3 - i)] = x^2 - 6x + 10$

18. Resolver la ecuación: a)  $x^4 + 1 = -35$ . Sol:  $x = \sqrt{3} + \sqrt{3}i$ ;  $x = -\sqrt{3} + \sqrt{3}i$

## Potencias, raíces. Mixtos

1. Calcula las potencias: a)  $(2-3i)^3$ ; b)  $(3+i)^2$ ; c)  $i^{23}$ ; d)  $(2+2i)^4$ .

Sol: a)  $-46-9i$ ; b)  $8+6i$ ; c)  $-i$ ; d)  $-64$

2. Calcula: a)  $i^{27}$ ; b)  $i^{48}$ ; c)  $i^7$ ; d)  $i^{12}$ ; e)  $i^{33}$ ; f)  $i^{35}$ .

Sol: a)  $-i$ ; b)  $1$ ; c)  $-i$ ; d)  $1$ ; e)  $i$ ; f)  $-i$

3. Sabemos que  $z=3-2i$ , que  $z=4-3i$  y que  $z=-3i$ . Calcular: a)  $z^1+2z^2-z^3$ ; b)  $z^1(z^2+z^3)$ ; c)  $z^2$ ; d)  $2z^1-z^2+z^3$ .

Sol: a)  $11-5i$ ; b)  $-26i$ ; c)  $7-24i$ ; d)  $2-4i$

4. Calcula: a)  $(1+2i)^3$ ; b)  $(-3-i)^4$ ; c)  $(1-3i)^2$ . Sol: a)  $-11-2i$ ; b)  $28+96i$ ; c)  $-8-6i$

5. Calcula: a)  $i^{210}$ ; b)  $i^{312}$ ; c)  $i^{326}$ ; d)  $i^{1121}$ . Sol: a)  $-1$ ; b)  $1$ ; c)  $-1$ ; d)  $i$

6. Calcula a)  $(1+i)^3$ ; b)  $(1-i)^3$ ; c)  $(-1+i)^3$ ; d)  $(-1-i)^3$ . Sol: a)  $-2+2i$ ; b)  $-2-2i$ ; c)  $2+2i$ ; d)  $2-2i$

7. Calcula: a)  $1/i^3$ ; b)  $1/i^4$ ; c)  $i^{-1}$ ; d)  $i^{-2}$ . Sol: a)  $i$ ; b)  $1$ ; c)  $-i$ ; d)  $-1$

8. Dados los complejos:  $z_1=345^\circ$ ;  $z_2=230^\circ$  y  $z_3=-2i$ . Calcula: a)  $z_1 z_2 z_3$ ; b)  $z_1 / (z_2)^2$ ; c)  $(z_1)^2 / [z_2(z_3)^3]$ . Sol: a)  $6315^\circ$ ; b)  $(3/4)^{-15^\circ}$ ; c)  $(9/16)^{330^\circ}$

9. Calcula, expresando el resultado en forma polar: a)  $(1+i)^6$ ; b)  $[(-1/2) + (\sqrt{2}/2)i]^8$ ; c)  $(1-i)^4$ . Sol: a)  $8^{270^\circ}$ ; b)  $1^{240^\circ}$ ; c)  $4^{180^\circ}$

10. Calcula las potencias: a)  $[2(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)]^4$ ; b)  $(\sqrt{2}^{30^\circ})^6$ ; c)  $[\sqrt[4]{3}(\cos 10^\circ + i \operatorname{sen} 10^\circ)]^8$ .

Sol: a)  $16^{180^\circ}$ ; b)  $8^{180^\circ} = -8$ ; c)  $9^{80^\circ}$

11. Calcula las raíces quintas de la unidad. Hazlo expresando 1 como complejo en forma polar.

Sol:  $1^{0^\circ}$ ;  $1^{72^\circ}$ ;  $1^{144^\circ}$ ;  $1^{216^\circ}$ ;  $1^{288^\circ}$

12. Calcula: a)  $\sqrt{-i}$ ; b)  $\sqrt[3]{1+i}$ ; c)  $\sqrt{-16}$

Sol: a)  $1^{135^\circ}$ ;  $1^{315^\circ}$ ; b)  $\sqrt[3]{2}^{15^\circ}$ ,  $\sqrt[3]{2}^{135^\circ}$ ,  $\sqrt[3]{2}^{255^\circ}$ ; c)  $4^{90}$ ,  $4^{270}$

13. Calcula  $\sqrt[3]{\frac{1-i}{1-\sqrt{3}i}}$ . Sol:  $1/\sqrt[6]{2}^{5+120k}$

14. Calcula las raíces siguientes y representa gráficamente las soluciones: a)  $\sqrt{-4}$ ; b)  $\sqrt[3]{-27}$ ; c)  $\sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i}}$ ; d)  $\sqrt[3]{\frac{-27}{i}}$

Sol: a)  $2^{90^\circ}$ ,  $2^{270^\circ}$ ; b)  $3^{60}$ ,  $3^{180}$ ,  $3^{300}$ ; c)  $1^{30}$ ,  $1^{150}$ ,  $1^{270}$ ; d)  $3^{30}$ ,  $3^{150}$ ,  $3^{270}$

15. Calcula las raíces: a)  $\sqrt{4(\cos 60'' + i \operatorname{sen} 60'')}$ ; b)  $\sqrt[3]{27(\cos 180'' + i \operatorname{sen} 180'')}$ ; c)  $\sqrt[4]{81(\cos 120'' + i \operatorname{sen} 120'')}$ ; d)  $\sqrt[6]{i}$ . Sol: a)  $2^{30}$ ,  $2^{210}$ ; b)  $3^{60}$ ,  $3^{180}$ ,  $3^{300}$ ; c)  $3^{40+90k}$ ; d)  $1^{15+60k}$

16. ¿De qué número es  $(2+3i)$  raíz cúbica?. Sol:  $-46+9i$

17. a) Opera la expresión  $(1+3i)^2(3-4i)$  y b) calcula las raíces cúbicas del resultado. Sol: a)  $50i$ ; b)  $\sqrt[3]{50}^{30+120k}$

18. Calcula el valor de  $(i^4 - i^3)/8i$  y encuentra sus raíces cúbicas. Sol:  $(1/2)^{105+120k}$

19. Calcula: a)  $(1+i)^8$ ; b)  $(-1+i)^6$ ; c)  $(1+\sqrt{3}i)^2$ ; d)  $(-2-2i)^4$ .

Sol: a)  $16^0$ ; b)  $8^0$ ; c)  $10^{120}$ ; d)  $64^{180}$

20. Calcula  $(i^4 + i^5)/\sqrt{2}i$ . Escribe el resultado en forma polar. Sol:  $1^{315}$

21. a) Calcula  $(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)^8$ ; b) Si una raíz cúbica de un número es  $2i$ , calcula las otras dos raíces y ese número. Sol: a)  $1^0$ ; b)  $2^{210}, 2^{330}; -8i = 8^{270}$

22. Hallar las raíces cúbicas de los complejos: a)  $2+2i$ ; b)  $1+\sqrt{3}$ ; c)  $-2+2\sqrt{3}i$ .

Sol: a)  $\sqrt{2}^{15^\circ}, \sqrt{2}^{135^\circ}, \sqrt{2}^{255^\circ}$ ; b)  $\sqrt[6]{2}^{20+120k}$ ; c)  $\sqrt[3]{2}^{40+120k}$

23. Calcula:  $z = \sqrt[3]{\frac{8}{2-2i}}$  Sol:  $\sqrt{2}^{15+120k}$

24. Hallar las raíces cúbicas de a)  $-1$  y b)  $-i$ .

Sol: a)  $1^0, 1^{180}, 1^{300}$ ; b)  $1^0, 1^{120}, 1^{330}$

25. Calcular la siguiente operación expresando las tres raíces en forma polar:

$$\sqrt[3]{\frac{3+3i}{-3+3i}}$$

Sol:  $1^0; 1^{120}; 1^{330}$

26. Calcular: a)  $i^{14}, i^{18}, i^{33}$ . b) Si  $z^1 = 2-2i; z^2 = 1+3i; y z^3 = 2i$ . Hallar:  $2z^1 - z^2 + 2z^3; z^1 \cdot (z^2 - z^3); (z^1)^2$ . c) Hallar:  $(1+2i)^3$ . d) Hallar  $x$  para que se verifique que  $(x-i)/(2+i)$

$= 1-i$ .

Sol: a)  $-1, -1, i$ ; b)  $3-3i, 4, -8i$ ; c)  $-11-2i$ ; d)  $x=3$

27. Calcular  $\sqrt[3]{-27i}$ . Sol:  $3^0, 3^{210}, 3^{330}$

28. Calcula las siguientes potencias: a)  $[2(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)]^4$ . b)  $(\sqrt{3}^{30^\circ})^8$ .

Sol: a)  $16^{100^\circ}$ ; b)  $81^{240^\circ}$

29. Hallar el módulo de:  $5 \cdot (i^2 + i^{-3})/(i^2 - 3i)$ . Sol:  $z = -1-2i; |z| = \sqrt{5}$

30. Calcular  $(-2+2i)^{64}$  Sol:  $8^{32 \cdot 8640} = 8^{32}$

31. Calcula el valor de  $(i^3 - i^{-3})/(2i)$  y halla sus raíces cúbicas.

Sol: a)  $-1$ ; b)  $1^0, 1^{180}, 1^{300}$

32. a) Calcula el valor de la fracción  $(z^3 + z)/(z^2 + 2)$  para  $z = 1+i$ ; b) Dar el valor de la misma fracción para  $z' = 1-i$ .

Sol: a)  $1/2+i$ ; b)  $1/2-i$

33. Calcula sin desarrollar los binomios y expresa el resultado en forma binómica: a)  $(1+i)^4$ , b)  $(1+\sqrt{3}i)^6$ .

Sol: a)  $4^{180} = -4$ ; b)  $64^0 = 64$

34. Hallar el conjugado del opuesto de a)  $(1-2i)^3$ ; b)  $25/(3+4i)$ ; c)  $((2+i)/(1-2i))^2$ .

Sol: a)  $11+2i$ ; b)  $-3-4i$ ; c)  $1$

35. Calcular el valor de  $(z^2 + z - 1)/(z^2 - 2z)$  para  $z = 1+i$ .

Sol:  $-3/2i$

36. Hallar: a)  $(1+i)^{20}$ , b)  $(2\sqrt{3}-2i)^{30}$ , c)  $(-\sqrt{3}-i)^{12}$  y expresar el resultado en forma polar y binómica. Sol: a)  $2^{10}_{180} = -2^{10}$ ; b)  $4^{30}_{180} = -4^{30}$ ; c)  $2^{12}_{0} = 4096$

37. Hallar  $z = (\cos 20 + i \sin 20)^{10}$ ,  $w = (\cos 50 - i \sin 50)^{30}$  y expresar el resultado en forma binómica. Hallar  $z^{-1}$  y el conjugado de  $w$ . Sol:  $z = (\cos 200 + i \sin 200)$ ;  $w = (\cos 300 + i \sin 300) = 1/2 - \sqrt{3}/2 i$ ;  $z^{-1} = 1/160$ ;  $w' = 1/2 + \sqrt{3}/2 i$

38. Hallar el módulo y el argumento de  $\left( \frac{2+2i}{2-2i} \right)^4$  Sol:  $1^{360} = 1$

39. Hallar las raíces quintas de: a) 1, b) -1, c)  $1/32$ , d)  $243i$ , e)  $-32i$ , f)  $\sqrt{3} + i$ .

Sol: a)  $10+72k$ ; b)  $136+72k$ ; c)  $(1/2)_{0+72k}$ ; d)  $318+72k$ ; e)  $236+72k$ ; f)  $\sqrt[5]{2}_{6+72k}$

40. Hallar la raíz cuadrada de los complejos: a)  $5+12i$  y b)  $1/(3+4i)$ . Sol: a)  $3+2i$ ;  $-3-2i$ ; b)  $2/5-1/5i$ ;  $-2/5+1/5i$

41. Calcular y representar los afijos de las raíces cúbicas de  $\frac{2i^9+i^{-7}}{3i}$ . Expresar el resultado en forma binómica. Sol:  $1, -1/2 + \sqrt{3}/2 i, -1/2 - \sqrt{3}/2 i$

### Incógnitas reales o complejas

1. ¿Cuánto debe valer  $x$  para que el número  $(1+xi)^2$  sea imaginario puro?

Sol:  $x = 1$

2. Calcula los números  $x$  e  $y$  para que se verifique la igualdad:  $(3+xi) + (y+3i) = 5+2i$ . Sol:  $x = -1$ ;  $y = 2$

3. Determina el valor de  $x$  para que se verifique la igualdad:  $(x-i)/(1-i) = (2+i)$ . Sol:  $x = 3$

4. Calcula los números reales  $x$  e  $y$  para que se verifique  $(-4+xi)/(2-3i) = (y-2i)$ . Sol:  $x = -7$ ;  $y = 1$

5. Determina  $x$  para que el producto  $(3+2i)(6+xi)$  sea: a) un número real; b) un número imaginario puro. Sol: a)  $x = -4$ ; b)  $x = 9$

6. Determinar los números reales  $x$  e  $y$  para que se cumpla:  $\frac{x+2i}{1-i} + yi = 1$ . Sol:  $x = 4$ ;  $y = 3$

7. Calcular  $a$  para que el complejo  $z = (4+ai)/(1-i)$  sea: a) Imaginario puro. b) Real. Sol: a)  $a = 4$ ; b)  $a = -4$

8. Hallar el módulo y el argumento del número complejo:  $z = (x+i)/(x-i)$ ,  $x$  perteneciente a  $\mathbb{R}$ . Sol:  $|z| = 1$ ;  $\arg z = 2\alpha$

9. Determinar  $x$  para que el módulo del complejo  $z = (x+i)/(1+i)$  sea  $\sqrt{5}$ . Sol:  $x = 3$

10. Resolver:  $(4+xi)/(2+i) = y+2i$ . Sol:  $x = 7$ ,  $y = 3$

11. Hallar el valor de  $x$  para que la operación  $(2-xi)/(1-3i)$  tenga sólo parte real, sólo parte imaginaria y para que su representación esté en la bisectriz del primer y tercer cuadrante, es decir, la parte real e imaginaria sean iguales.

Sol:  $x=6$ ,  $x=-2/3$ ,  $x=1$

12. Hallar  $x$  para que el número  $(3-xi)/(2+i)$  esté representado en la bisectriz del primer y tercer cuadrante. Sol:  $x=-1$

13. Hallar  $x$  e  $y$  para que se cumpla: a)  $(x-i) \cdot (y+2i) = 4x+i$ ; b)  $(-4+xi)/(2+2i) = y+3i$ .

Sol: a)  $x=2$ ,  $y=3$ ; b)  $x=8$ ,  $y=1$

14. Hallar  $x$ , para que la expresión:  $z = (4+xi)/(2+i)$  sea: a) real, b) imaginario puro. Sol: a)  $x=2$ ; b)  $x=-8$

15. Hallar  $k$ , para que  $|z-2| = 3$ , siendo  $z=k+3i$ . Sol:  $k=2$

16. Determina el valor real de  $x$  de modo que el afijo del producto de los números complejos  $3+xi$  y  $4+2i$  sea un punto de la bisectriz del primer cuadrante. Sol:  $x=1$

17. Resolver el siguiente sistema: 
$$\begin{cases} (2+i)x + 2y = 1+7i \\ (1-i)x + iy = 0 \end{cases}$$

Sol:  $x=1+i$ ;  $y=2i$

18. Resuelve las ecuaciones siguientes en el campo complejo. En todos los casos  $z$  es un número complejo; despéjalo y calcula su valor:

a)  $(2-2i)z = 10-2i$ ; b)  $\frac{z}{3+i} = 2-i$ ; c)  $\frac{z}{3+4i} + \frac{2z+5i}{1-2i} = 2+2i$ ;

d)  $\frac{z}{-z} + \frac{2z-2i}{1-i} = 3-2i$

Sol: a)  $3+2i$ ; b)  $7-i$ ; c)  $4-3i$ ; d)  $1-2i$

19. Despeja  $z$  y calcula su valor en las ecuaciones siguientes: a)  $[z/(1+i)] + (2-3i) = (4-4i)$ ; b)  $(3+i)/z = (1+2i)$ ; c)  $(2+2i)z = (10+2i)$ .

Sol: a)  $3+i$ ; b)  $1-i$ ; c)  $3-2i$

20. Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes, en los que  $\hat{a}$  y  $\hat{a}$  son números complejos:

a) 
$$\begin{cases} \hat{a} + (2+i)\hat{b} = -3+7i \\ (2-i)\hat{a} + (2+i)\hat{b} = 5+3i \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} \hat{a}(1+2i) + (1+i)\hat{b} = 5+5i \\ (2+i)\hat{a} + i\hat{b} = 2+2i \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} (1+i)\hat{a} + (2+i)\hat{b} = 9+2i \\ 2\hat{a} - i\hat{b} = 5-4i \end{cases}$$

Sol: a)  $\hat{a}=3+i$ ;  $\hat{b}=2i$ ; b)  $\hat{a}=1-i$ ;  $\hat{b}=3+i$ ; c)  $\hat{a}=3-i$ ;  $\hat{b}=2-i$

21. Resuelve gráficamente el sistema: 
$$\begin{cases} |z-(2+i)| = 2 \\ |z-(3+i)| = 3 \end{cases}$$

22. Sea  $a=3-2i$  un número complejo dado y  $z$  un número complejo cuyo afijo permanece sobre la recta  $r: x+y-2=0$ . Hallar el lugar geométrico de los afijos del complejo  $a+z$ . Sol:  $x+y-3=0$

23. Hallar el lugar geométrico de la imagen del complejo  $z$ , sabiendo que  $2|z| = |z-i|$ . Sol:  $a^2 + b^2 + (2/3)b - (1/3) = 0$  (circunferencia)

24. Calcular  $z$  en las ecuaciones siguientes:

a)  $\frac{z}{1-2i} + 1-i = 2+i$       b)  $\frac{z}{2+i} + \frac{z-i}{2-i} = 3-2i$

Sol: a) 5; b)  $7/2-2i$

25. Resolver el sistema ( $x$  e  $y$  son números complejos):

$$\begin{cases} (2+i)x + (1+i)y = 2+3i \\ (2-i)x - iy = 0 \end{cases}$$

Sol:  $x=i$ ;  $y=2-i$

26. Hallar el número complejo  $z$  que cumpla:  $[z/(2-i)] + [(2z-5)/(2-i)] = 1+2i$ .

Sol:  $z=3+i$

27. Hallar  $z$  tal que  $z^3$  sea igual al conjugado de  $z$ . Sol:  $z=i$ ,  $z=1$ ,  $z=-1$ ,  $z=0$

28. Resolver la ecuación  $(1-i)z^2 - 7 = i$ . Sol:  $z=2+i$  y  $z=-2-i$

## **Problemas y método de Moivre**

### **Problemas**

1. Si el producto de dos números complejos es  $-18$  y dividiendo uno de ellos entre el otro, obtenemos de resultado  $2i$ . ¿Cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?. Sol:  $3^{45^\circ}$  y  $6^{135^\circ}$

2. El cociente de dos números complejos es  $1/2$  y el dividendo es el cuadrado del divisor. Calcula sus módulos y sus argumentos. Sol:  $(1/2)^{0^\circ}$ ;  $(1/4)^{0^\circ}$

3. Aplica un giro de  $90^\circ$  sobre el punto  $A(3,1)$ . Determina, utilizando el cálculo de números complejos, las coordenadas del punto que obtienes.

Sol: a)  $(-1,3)$

4. La suma de dos números complejos conjugados es  $6$  y la suma de sus módulos  $10$ . ¿De qué números complejos se trata?. Sol:  $(3+4i)$ ,  $(3-4i)$

5. La resta de dos números complejos es  $2+6i$ , y el cuadrado del segundo dividido por el primero es  $2$ . Hallarlos. Sol:  $4+2i$ ,  $6+8i$ ;  $4i$ ,  $-2-2i$

6. Hallar dos números complejos sabiendo que: su diferencia es real, su suma tiene de parte real  $8$  y su producto vale  $11-16i$ . Sol:  $(3-2i)$ ;  $2i$

7. El producto de dos números complejos es  $-27$ . Hallarlos sabiendo que uno de ellos es el cuadrado del otro. Sol:  $3^{60^\circ}$ ,  $9^{120^\circ}$ .

8. La suma de dos números complejos es  $-5+5i$ ; la parte real de uno de ellos es  $1$ .

Determinar dichos números sabiendo que su cociente es imaginario puro. Sol:  $(1+3i)$  y  $(-6+2i)$  ó  $(1+2i)$  y  $(-6+3i)$

9. La suma de dos complejos es  $5-i$  y su producto es  $8+i$ . Hallar los números. Sol:  $3-2i$ ,  $2+i$

10. La suma de dos complejos conjugados es  $8$  y la suma de sus módulos  $10$  ¿Cuáles son los números complejos?. Sol:  $(4+3i)$ ,  $(4-3i)$

11. El producto de dos números complejos es  $-2$  y el cubo de uno de ellos dividido por el otro es  $1/2$ . Calcula módulos y argumentos. Sol:  $1^{45^\circ}$ ,  $2^{135^\circ}$ ;  $1^{135^\circ}$ ,  $2^{45^\circ}$ ;  $1^{225^\circ}$ ,  $2^{315^\circ}$ ;  $1^{315^\circ}$ ,  $2^{225^\circ}$

12. Halla  $z$  tal que: a) el conjugado de  $z$  ( $z'$ ) sea igual a  $-z$ . b) el conjugado de  $z$  sea igual a  $z^{-1}$ . c) la suma del conjugado de  $z$  más  $z$  sea igual a  $2$ . d)  $z$  menos el conjugado de  $z$  sea igual a  $2i$ . Sol: a)  $z = ki$ ; b)  $a+bi/a^2+b^2=1$ ; c)  $1+ki$ ; d)  $k+i$

13. El complejo de argumento  $70^\circ$  y módulo  $8$  es el producto de dos complejos, uno de ellos tiene de argumento  $40^\circ$  y módulo  $2$ . Escribir en forma binómica el otro complejo. Sol:  $8^{30^\circ} = 4\sqrt{3} + 4i$

14. Determina el número complejo sabiendo que si después de multiplicarlo por  $(1-i)$  se le suma al resultado  $(-3+5i)$  y se divide lo obtenido por  $2+3i$  se vuelve al complejo de partida. Sol:  $1+i$

### Figuras geométricas

15. Sabiendo que los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son los afijos de las raíces cúbicas de un número complejo, siendo las coordenadas polares de  $P$   $3^{30^\circ}$ . Hallar las coordenadas polares y cartesianas de  $Q$  y  $R$  y el número complejo. Sol:  $Q = 3^{150^\circ} = -3\sqrt{3}/2 + 3/2 i$ ;  $R = 3^{270^\circ} = -3i$ ;  $27i$

16. Halla las coordenadas de los vértices de un hexágono regular, de centro el origen sabiendo que uno de los vértices es el afijo del número complejo  $2^{5/2}$ . Sol:  $2^{150}$ ,  $2^{210}$ ,  $2^{270}$ ,  $2^{330}$ ,  $2^{30}$

17. Halla las coordenadas de los vértices de un cuadrado (de centro el origen de coordenadas) sabiendo que uno de sus vértices es el afijo del número complejo  $1^{120}$ . Sol:  $1^{30^\circ}$ ,  $1^{210^\circ}$ ,  $1^{300^\circ}$

18. Hallar las coordenadas polares y cartesianas de los vértices de un hexágono regular de radio  $3$  u, sabiendo que un vértice está situado en el eje  $OX$ . Sol:  $3^{0^\circ}$ ,  $3^{60^\circ}$ ,  $3^{120^\circ}$ ,  $3^{180^\circ}$ ,  $3^{240^\circ}$ ,  $3^{300^\circ}$

19. Los afijos de las raíces de un complejo son vértices de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio  $2$  u; el argumento de una de las raíces es  $45^\circ$ . Hallar el número complejo y las restantes raíces. Sol:  $2^{56}$ ;  $2^{45}$ ,  $2^{90}$ ,  $2^{135}$ ,  $2^{180}$ ,  $2^{225}$ ,  $2^{270}$ ,  $2^{315}$ ,  $2^0$

20. Hallar las coordenadas de los vértices de un cuadrado, inscrito en una circunferencia de centro el origen de coordenadas, sabiendo que uno de los vértices es el afijo del complejo  $1+2i$ . Sol:  $2+i$ ,  $-2+i$ ,  $-1-2i$

### Método de Moivre

21. Expresa en función de  $\cos \hat{a}$  y  $\sin \hat{a}$  y utilizando la fórmula de Moivre: a)  $\cos 2\hat{a}$  y  $\sin 2\hat{a}$ ; b)  $\cos 3\hat{a}$  y  $\sin 3\hat{a}$ . Sol: a)  $\sin 2\hat{a} = 2\sin \hat{a}\cos \hat{a}$ ;  $\cos 2\hat{a} = \cos^2 \hat{a} - \sin^2 \hat{a}$ ; b)  $\sin 3\hat{a} = 3\cos^2 \hat{a}\sin \hat{a} - \sin^3 \hat{a}$ ;  $\cos 3\hat{a} = \cos^3 \hat{a} - 3\cos \hat{a}\sin^2 \hat{a}$

22. Encuentra las fórmulas para calcular  $\sin 4\hat{a}$  y  $\cos 4\hat{a}$  en función de  $\sin \hat{a}$  y  $\cos \hat{a}$ . Sol:  $\sin 4\hat{a} = 4\sin \hat{a}\cos^3 \hat{a} - 4\cos \hat{a}\sin^3 \hat{a}$ ;  $\cos 4\hat{a} = \cos^4 \hat{a} + \sin^4 \hat{a} - 6\cos^2 \hat{a}\sin^2 \hat{a}$

23. Hallar  $\sin^3 5a$  y  $\cos^2 5a$  sabiendo que  $\sin a = 1/2$  y  $a$  pertenece al primer cuadrante. Sol:  $\sin^3 5a = 1/8$ ;  $\cos^2 5a = 3/4$

24. Si  $\sin x = 1/3$  y  $0 < x < \pi/2$ . Hallar  $\sin 6x$  y  $\cos 6x$ . Sol:  $\sin 6\hat{a} = 460\sqrt{2}/729$ ;  $\cos 6\hat{a} = -329/729$