Tema 1. Números Reales. Intervalos y Radicales

1. El conjunto de números reales

Según vimos el año pasado los números que hoy conocemos como reales han surgido durante la historia del hombre mediante sucesivas ampliaciones del concepto de número. Las distintas agrupaciones son (no surgen así cronológicamente):

1. **Los Naturales** ($\mathbb{N}$): son los números que utilizamos para contar:
   $\mathbb{N}$={0,1,2…}.
   Son los primeros números utilizados, de hecho existen desde que el hombre empieza a relacionar y contar (3 bisontes→3 muescas en la pared). Se utiliza el código decimal, mediante 10 dígitos (0,1,2…,9) se puede escribir cualquier número natural. Se cree que su origen es el conteo con los 10 dedos de las manos.
   Nota: algunos autores no incluyen el cero como número natural.

2. **Los Enteros** ($\mathbb{Z}$): son el conjunto formado por los naturales (enteros positivos y el cero) y los enteros negativos que son los opuestos a los positivos.
   $\mathbb{Z}$={…,-2,-1,0,1,2,..}
   Surgen siglo XVII por la imposibilidad de realizar operaciones del tipo (3-5) con los naturales.

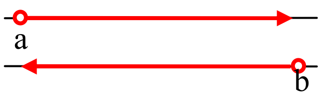
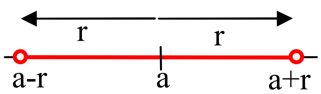
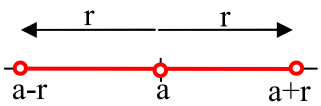
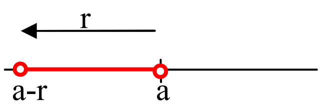
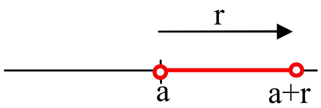
3. **Los Racionales** ($\mathbb{Q}$): son todos aquellos que se pueden poner expresar como cociente de dos enteros (denominador distinto de cero) de la forma $\frac{m}{n}$.
   Si se expresan de forma decimal pueden ser o *exactos* (un número finito de cifras decimales) como 1'34, *periódicos puros* (infinitas cifras periódicas desde la coma) como 1'$\widehat{34}$ =1'343434…, y los periódicos mixtos como 1'3$\hat{4}$=1,3444…
   Surgen antes que los enteros (ya utilizados por Griegos y Babilónicos)
   Nota: darse cuenta que todo entero es racional, como por ejemplo -6=$\frac{-6}{1}$

4. **Los Irracionales** ($\mathbb{I}$): son los números cuya expresión decimal formada por infinitas cifras no periódicas, de tal forma que no pueden expresarse como una fracción. Ejemplo: π=3'14159…

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

2. Conjuntos de la recta real. Intervalos y entornos.

Dentro de la recta real, donde están representados todos los números reales podemos definir una serie de subconjuntos, los ***intervalos*** y los ***entornos.*** La utilización de estos es muy importantes en las inecuaciones así como en el estudio de funciones. Veamos los distintos tipos de intervalos y de entornos en la siguiente tabla:

CONJUNTOS MÁS IMPORTANTES DE LA RECTA REAL			
SUBCONJUNTO	SIMBOLO	DEFINICIÓN	REPRESENTACIÓN
Intervalo Abierto	(a,b)	(a,b)={x∈R:a<x<b} Números entre a y b(no incluidos)	
Intervalo Cerrado	[a,b]	[a,b]={ x∈R:a≤x≤b} Números entre a y b(incluidos)	
Intervalos Semiabierto	(a,b] [a,b)	(a,b]= {x∈R:a<x≤b} [a,b)= {x∈R:a≤x<b} Números entre a y b(uno incluido)	
Semirrectas abiertas	(a,∞) (-∞,b)	(a,∞)={x∈R: x>a} (-∞,b)={x∈R:x<b}	
Semirrectas cerradas	[a,∞) (-∞,b]	[a,∞)={x∈R : x≥a} (-∞,b]={x∈R : x≤b}	
Entorno de centro a y de radio r	E(a,r)	E(a,r)=(a-r,a+r)={x∈R:|x-a|<r} Números cuya distancia al centro, a, es menor que el radio, r.	
Entorno reducido centro a y radio r	$E^*(a,r)$	$E^*(a,r)$=E(a,r)-{a}=(a-r,a)∪(a,a+r) Entorno pero sin contar el centro	
Entorno lateral izquierdo	$E^-(a,r)$	$E^-(a,r)$=(a-r,a)	
Entorno lateral derec	$E^+(a,r)$	$E^+(a,r)$=(a,a+r)	

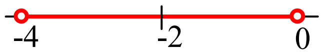
 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejemplos:

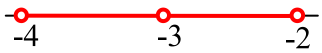
(-2,5]

(-∞,-1)

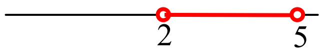
E(-2,2)



$E^*(-3,1)$



$E^+(2,3)$



2.1 Operaciones con conjuntos, unión e intersección.

Unión de dos conjuntos: es el conjunto formado por los números que están en uno **o** en el otro conjunto.

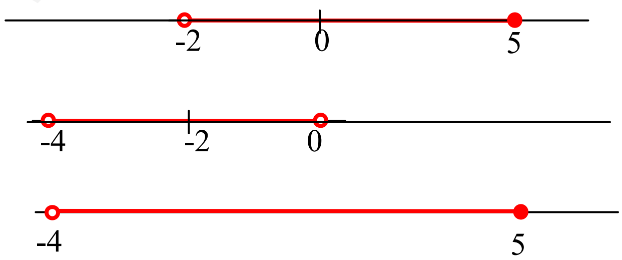
$A\cup B=\{x\in A \text{ ó } x\in B\}$

Intersección de dos conjuntos: es el conjunto formado por los números que están en uno y en el otro conjunto.

$A\cap B=\{x\in A \text{ y } x\in B\}$

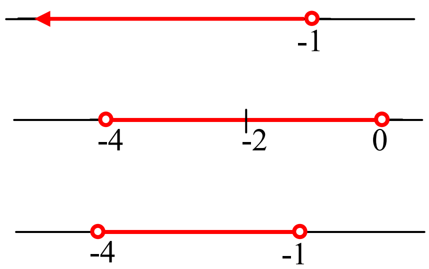
Ejemplos:

(-2,5]∪E(-2,2)=(-4,5]



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

$(-\infty,-1)\cap E(-2,2)$



Ejercicios

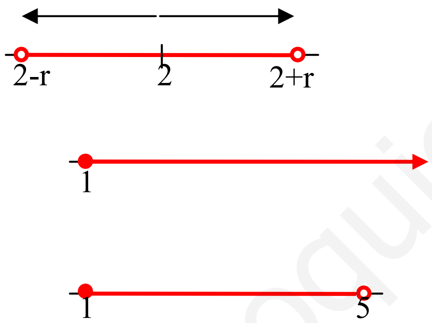
1) calcular el radio y el centro del entorno E(a,r)=(-2,5)

De un extremo a otro hay una distancia de 7, luego 2r=7 → r=3.5

a=-2+3,5=5-3.5=1.5

E(1.5,3.5)=(-2,5)

2) Calcular el radio r del entorno E(2,r), si sabemos que $E(2,r)\cap[1,\infty)=[1,5)$



Claramente se observa que 2+r=5 → r=3

3. Notación científica

Fíjate en los siguientes números:

e(carga e^-)=-0,00000000000000000016 C

$d_{pluton—Sol}$=5910000000000m

$gasto_{empresa}$=312600000000 €

Cuando tenemos cantidades muy pequeñas o muy grandes se utiliza la notación científica, consiste en poner un número multiplicado por una potencia de 10. Así los números en notación científica constan de:

- Parte entera formada por una sola cifra ≠0 (1ª cifra del número)
- Parte decimal(formada por el resto de cifras del número)
- Potencia en base 10 que nos informa del orden de magnitud.

X=a,bcd…·10^n

En los ejemplos anteriores:

$e=-1,6\cdot10^{-19}C$

$d=5,91\cdot10^{12}m$

gasto$=3,126\cdot10^{11}$€

La notación científica tiene las siguientes ventajas:

a) Escribimos los números grades y pequeños de forma más abreviada
b) Con una simple mirada al número podemos entender como es de grande o pequeño ese valor.

Otra ventaja de la notación científica es que es muy útil para operar con esta clase de números, en especial cuando las operaciones son el producto o el cociente. Veamos algunos ejemplos:

a) $(5,24\cdot10^6)\cdot(6,3\cdot10^8)=(5,24\cdot6,3)\cdot10^{14}=33,012\cdot10^{14}=3,3012\cdot10^{15}$
b) $\dfrac{5,24\cdot10^6}{6,3\cdot10^{-8}}=(5,24:6,3)\cdot10^{14}=0,8317\cdot10^{14}=8,317\cdot10^{13}$
c) $5,83\cdot10^9+6,932\cdot10^{12}-7,5\cdot10^{10}=5,83\cdot10^9+6932\cdot10^9-75\cdot10^9=(5,83+6932-75)\cdot10^9=$
$=6862'83\cdot10^9=6,86283\cdot10^{12}$

Nota: correr la coma hacia la izquierda es como dividir, luego para no modificar el resultado tendremos que aumentar el exponente de 10 en tantas unidades como veces que corramos la coma. Al revés si corremos la coma hacia la derecha que es como multiplicar y por tanto tendremos que disminuir el exponente de 10 tantas veces como corramos la coma:

coma →	**==**	**restar al exponente nº posiciones desplazada**
coma ←	**==**	**sumar al exponente nº posiciones desplazada**

Utilización de la calculadora en la notación científica

Ejercicio : Calcular y expresar el resultado en notación científica.

a) $7,823\cdot10^{-5}\cdot1,84\cdot10^{18}$

b) $2,35\cdot10^8+1,43\cdot10^7$

Solución

a) $7,823\cdot10^{-5}\cdot1,84\cdot10^{18}=14,39432\cdot10^{13}=1,439432\cdot10^{14}$

b) $2,35\cdot10^8+1,43\cdot10^7=23,5\cdot10^7+1,43\cdot10^7=24,93\cdot10^7=2,493\cdot10^8$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio Calcular y expresar el resultado en notación científica:

a) $(3\cdot10^{-7})\cdot(8\cdot10^{18})$

c) $(5\cdot10^{12}):(2\cdot10^{-3})$

d) $(5\cdot10^{9})^{2}$

f) $3{,}1\cdot10^{12}+2\cdot10^{10}$

Solución

a) $(3\cdot10^{-7})\cdot(8\cdot10^{18})=24\cdot10^{11}=2{,}4\cdot10^{12}$

c) $(5\cdot10^{12}):(2\cdot10^{-3})=10\cdot10^{9}=10^{10}$

d) $(5\cdot10^{9})^{2}=25\cdot10^{18}=2{,}5\cdot10^{19}$

f) $3{,}1\cdot10^{12}+2\cdot10^{10}=310\cdot10^{10}+2\cdot10^{10}=312\cdot10^{10}=3{,}12\cdot10^{12}$

Ejercicio Calcular y expresar el resultado en notación científica:

a) $\dfrac{30\cdot10^{-4}+7\cdot10^{-4}}{10\cdot10^{5}-5\cdot10^{5}}$

b) $\dfrac{7{,}35\cdot10^{4}}{5\cdot10^{-3}}+3{,}2\cdot10^{7}$

c) $(4{,}3\cdot10^{3}-7{,}2\cdot10^{5})^{2}$

Solución

a) $7{,}4\cdot10^{-9}$

b) $4{,}67\cdot10^{7}$

c) $5{,}12\cdot10^{11}$

4. Potencias y Radicales

4.1 Exponente entero (negativo)

En este apartado vamos a estudiar las potencias cuando el exponente es un número entero negativo. Veamos el significado de a^{-n}:

$$\boxed{a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}}$$

Ejemplos:

$(-5)^{-3}=\dfrac{1}{(-5)^{3}}=-\dfrac{1}{125}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{9}{4}$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

4.2 Potencias de exponente fraccionario. Radicales

Nos falta ahora entender el significado cuando la potencia es una fracción. Veamos el significado de $a^{\frac{n}{p}}$

$$\boxed{a^{\frac{n}{p}} = \sqrt[p]{a^n}}$$

Ejemplos:

$(-3)^{4/5} = \sqrt[5]{(-3)^4} = \sqrt[5]{81}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2/3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

La ventaja de poner una raíz como potencia fraccionaria es que cuando este está representado mediante una potencia podremos aplicar las propiedades de las potencias.

Ejemplos:

a) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 7^1 = 7$

b) $\sqrt[3]{5^6} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 25$

c) $\frac{1}{\sqrt[5]{4}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{5}}} = 4^{-\frac{1}{5}}$

d) $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{16^{\frac{1}{2}}}{16^{\frac{1}{4}}} = 16^{\frac{1}{2}}\cdot 16^{-\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = \pm 2$

Ejercicio, expresar como potencia única y radical

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{3^5}$

b) $2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2^2}} = 2\cdot\sqrt[3]{2^{-2}} = 2\cdot 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{1-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

c) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}=\dfrac{a^{\frac{8}{3}}}{a^2}=a^{\frac{8}{3}-2}=a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$

e) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}}=\left(\dfrac{1}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{2\cdot\frac{1}{3}}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=a^{-\frac{2}{3}}$

f) $a\cdot\sqrt{\dfrac{1}{a}}=a\sqrt{a^{-1}}=a\cdot a^{-\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$

Ejercicio, expresar en forma de exponencial

a) $\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}=\sqrt[3]{x^{\frac{1}{4}}}=\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{x}$

c) $\left(\sqrt[5]{a^2}\right)^3=\left(a^{\frac{2}{5}}\right)^3=a^{\frac{6}{5}}$

d) $\left(\sqrt{a}\right)^{-3}=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}=a^{-\frac{3}{2}}$

e) $\sqrt[8]{a^5\cdot a^2}=\sqrt[8]{a^7}=a^{\frac{7}{8}}$

f) $\left(\sqrt[4]{a^2}\right)^2=\left(a^{\frac{2}{4}}\right)^2=a^{\frac{4}{4}}=a$

Ejercicio, expresar en forma de raíz

a) $(a^2)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$

b) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$

c) $(x^{-1})^{\frac{5}{4}}=x^{-\frac{5}{4}}=\dfrac{1}{x^{\frac{5}{4}}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^5}}$

g $\left(3^{-\frac{2}{5}}\right)^{\frac{10}{3}}=3^{-\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{3}}=3^{-\frac{4}{3}}=\dfrac{1}{3^{\frac{4}{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3^4}}$

d) $\left(a^{\frac{1}{5}}\right)^{-4}=a^{-\frac{4}{5}}=\dfrac{1}{a^{\frac{4}{5}}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^4}}$

h) $2^{1,\hat{3}}=2^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{2^4}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

4.3 Radicales equivalente

Observa las siguientes igualdades:

$3=\sqrt{3^2}=\sqrt[3]{3^3}=\sqrt[4]{3^4}=...=\sqrt[n]{a^n}$, se dice que todos estos radicales son equivalentes

Veámoslo en forma de potencia:

$3=3^{\frac{2}{2}}=3^{\frac{3}{3}}=3^{\frac{4}{4}}=...=3^{\frac{n}{n}}$

Definición: dos radicales son equivalentes si expresados en forma exponencial los exponentes son fracciones equivalentes:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[p]{a^q}\leftrightarrow a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{p}{q}}\leftrightarrow \frac{m}{n}=\frac{p}{q}$$

Construcción de radicales equivalentes: a veces nos interesa tener un radical equivalente para operar, veamos como generar radicales equivalentes:

$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$

ejemplo: $\sqrt[3]{a^4}=\sqrt[6]{a^8}$

Esta propiedad es muy útil para:

1) Simplificar radicales: $\sqrt[8]{2^4}=\sqrt{2}$

2) Productos de radicales: $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2}=\sqrt[15]{2^5}\sqrt[15]{2^3}=\sqrt[15]{2^8}$ (se puede hacer en forma de potencia fraccionaria, $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2}=2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}=2^{\frac{8}{15}}=\sqrt[15]{2^8}$)

Ejercicio: simplificar los siguientes radicales:

a) $\sqrt[8]{625}=\sqrt[8]{5^4}=\sqrt{5}$

b) $\sqrt[12]{64000}=\sqrt[12]{2^9\cdot 5^3}=\sqrt[12]{(2^3\cdot 5)^3}=\sqrt[4]{40}$

Ejercicio: reduce al mismo índice los siguientes grupos de radicales

a) $\sqrt[4]{6},\ \sqrt{3},\ \sqrt[3]{2}$ → mcm(4,3,2)=12

$\sqrt[12]{6^3},\ \sqrt[12]{3^6},\sqrt[12]{2^4}$

b) $\sqrt[6]{8},\ \sqrt[5]{3},\ \sqrt[3]{6}$ → mcm(6,5,3)=30

$\sqrt[30]{8^5},\ \sqrt[30]{3^6},\ \sqrt[30]{6^{10}}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

4.4 Operaciones con radicales

Veremos primero como operar con radicales con mismo índice. Estas propiedades se pueden entender si expresamos las raíces como potencias fraccionarias.

1) **Multiplicación:** $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$ → $a^{1/n}\cdot b^{1/n}=(a\cdot b)^{1/n}$

Ejemplo: $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{14}$

2) **División:** $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ → $\dfrac{a^{1/n}}{b^{1/n}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/n}$

Ejemplo: $\dfrac{\sqrt[3]{14}}{\sqrt[3]{7}}=\sqrt[3]{2}$

3) **Potencia:** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$ → $\left(a^{1/n}\right)^m=a^{m/n}$

Ejemplo: $\left(\sqrt[5]{2}\right)^3=\sqrt[5]{8}$

4) **Raiz:** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$ → $\left(a^{1/n}\right)^{1/m}=a^{1/(m\cdot n)}$

Ejemplo: $\sqrt{\sqrt[5]{2}}=\sqrt[10]{2}$

5) **Suma** → ¡¡¡no se pueden sumar raíces que no sean iguales!!!

Ejemplo: $\sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$

Cuando multiplicamos o dividimos radicales, para operar con ellos es necesario que tengan mismo índice, por esto tendremos que buscar radicales equivalentes con mismo índice. Otra forma es utilizar potencias fraccionarias y las propiedades de las potencias.

Ejemplos:

1) $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[15]{2^3}\cdot\sqrt[15]{5^5}=\sqrt[15]{2^3\cdot 5^5}=\sqrt[15]{8\cdot 3125}=\sqrt[15]{25000}$

$2^{1/5}\cdot 5^{1/3}=2^{3/15}\cdot 5^{5/15}=\left(2^3\cdot 5^5\right)^{1/15}=(25000)^{1/15}=\sqrt[15]{25000}$

2) $\dfrac{\sqrt[4]{x^2y^3}}{\sqrt[3]{xy}}=\dfrac{\sqrt[12]{\left(x^2y^3\right)^3}}{\sqrt[12]{(xy)^4}}=\dfrac{\sqrt[12]{\left(x^6y^9\right)}}{\sqrt[12]{x^4y^4}}=\sqrt[12]{\dfrac{x^6y^9}{x^4y^4}}=\sqrt[12]{x^2y^5}$

4.4.1. Introducción y extracción de factores en un radical.

1) Extracción: cuando podemos expresar el radical como producto de factores elevados a exponentes, de forma que algún exponente es mayor que el índice del radical, este factor se puede extraer de la raíz de la siguiente forma:

$\sqrt{360}=\sqrt{2^3\cdot 3^2\cdot 5}=\sqrt{2^2\cdot 2\cdot 3^2\cdot 5}=2\cdot 3\sqrt{10}=6\sqrt{10}$

$\sqrt[4]{1536}=\sqrt[4]{2^9\cdot 3}=\sqrt[4]{2^8\cdot 2\cdot 3}=2^2\sqrt[4]{6}=4\sqrt[4]{6}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio: extraer todos los factores posibles:

a) $\sqrt{512}=\sqrt{2^9}=2^4\sqrt{2}=16\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3^3}=6$

c) $\sqrt[4]{405}=\sqrt[4]{5\cdot 3^4}=3\sqrt[4]{5}$

d) $\sqrt{6250}=\sqrt{2\cdot 5^5}=5^2\sqrt{2\cdot 5}=25\sqrt{10}$

2)Introducción: para introducir factores dentro de una raíz tendremos que elevar este factor al índice de la raíz. Veamos algunos ejemplos:

$5\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3\cdot 5^3}=\sqrt[3]{375}$

$2^2\sqrt{5}=\sqrt{2^4\cdot 5}=\sqrt{80}$

$\frac{\sqrt[3]{81}}{3}=\sqrt[3]{\frac{81}{3^3}}=\sqrt[3]{3}$

Ejercicio: introducir dentro de los radicales:

a) $\frac{\sqrt[3]{810}}{3}=\sqrt[3]{\frac{810}{3^3}}=\sqrt[3]{30}$

b) $\frac{\sqrt[4]{320}}{2}=\sqrt[4]{\frac{320}{2^4}}=\sqrt[4]{20}$

c) $\frac{\sqrt{83}}{4}=\sqrt{\frac{83}{4^2}}=\sqrt{\frac{83}{16}}$

d) $5\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2\cdot 5^3}=\sqrt[3]{250}$

4.4.2 .Suma de radicales

Para sumar o restar radicales es necesario que estos tengan mismo índice y mismo radicando, es decir sean iguales. Veamos como se suman o restan:

$a\cdot\sqrt[n]{c}\pm b\cdot\sqrt[n]{c}=(a\pm b)\cdot\sqrt[n]{c}$

Ejemplos:

a) $3\cdot\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{3}+5\cdot\sqrt{3}=(3-2+5)\cdot\sqrt{3}=6\cdot\sqrt{3}$

b) $3\cdot\sqrt[3]{2}-4\cdot\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=3\cdot\sqrt[3]{2}-4\cdot\sqrt[3]{2\cdot 2^3}+\sqrt[3]{2\cdot 3^3}=3\cdot\sqrt[3]{2}-8\cdot\sqrt[3]{2}+3\cdot\sqrt[3]{2}=-2\cdot\sqrt[3]{2}$

Ejercicio, operar:

a) $\sqrt{12}-\sqrt{27}+3\cdot\sqrt{48}=2\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{3}+12\cdot\sqrt{3}=11\cdot\sqrt{3}$

b) $3\cdot\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{375}+\sqrt[3]{648}=2\cdot3\cdot\sqrt[3]{3}-5\cdot\sqrt[3]{3}+6\cdot\sqrt[3]{3}=7\cdot\sqrt[3]{3}$

c) $3\cdot\sqrt[4]{32}-5\cdot\sqrt[4]{162}+\sqrt[4]{512}=3\cdot2\cdot\sqrt[4]{2}-5\cdot3\cdot\sqrt[4]{2}+4\cdot\sqrt[4]{2}=-5\cdot\sqrt[4]{2}$

4.4.3 Racionalización

Definición: racionalizar una fracción consiste en hallar una fracción equivalente sin radicales en el denominador.

Tipos de racionalizaciones:

a) Raíz cuadrada en el denominador: $\frac{a}{c\cdot\sqrt{b}}$. Procedimiento: multiplicar denominador y numerador por la raíz del denominador $\frac{a\cdot\sqrt{b}}{c\cdot\sqrt{b}\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{cb}$

Ejemplo: $\frac{10}{3\cdot\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{3\cdot\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{15}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$

b) Raíz índice n en el denominador: $\frac{a}{c\cdot\sqrt[n]{b}}$. Procedimiento: multiplicar denominador y numerador por la raíz del denominador con el radical elevado a n-1 → $\frac{a}{c\cdot\sqrt[n]{b}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-1}}}{c\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{b^{n-1}}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-1}}}{c\cdot b}$

Ejemplo: $\frac{7}{3\cdot\sqrt[4]{3}}=\frac{7\cdot\sqrt[4]{3^3}}{3\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{3^3}}=\frac{7\cdot\sqrt[4]{3^3}}{3\cdot3}=\frac{7\cdot\sqrt[4]{3^3}}{9}$

c) Suma o diferencia de dos raíces cuadradas en el denominador. $\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$. Procedimiento multiplicar numerador y denominador por el conjugado (si están sumando por la diferencia y si están restando por la suma)

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a\cdot\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}=\frac{a\cdot\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{c}\right)^2}=\frac{a\cdot\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{b-c}$$

Ejemplo: $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5}=-\frac{5\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{2}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio, racionaliza:

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

b) $\frac{3}{5\cdot\sqrt[3]{2}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2^2}}{5\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2^2}}{5\cdot\sqrt[3]{2^3}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2^2}}{5\cdot 2}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2^2}}{10}$

c) $\frac{4}{\sqrt[4]{8}}=\frac{4\cdot\sqrt[4]{8^3}}{\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{8^3}}=\frac{4\cdot\sqrt[4]{8^3}}{8}=\frac{\sqrt[4]{8^3}}{2}$ o $\frac{4}{\sqrt[4]{2^3}}=\frac{4\cdot\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{2^3}}=\frac{4\cdot\sqrt[4]{2}}{2}=2\cdot\sqrt[4]{2}$

d) $\frac{4}{3-\sqrt{2}}=\frac{4\cdot(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{2})}=\frac{12+4\sqrt{2}}{9-2}=\frac{12+4\sqrt{2}}{7}$

e) $\frac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}=\frac{2\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{3})}=\frac{2\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{6-3}=\frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{3}$

f)

$$\frac{6}{\sqrt{2+\sqrt{5}}}=\frac{6\sqrt{2+\sqrt{5}}}{\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{5}}}=\frac{6\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2+\sqrt{5}}=\frac{6\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{2+\sqrt{5}}}{\left(2+\sqrt{5}\right)\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)}=\frac{6\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{2+\sqrt{5}}}{4-5}=$$
$$-6\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{2+\sqrt{5}}$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Tema 2. Polinomios y fracciones algebraicas

1. Polinomios

1.1 Definiciones

Definición: se llama polinomio de variable x a la expresión algebraica que resulta de sumar 2 o más monomios de variable x, siendo del tipo:

$P(x)=a_nx^n+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ Donde:

- $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$ y son los coeficientes y a_0 término independiente
- n es el grado del polinomio (el grado mayor de los monomios)
- $a_nx^n, \ldots, a_1x, a_0$ son los términos del polinomio

Ejemplo: $P(x)=-6x^5-3x^2+\frac{3}{2}\cdot x+\sqrt{2}$ es un polinomio de variable x, de grado 5 con coeficientes $a_5=-6$, $a_4=a_3=0$, $a_2=-3$, $a_1=\frac{3}{2}$ y $a_0=\sqrt{2}$. Siendo $\sqrt{2}$ el término independiente.

Observa las siguientes expresiones que no son polinomios:

$\sqrt{x}+x$; $x^3-\frac{1}{x}$; x^2-y+2

Otras definiciones:

- *polinomio de grado cero*: son los números reales
- *polinomio nulo*: es el cero $0(x)=0$
- *polinomio completo*: es aquel donde todos los coeficientes desde el de mayor grado al término independiente son distintos de cero. Ejemplo: $P(x)=-2x^3+4x^2-5x+12$

Valor numérico de un polinomio: resulta de sustituir una variable por un número, obteniendo el correspondiente valor numérico.

Ejemplo: $P(x)=x^3-x^2+x-5 \rightarrow P(1)=1^3-1^2+1-5=-4$; $P(0)=0^3-0^2+0-5=-5$

Raíz de un polinomio P(x): es todo número real, $a\in R$, tal que su valor numérico es cero es decir $P(a)=0$

Ejemplo: $P(x)=7x^5-4x^2+11$ el -1 es una raíz de $P(x) \rightarrow P(-1)=-7-4+11=0$.

En siguientes apartados veremos cuantas y como calcular las raíces de los polinomios.

1.2 Operaciones con polinomios

<u>Suma y diferencia</u>: se suman y restan los monomios semejantes

Ejemplo: $P(x)=2x^3-5x^2+3x-2$ y $Q(x)=6x^4-5x^3+6x-5$

$P(x)+Q(x)= 2x^3-5x^2+3x-2+(6x^4-5x^3+6x-5)=6x^4-3x^3-5x^2+9x-7$

$P(x)-Q(x)=2x^3-5x^2+3x-2-(6x^4-5x^3+6x-5)=2x^3-5x^2+3x-2-6x^4+5x^3-6x+5=$

$=-6x^4+7x^3-5x^2-3x+3$

Definición: polinomios opuestos son los que sumados el resultado es el polinomio nulo. El opuesto de P(x) se denota como –P(x).

Ejemplo: $P(x)=x^2-3x+5 \rightarrow -P(x)=-x^2+3x-5$

<u>Multiplicación:</u> la multiplicación de dos polinomios resulta de multiplicar cada monomio del primer polinomio por todos los monomios del segundo.

Ejemplo: $(5x^2-3x+5)\cdot(-7x^3+x+1)=-35x^5+5x^3+5x^2+21x^4-3x^2-3x-35x^3+5x+5=$

$=-35x^5+21x^4-30x^3+2x^2+2x+5$

<u>Potencia de polinomios:</u> la potencia n-esima de un polinomio P(x) se denota como $(P(x))^n$ y resulta de multiplicar P(x) n veces por si mismo: $(P(x))^n=\underbrace{P(x)\cdot P(x)\cdot\ldots\cdot P(x)}_{\text{n-veces}}$

Ejemplo: $P(x)=(5x^2+x+1) \rightarrow (P(x))^3=(5x^2+x+1)\cdot(5x^2+x+1)\cdot(5x^2+x+1)=$

$=125x^6+75x^5+90x^4+31x^3+18x^2+3x+1$

<u>Identidades notables:</u>

- Cuadrado de la suma de monomios: $\mathbf{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$.

  Demostración: $(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$

  Ejemplo: $(5x+3)^2=(5x)^2+2\cdot 5x\cdot 3+3^2=25x^2+30x+9$

- Cuadrado de la diferencia de monomios: $\mathbf{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$.

  Demostración: $(a-b)^2=(a-b)\cdot(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-2ab+b^2$

  Ejemplo: $(5x-3)^2=(5x)^2-2\cdot 5x\cdot 3+3^2=25x^2-30x+9$

- Suma por diferencia: $\mathbf{(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2}$

  Demostración: $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2$

  Ejemplo: $(5x-3)\cdot(5x+3)=(5x)^2-3^2=25x^2-9$

Ejercicio, calcular

a) $\mathbf{(3x+1)^2}=9x^2+6x+1$
b) $\mathbf{(a^2+1/2)^2}=a^4+a+1/4$
c) $\mathbf{(2x^2-3)^2}=4x^4-12x^2+9$
d) $\mathbf{(2a^3+b^2)\cdot(2a^3-b^2)}=4\cdot a^6-b^4$
e) $\mathbf{(2x^3+2x-1)^2}=(2x^3+2x-1)\cdot(2x^3+2x-1)=4x^6+8x^4-4x^3+4x^2-4x+1$

<u>Sacar factor común:</u> cuando todos los términos del polinomio P(x) son múltiplos de un monomio m(x) podemos sacarlo factor común.

Ejemplo: $6x^4-9x^3+12x^2-3x=3x\cdot(2x^3-3x^2+4x-1)$

Ejercicio, sacar factor común:

a) $\mathbf{490x^3-420x^2+90x}=10x\cdot(49x^2-42x+9)=10x(7x-3)^2$
b) $\mathbf{1/4x^3-3/20x^2+5/4x}=x/4\cdot(x^2-3/5x+5)$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

División de polinomios: veamos cómo se divide a partir de un ejemplo

$$
\begin{array}{lllll|l}
\overset{P(X)}{6x^4} & & +8x^2 & +7x & +40 & \overset{Q(x)}{2x^2-4x+5} \\
\cline{6-6}
-6x^4 & +12x^3 & -15x^2 & & & 3x^2+6x+17/2 = C(x)\ \textit{cociente} \\
\cline{1-3}
 & +12x^3 & -7x^2 & & & \\
 & -12x^3 & +24x^2 & -30x & & \\
\cline{2-4}
 & & 17x^2 & -23x & & \\
 & & -17x^2 & +34x & -85/2 & \\
\cline{3-5}
 & & & \underline{11x-5/2} = R(x) & & \\
 & & & \textit{resto} & &
\end{array}
$$

P(x)=Q(x)·C(x)+R(x)

Si la división es exacta se cumple R(x)=0 → P(x)=Q(x)·C(x), luego P(x) <u>múltiplo</u> de Q(x) y C(x), o estos <u>divisores</u> de P(x).

Ejercicio: decir si A(x)= $x^4+3x^3-x^2-4x-1$ es múltiplo de B(x)=x+3 y C(x)=x+1

Dividiendo tenemos que la división entre (x+3) la división no es exacta → no múltiplo

La división entre (x+1) la división es exacta → es múltiplo

2. Factorización de un polinomio

2.1 Teorema del resto. Criterio de divisibilidad por (x-a)

Un polinomio P(x) será múltiplo del polinomio de primer grado de la forma (x-a), con $a\in R$ si se cumple que la división P(x):(x-a) es exacta, es decir el resto es cero.

Existen diversos teoremas que nos facilitan saber si (x-a) es divisor de P(x) sin necesidad de realizar la división. Veámoslos

Teorema 1: Sea $P(x)=a_nx^n+\ldots a_2x^2+a_1x+a_0$ con coeficientes enteros ($a_n,\ldots,a_1,a_0\in Z$) para que (x-a) con $a\in Z$ sea divisor de P(x) es necesario que el término independiente, a_0, sea múltiplo de a. Esta condición es necesaria pero no suficiente, es decir a puede ser divisor de a_0 y en cambio (x-a) no ser divisor.

Ejemplo: Sea el polinomio $P(x)=x^3-x^2-4x+4$ los posibles divisores de la forma (x-a) con a nº entero son los siguientes (compruébalo dividiendo):

- a=1 → (x-1), si dividimos la división es exacta → (x-1) divisor de P(x)
- a=2 → (x-2), si dividimos la división es exacta → (x-2) divisor de P(x)
- a=4 → (x-4), si dividimos la división no es exacta, resto=36
- a=-1 → (x+1), si dividimos la división no es exacta, resto=6
- a=-2 → (x+2), si dividimos la división es exacta → (x+2) divisor de P(x)
- a=-4 → (x+4), si dividimos la división no es exacta , resto=-60

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Teorema del resto: el resto de dividir P(x) entre (x-a) es igual al valor numérico de P(a) → resto=P(a).

Ejemplo: comprobémoslo en el polinomio anterior $P(x)=x^3-x^2-4x+4$ y los factores anteriores:

- a=1 → (x-1), resto=P(1)=0
- a=2 → (x-2), resto=P(2)=0
- a=4 → (x-4), resto=P(4)=36
- a=-1 → (x+1), resto=P(-1)=6
- a=-2 → (x+2), resto=P(-2)=0
- a=-4 → (x+4), resto=P(-4)=-60

A partir del teorema del resto podemos saber si un polinomio es múltiplo de P(x) de (x-a) sin necesidad de dividir, simplemente calculando P(a):

a) Si P(a)=0 entonces (x-a) divisor de P(x) pues el resto es 0

b) Si P(a)≠0 entonces (x-a) no es divisor de P(x) pues el resto no es cero.

Relación entre raíces de un polinomio soluciones ecuación y divisibilidad por (x-a): Recordemos todos los teoremas y definiciones vistas anteriormente para relacionarlas entre si, sea $P(x)= a_nx^n+\ldots a_2x^2+a_1x+a_0$

a es raíz si P(a)=0 ←→ a solución a la ecuación $a_nx^n+\ldots a_2x^2+a_1x+a_0$ ←→ (x-a) divisor de P(x) pues el resto de la división r=P(a)=0.

Luego todas las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a es raíz del polinomio P(x)
- a solución de la ecuación $a_nx^n+\ldots a_2x^2+a_1x+a_0=0$
- (x-a) divisor de P(x)

Teorema fundamental del álgebra: sea un polinomio de P(x) de grado n, el número máximo de raíces es n, y por tanto el número máximo de polinomios de la forma (x-a) divisores y de soluciones a la ecuación $a_nx^n+\ldots a_2x^2+a_1x+a_0=0$

Ejercicio: Sean el polinomio $P(x)=x^3+2x^2-x-2$ $Q(x)= x^3-5x^2-9x+45$ calcular

a) Los posibles polinomios (x-a) con a∈Z divisores de P(x)
b) El número máximo de ellos que puede ser divisores de P(x)
c) Cuales son los divisores
d) Calcular las soluciones de la ecuación de $x^3+2x^2-x-2=0$

Solución:

<u>$P(x) =x^3+2x^2-x-2$</u>

a) Pueden ser a=1 → (x-1); a=2 → (x-2); a=-1 → (x+1); a=-2 →(x+2)
b) Como mucho sólo 3 pueden ser divisores de P(x)

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

c) No hace falta dividir simplemente calcular el resto es decir P(a):
- **(x-1)** $\rightarrow$ r=P(1)=1+2-1-2=0 divisor
- (x-2) $\rightarrow$ r=P(2)=8+8-2-2=12 no divisor
- **(x+1)**$\rightarrow$ r=P(-1)=-1+2+1-2=0 divisor
- **(x+2)**$\rightarrow$ r=P(-2)=-8+8+2-2=0 divisor

d) El número máximo de soluciones de la ecuación es de 3, son x=1, x=-1, x=-2

<u>Q(x) = x^3-5x^2-9x+45</u>

a) Pueden ser a=1 $\rightarrow$(x-1); a=3 $\rightarrow$(x-3); a=5 $\rightarrow$(x-5); a=9 $\rightarrow$(x-9); a=15$\rightarrow$(x-15): x=45 $\rightarrow$(x-45); a=-1 $\rightarrow$ (x+1); a=-3 $\rightarrow$ (x+3); a=-5 $\rightarrow$ (x+5); a=-9 $\rightarrow$ (x+9); x=-15$\rightarrow$ (x+15); x=-45 $\rightarrow$ (x+45)

b) Como mucho sólo 3 pueden ser divisores de P(x)

c) No hace falta dividir simplemente calcular el resto es decir P(a):
- (x-1) $\rightarrow$ r=P(1)=32 no divisor
- **(x-3)** $\rightarrow$ r=P(3)=0 divisor
- **(x-5)** $\rightarrow$ r=P(5)=0 divisor
- (x-9) $\rightarrow$ r=P(9)=288 no divisor
- (x-15)$\rightarrow$ r=P(15)=2160 no divisor
- (x-45)$\rightarrow$r=P(45)=80640 no divisor
- (x+1)$\rightarrow$ r=P(-1)=48 no divisor
- **(x+3)**$\rightarrow$ r=P(-3)=0 divisor
- (x+5)$\rightarrow$ r=P(-5)=-160 no divisor
- (x+9) $\rightarrow$ r=P(-9)=-1008 no divisor
- (x+15) $\rightarrow$ r=P(-15)=4320 no divisor
- (x+45)$\rightarrow$r=P(-45)=-100800 no divisor

d) El número máximo de soluciones de la ecuación es de 3, son x=3, x=-3, x=5

Soluciones cuando a no es un número entero: hasta ahora sólo hemos considerado las raíces enteras, habiendo visto que estas deben de ser divisores del término independiente. Pero estás no son las únicas que pueden ser raíces, veamos algún ejemplo:

Ejemplos:

a) P(x)=6x^2+x-1$\rightarrow$ Las únicas raíces enteras pueden ser a=1 y a=-1, pero estas no son raíces P(1)=6 y P(-1)=4, entonces (x-1) y (x+1) no son divisores de P(x) . ¿entonces no tiene raíces ni divisores?. Veamos como si. Las raíces de P(x) serán también soluciones de 6x^2+x-1=0, que como bien sabemos podemos calcular a partir de las soluciones de ecuaciones de segundo grado.

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{-1\pm 5}{12}=\begin{cases}\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2}\end{cases}$$

Luego (x+1/2) y (x-1/3) son divisores de P(x) pues P(-1/2)=0 y P(1/3)=0.

b) $P(x)=x^2-3x-3$→ Las únicas raíces enteras pueden ser a=1 y a=-1, a=3 y a=-3 pero estas no son raíces P(1)≠0, P(-1)≠0, P(3)≠0 y P(-3)≠0, entonces (x-1), (x-3), (x+1) y (x-3) no son divisores de P(x) . ¿entonces no tiene raíces ni divisores?. Veamos como si. Las raíces de P(x) serán también soluciones de $x^2-3x-3=0$, que como bien sabemos podemos calcular a partir de las soluciones de ecuaciones de segundo grado.

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+12}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}=\begin{cases}\frac{3+\sqrt{21}}{2}\\ \frac{3-\sqrt{21}}{2}\end{cases}$$

Luego (x-$\frac{3+\sqrt{21}}{2}$) y (x- $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$) son divisores de P(x) pues P($\frac{3+\sqrt{21}}{2}$)=0 y P($\frac{3-\sqrt{21}}{2}$)=0.

Regla de Ruffini: cuando dividimos un polinomio P(x) entre un binomio de la forma (x-a) podemos aplicar la regla de Ruffini, que es más sencillo que la división

Ejemplos:

$(x^3-2x^2-3):(x+2)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & & -2 & 8 & -16 \\ \hline & 1 & -4 & 8 & \underline{-19} \end{array}$$

→ $C(x)=x^2-4x+8$ r=-19

$(x^3-2x^2-3):(x-1/2)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & 0 & -3 \\ -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{5}{8} \\ \hline & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{4} & \underline{-\frac{29}{8}} \end{array}$$

→ $C(x)=x^2-\frac{5}{2}x+\frac{5}{4}$ $r=-\frac{29}{8}$

3. Propiedades de la divisibilidad

3.1 Polinomios irreducibles

Definición: un polinomio se dice irreducible cuando no tiene ningún otro polinomio divisor de grado inferior (siempre es posible encontrar uno del mismo grado)

Teorema: los únicos polinomios irreducibles son los de 1^er^ grado y los de segundo grado con soluciones no reales.

Ejemplos: P(x)=x-3, Q(x)=x+5, H(x)=3x+3, $I(x)=x^2-3x+3$, $J(x)=x^2+1$

Nota: darse cuenta que 3x+3 es divisible por x+1, pero este polinomio es del mismo grado.

Ejercicio, decir cuales de los siguientes polinomios son irreducibles: x^2-3x+1, x^3+x, x^2+x+6, 7x-3/2

- x^2-3x+1→ $x=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$,2 divisores x^2-3x+1=(x-$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$)(x-$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$)
- No al ser de tercer grado→ 2 divisores, 1 raíz $x^3+x=x(x^2+1)$
- x^2+x+6→ $x=\frac{1\pm\sqrt{1-24}}{2}=no\,sol$, **Irreducible,** no raíces ni divisores
- 7x-3/2, es **irreducible** al ser de primer grado

Proposición: desde el punto de vista de la divisibilidad todos dos polinomios son equivalentes si son proporcionales→ P(x) equivalente a Q(x) si P(x)=K·Q(x)

Ejemplos: $x^3+3x+2\equiv 3x^3+9x+6\equiv \frac{1}{3}x^3+x+\frac{2}{3}$

Nota: de todos los polinomios equivalentes se toma el que tiene el coeficiente de mayor grado igual a la unidad.

Ejemplos: $5x^3+3x^2+15x$ → $x^3+3/5x^2+3x$; $2x^2-4x+2$ → x^2-2x+1

3.2 Número de raíces y divisores de primer grado de un polinomio.

Teorema: un polinomio P(x) tiene a lo sumo n raíces (y por tanto n divisores de primer grado) siendo n el grado del polinomio.

Demostración: supongamos que $P(x)=x^n+\ldots+a_1x+a_0$ tiene n+1 raíces a^1, a^2,…,a^{n+1}, entonces P(x) se puede poner como $P(x)=(x-a^1)\cdot\ldots\cdot(x-a^{n+1})$ y sería entonces de grado n+1 y no degrado n.

Definición: una raíz a de un polinomio P(x) tiene multiplicidad 2 si P(x) es divisible por $(x-a)^2$, multiplicidad 3 si es divisible por $(x-a)^3$, etc.

Ejemplos:

$P(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$, luego a=-1 es raíz doble

$Q(x)=x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$, luego a=1 es raíz triple.

Nota: a la hora de contar el número de raíces las raíces dobles cuentan como 2, raíces triples como 3, etc. De esta forma un polinomio de grado 3 no podrá tener 2 raíces dobles (pues sería como 4 raíces)

3.3 Descomposición factorial de un polinomio

Definición: la descomposición factorial de un polinomio consiste en expresarlo como producto de polinomios irreducibles (de 1er grado y de 2º sin soluciones).

Diferentes métodos de sacar factorizar

a) <u>Sacar factor común</u>: cuando el término independiente es nulo, pudiendo sacar factor común x^m siendo m el grado del monomio de menor grado. De esta forma a=0 es raíz de multiplicidad m.

   Ejemplo: $P(x)=x^5-5x^4-9x^3+45x^2=x^2(x^3-5x^2-9x+45)$ a=0 es raíz doble.

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

b) <u>Buscar divisores de la forma (x-a) por Ruffini:</u> por Ruffini sólo buscaremos divisores donde la raíz, a, es entera. Recordar que entonces a debe de ser divisor del término independiente.

Ejemplo: $Q(x)=x^3-5x^2-9x+45$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & -9 & 45 \\ 3 & & 3 & -6 & -45 \\ \hline & 1 & -2 & -15 & \underline{0} \\ -3 & & -3 & 15 & \\ \hline & 1 & -5 & \underline{0} & \end{array}$$

$P(x)=(x+3)(x^2-2x-15)$

$(x^2-2x-15)=(x+3)(x-5)$

→ Q(x)=(x-3)(x+3)(x-5)

Luego el polinomio P(x) del ejemplo anterior es $P(x)=x^2\cdot(x-3)(x+3)(x-5)$

c) <u>A partir soluciones de ecuación de 2º grado</u>: cuando las raíces no son enteras no es fácil encontrarlas a partir de Ruffini. Si tenemos una ecuación de 2º grado podemos obtener las raíces a partir de sus soluciones.

Ejemplo: $P(x)=x^3-5x^2+5x-1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 5 & -1 \\ 1 & & 1 & -4 & 1 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & \underline{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2-4x+1)$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\left\langle\begin{array}{l}2+\sqrt{3}\\2-\sqrt{3}\end{array}\right.$$ $(x^2-4x+1)=(x-(2+\sqrt{3}))\cdot(x-(2-\sqrt{3}))$

$P(x)=(x-1)\cdot(x-(2+\sqrt{3}))\cdot(x-(2-\sqrt{3}))$

Ejercicio factorizar:

a) $P(x)=x^3+4x^2+x+4$ → $P(x)=x^3+4x^2+x+4=(x+4)(x^2+1)$ → raíz -4
b) $Q(x)=2x^3+x^2-8x-4$ → $Q(x)=2(x+½)(x-2)(x+2)$ → raíz $-½$, ± 2
c) $H(x)=3x^2+10x+3$ → $H(x)=3\cdot(x+3)(x+1/3)$ → raíz -3 y -1/3
d) $I(x)=2x^3+4x^2-2x-4$ → $I(x)=2\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)$ → raíz -1, 1 y -2
e) $J(x)=x^3+x$ → $J(x)=x(x^2+1)$ → raíz 0
f) $K(x)=x^3+x^2+x-3$ → $K(x)=(x-1)\cdot(x^2+2x+3)$ → raíz 1
g) $L(x)=x^4+2x^3+x^2$ → $L(x)=x^2\cdot(x+1)^2$ → raíz 0 y -1 doble
h) $M(x)=x^4-3x^3-2x^2+2x$ → $M(x)=x\cdot(x+1)\cdot(x-(2+\sqrt{2}))\cdot(x-(2-\sqrt{2}))$ → raíz 0,-1, $2+\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$

A partir de los teoremas visto hasta ahora decir si están bien o mal factorizadas los siguientes polinomios. Decir por que.

a) $P(x)=x^3-3x^2+2x+3=(x+5)\cdot(x+1)\cdot(x-2)$ Falso, 2 y 5 no son divisores de 3

b) $Q(x)=x^3-2x^2+1=(x-1)^2(x+1)^2$ Falso, 4 raíces (dos de multiplicidad doble) y grado 3

c) $H(x)=x^3-5x^2-6x+5=(x-5)\cdot(x+1)\cdot(x-1)$. Verdadero 3 raíces → $H(1)=H(-1)=H(5)=0$

d) $I(x)=x^3+5x^2+6x+10=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+5)$ Falso. $I(-1)=-1+5-6+10\neq0$

e) $S(x)=2x^2+4x+2=(x+1)^2$. Falso, falta multiplicar por 2.

Decir el polinomio que cumple las siguientes propiedades

a) El polinomio P(x) cumple:

(i) Solo tiene dos raices:

· El -1 es una raiz simple (multiplicidad 1)

· El 2 es una raiz doble (multiplicidad 2)

(ii) Es de grado 3

(iii) El coeficiente de mayor grado es 2

b) El polinomio Q(x) cumple.

(i) Solo tiene dos raices:

· El 3 es una raiz simple (multiplicidad 1)

· El -2 es una raiz simple (multiplicidad 1)

(ii) Es divisible por x^2+1

(iii)El coeficiente de mayor grado es 1

(iv) De todos los posibles es el de menor grado

$P(x)=2\cdot(x+1)\cdot(x-2)^2$
$Q(x)=(x-3)\cdot(x+2)\cdot(x^2+1)$

Decir el valor de a para que $x^3+3x^2+3ax+1$ sea divisible por (x+1)

$P(-1)=-1+3-3\cdot a+1=0 \rightarrow a=1$

4. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

4.1 Máximo común divisor

Definición: el máximo común divisor de 2 o más polinomios es otro polinomio que cumple:

a) es divisor de todos ellos

b) de todos ellos es el de mayor grado con coeficiente de mayor grado la unidad.

Veamos como calcular el máximo común divisor:

1) descomponer factorialmente cada polinomio en polinomios irreducible

2) el máximo común divisor es el polinomio cuya descomposición factorial esta formada por los polinomios irreducibles comunes a todos los polinomios con menor exponente.

Ejemplo:

mcd $(x^2-1, x^2+2x+1, x^2+3x+2)=(x+1)$

$x^2-1=(x+1)(x-1)$
$x^2+2x+1=(x+1)^2$
$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

4.2 Mínimo común múltiplo

Definición: mínimo común múltiplo de dos o más polinomios es otro polinomio que cumple:

a) es un polinomio múltiplo de todos los polinomios

b) de todos los polinomios múltiplos es aquel que tiene menor grado con coeficiente de mayor grado unidad.

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Veamos como calcular el mínimo común múltiplo:

1) descomponer factorialmente cada polinomio en polinomios irreducible
2) el mínimo común múltiplo es el polinomio cuya descomposición factorial esta formada por los polinomios irreducibles comunes y no comunes a todos los polinomios con mayor exponente.

Ejemplo:

mcd (x^2-1, x^2+2x+1,x^2+3x+2)=$(x+1)^2\cdot(x-1)\cdot(x+2)=x^4+3x^3+x^2+-3x-2$

$x^2-1=(x+1)(x-1)$
$x^2+2x+1=(x+1)^2$
$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

Ejercicio: calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios:

a) $p(x)=x^4-3x^2+2x$, $q(x)=x^3+3x^2-4$

$p(x)=x\cdot(x-1)^2\cdot(x+2)$

$q(x)=(x-1)\cdot(x+2)^2$

$mcm(p(x),q(x))=(x-1)^2\cdot(x+2)^2\cdot x=x^5+2x^4-3x^3-4x^2+4x$

$mcd(p(x),q(x))=(x-1)\cdot(x+2)=x^2+x-2$

b) $p(x)=x^5-x^3-x^2+1$, $q(x)=x^4-2x^3-x^2+2x$

$p(x)=(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x^2+x+1)$

$q(x)=x\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-2)$

$mcm(p(x),q(x))=x\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x^2+x+1)=x^6-x^5-2x^4-x^3+x^2+2x$

$mcd(p(x),q(x))=(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1$

5. Fracciones algebraicas

5.1 Definición

Definición : se llama fracción algebraica al cociente de dos polinomios, es decir de la forma $\frac{Px)}{Q(x)}$.

Ejemplos: $\frac{2x+3}{x^2+x-1}, \frac{2}{x+1}, \frac{2x+5}{x^3-x^2+3}$

Las fracciones algebraicas se comportan de forma semejante a las fracciones numéricas como veremos en siguientes apartados.

5.2 Simplificación

Si el numerador y el denominador de una fracción algebraica se pueden dividir por el mismo polinomio (es decir son múltiplos de este polinomio) al dividirlos se simplifica la fracción.

Ejemplo: $\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-2x+1} \underset{:(x-1)}{=} \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

Si dividimos numerador y denominador por el máximo común divisor de los dos polinomios se obtiene la fracción irreducible.

Ejemplo: $\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^3-x^2-x+1} = \dfrac{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+3)}{(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{x+3}{x-1}$

5.3 Reducción a común denominador

Al multiplicar numerador y denominador de una fracción por el mismo polinomio se obtiene una fracción equivalente. Si tenemos varias fracciones y queremos obtener fracciones equivalentes con el mismo denominador tenemos dos opciones poner como denominador el producto de los dos denominadores o el mínimo común múltiplo de ambos.

Ejemplos:

$$\frac{x+7}{x},\frac{x^2+3}{x^2+x},\frac{x^2-1}{x+1} \to \frac{(x+7)\cdot(x+1)}{x^2+x},\frac{x^2+3}{x^2+x},\frac{(x^2-1)\cdot x}{x^2+x} \to \frac{x^2+8x+7}{x^2+x},\frac{x^2+3}{x^2+x},\frac{x^3-x}{x^2+x}$$

$$\frac{x^2-3x+5}{x^2-3x+2},\frac{x-1}{x+3} \to \frac{(x^2-3x+5)\cdot(x+3)}{(x^2-3x+2)\cdot(x+3)},\frac{(x-1)\cdot(x^2-3x+2)}{(x^2-3x+2)\cdot(x+3)} \to \frac{x^3-4x+15}{x^3-7x+6},\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-7x+6}$$

5.4 Operaciones

<u>Suma y resta</u>:se reduce a común denominador y se suman o restan los numeradores

Ejemplo: $\dfrac{x+7}{x}-\dfrac{x^2+x}{x^2-x}=\dfrac{(x+7)\cdot(x-1)}{x^2-x}-\dfrac{x^2+x}{x^2-x}=\dfrac{x^2+6x-7-(x^2+x)}{x^2-x}=\dfrac{5x-7}{x^2-x}$

<u>Producto</u>: el resultado es una fracción algebraica cuyo numerador es el producto de los numeradores y su denominador el producto de los denominadores.

Ejemplo: $\dfrac{x+1}{x-3}\cdot\dfrac{x-2}{x}=\dfrac{(x+1)\cdot(x-2)}{(x-3)\cdot x}=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x}$

<u>División</u>: es una fracción algebraica donde el numerador es igual al producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda y el denominador es igual al producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

Ejemplo: $\dfrac{x+1}{x-3}:\dfrac{x-2}{x}=\dfrac{(x+1)\cdot x}{(x-3)\cdot(x-2)}=\dfrac{x^2+x}{x^2-5x+6}$

Nota: cuando multiplicamos o dividimos, muchas veces al igual que con las fracciones numéricas estas pueden ser simplificables. Para que sea más sencilla la simplificación es mejor factorizar primero los polinomios, y luego simplificar, antes de multiplicar. Veamos un ejemplo:

$$\frac{x^4-2x^3-4x^2+2x+3}{x^3-25x}\cdot\frac{x^3+7x^2+10x}{x^3-6x^2+11x-6}=\frac{(x+1)^2\cdot(x-1)\cdot(x-3)}{x\cdot(x-5)\cdot(x+5)}\cdot\frac{x\cdot(x+5)\cdot(x+2)}{(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-2)}=$$

$$=\frac{(x+1)^2\cdot\cancel{(x-1)}\cdot\cancel{(x-3)}}{\cancel{x}\cdot(x-5)\cdot\cancel{(x+5)}}\cdot\frac{\cancel{x}\cdot\cancel{(x+5)}\cdot(x+2)}{\cancel{(x-1)}\cdot\cancel{(x-3)}\cdot(x-2)}=\frac{(x+1)^2\cdot(x+2)}{(x-5)(x-2)}=\frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^2-7x+10}$$

5.5. Descomposición de fracciones algebraicas en fracciones simples

Consideraremos dos casos para la descomposición de $\frac{P(x)}{Q(x)}$:

a) Grado [P(x)] < grado[Q(x)], descomponemos Q(x) factorialmente y tenemos 3 casos posibles:

a. Raíces del denominador simple $Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$:
Entonces la fracción algebraica puede ponerse como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a_1)}+\frac{A_2}{(x-a_2)}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a_n)}$$

Ejemplo: $\frac{7x^2-3x+1}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\frac{A_1}{(x-1)}+\frac{A_2}{(x+2)}+\frac{A_3}{(x-3)}$

$$\frac{7x^2-3x+1}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\frac{A_1(x+2)(x-3)+A_2(x-1)(x-3)+A_3(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-3)}$$

$7x^2-3x+1=A_1(x+2)(x-3)+A_2(x-1)(x-3)+A_3(x-1)(x+2)$
Si x=1 → $5=-6A_1+0+0$ → $A_1=-5/6$
Si x=-2 → $35=0+15A_2+0$ → $A_2=35/15=7/3$
Si x=3 → $55=0+0+10A_3$ → $A_3=55/10=11/2$

$$\frac{7x^2-3x+1}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\frac{-4/6}{(x-1)}+\frac{7/3}{(x+2)}+\frac{11/2}{(x-3)}$$

b. Alguna o algunas raíces son doble. $Q(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)\ldots(x-a_n)$:
Entonces la fracción algebraica puede ponerse como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a_1)}+\frac{A_1'}{(x-a_1)^2}+\frac{A_2}{(x-a_2)}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a_n)}$$

Ejemplo: $\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2(x-3)}=\frac{A_1}{(x-1)}+\frac{A_1'}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{(x-3)}$

$$\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2(x-3)}=\frac{A_1(x-1)(x-3)+A_1'(x-3)+A_2(x-1)^2}{(x-1)^2(x-3)}$$

$x^2-x+1=A_1(x-1)(x-3)+A_1'(x-3)+A_2(x-1)^2$
Si x=1 → $1=-2A_1'$ → $A_1'=-1/2$
Si x=3 → $7=4A_2$ → $A_2=7/4$
Cualquier valor, x=0 → $1=3A_1-3A_1'+A_2$ → $1=3A_1+3/2+7/4$ → $A_1=-3/4$

$$\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2(x-3)}=-\frac{3/4}{(x-1)}-\frac{1/2}{(x-1)^2}+\frac{7/4}{(x-3)}$$

c. Al descomponer Q(x) tiene polinomios irreducibles de segundo grado sin soluciones, $Q(x)=(x^2+bx+c)\cdot(x-a_1)\ldots\cdot(x-a_n)$

Entonces la fracción algebraica puede ponerse como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{x^2+bx+c}+\frac{A_1}{(x-a_1)}+\frac{A_2}{(x-a_2)}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a_n)}$$

Ejemplo: $\dfrac{-4x^2-10x-13}{(x-1)(x+2)(x^2+x+1)}=\dfrac{A_1}{x-1}+\dfrac{A_2}{x+2}+\dfrac{Mx+N}{x^2+x+1}$

$$\frac{-4x^2-10x-13}{(x-1)(x+2)(x^2+x+1)}=\frac{A_1(x+2)(x^2+x+1)+A_2(x-1)(x^2+x+1)+(Mx+N)(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x^2+x+1)}$$

$$-4x^2-10x-13=A_1(x+2)(x^2+x+1)+A_2(x-1)(x^2+x+1)+(Mx+N)(x-1)(x+2)$$

Si x=1 → $-27=9A_1$ → $A_1=-3$

Si x=-2 → $-9=-9A_2$ → $A_2=1$

Si x=0 → $-13=2A_1-A_2-2N$ → $-13=-6-1-2N$ → $N=3$

Si x=-1 → $-7=A_1-2A_2-2(-M+N)$ → $-7=-3-2-2(-M+3)$ → $M=2$

$$\frac{-4x^2-10x-13}{(x-1)(x+2)(x^2+x+1)}=-\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+2}+\frac{2x+3}{x^2+x+1}$$

b) Grado [P(x)] ≥ grado[Q(x)], dividimos obteniendo: $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$**,**

donde ahora Grado[R(x)]<grado[Q(x)] y estamos en el caso a)

Ejemplo: $\dfrac{x^3-8x+6}{x^2-3x}=\dfrac{x^3-8x+6}{x(x-3)}=(x+3)+\dfrac{x+6}{x(x-3)}=(x+3)-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x-3}$

$$\begin{array}{l|l} x^3-8x+6 & x^2-3x \\ \hline \underline{x+6} & x+3 \end{array}$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicios finales

Factorizar los siguientes polinomios:

a) $x^2-6x-7=(x+1)\cdot(x-7)$
b) $x^2+12x+35=(x+5)\cdot(x+7)$
d) $2x^3+2x^2-24x=2\cdot x\cdot(x-3)\cdot(x+4)$
f) $3x^3-9x^2-30x=3\cdot x\cdot(x+2)\cdot(x-5)$

Comprobar si las siguientes fracciones son equivalentes

Dos métodos, haremos cada apartado por uno.

a) $\dfrac{x-3}{2x-6}$ y $\dfrac{1}{2}$ → si son equivalentes se cumple (x-3)·2=(2x-6)·1 → 2x-6=2x-6. Si son equivalentes

b) $\dfrac{x^2}{x^2+x}$ y $\dfrac{1}{x}$ → factorizamos y simplificamos $\dfrac{x^2}{x\cdot(x+1)}=\dfrac{x}{x+1}$ y $\dfrac{1}{x}$ → No son equivalentes

A partir de los productos notables simplifica

a) $\dfrac{x^2-1}{x+1}=\dfrac{(x-1)\cdot(x+1)}{x+1}=x-1$

e) $\dfrac{x^2-25}{x^2+25-10x}=\dfrac{(x+5)\cdot(x-5)}{(x-5)^2}=\dfrac{x+5}{x-5}$

h) $\dfrac{x^2-1}{x^4-1}=\dfrac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x^2-1)\cdot(x^2+1)}=\dfrac{1}{x^2+1}$

Decir las raíces de los siguientes polinomios

a) $P(x)=(x+5)^2\cdot(2x-3)\cdot x$ → x=0, x=-5(doble) y x=3/2
b) $Q(x)=(x-2)\cdot(x^2+1)$ → x=2
c) $R(x)=3x\cdot(x^2+5)$ → x=0
d) $S(x)=2x^2(x-7)$ → x=0 (doble) y x=7

Opera y simplifica

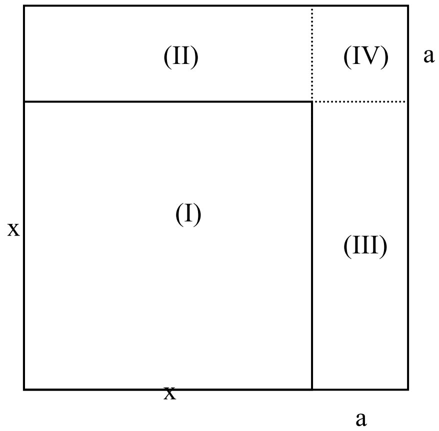
a) $\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{x}{3}\right):\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}\right)=\left(\dfrac{9-x^2}{3x}\right):\left(\dfrac{3+x}{3x}\right)=\dfrac{(9-x^2)\cdot(3x)}{3x\cdot(3+x)}=\dfrac{(3+x)(3-x)}{(3+x)}=3-x$

c) $$\left[\left(x+\frac{1}{x}\right):\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)=\left[\left(\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}\right):\left(\frac{x^2}{x}-\frac{1}{x}\right)\right]\cdot(x-1)=\left[\frac{x^2+1}{x}:\frac{x^2-1}{x}\right]\cdot(x-1)=$$
$$=\left[\frac{(x^2+1)\cdot x}{(x^2-1)\cdot x}\right]\cdot(x-1)=\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]\cdot(x-1)=\frac{(x^2+1)\cdot(x-1)}{x^2-1}=\frac{x^2+1}{x+1}$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

e)
$$\left(\frac{x-1}{x^2}+\frac{3}{x}-\frac{5}{x-4}\right)\cdot 2x^2=\left(\frac{(x-1)\cdot(x-4)}{x^2(x-4)}+\frac{3\cdot x\cdot(x-4)}{x^2(x-4)}-\frac{5x^2}{x^2(x-4)}\right)\cdot 2x^2=$$
$$=\left(\frac{x^2-5x+4+3x^2-12x-5x^2}{x^2(x-4)}\right)\cdot 2x^2=\frac{-x^2-17x+4}{x^2(x-4)}\cdot 2x^2=\frac{-2x^2-34x+8}{x-4}$$

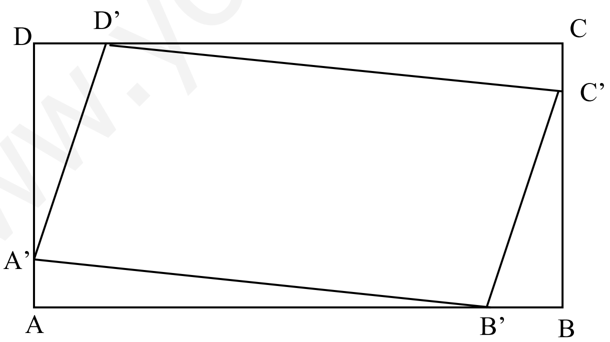
El lado x de un cuadrado aumenta en a cm. Formándose otro cuadrado.
Suma las áreas de los rectángulos y cuadrados de la figura y comprueba que obtienes el área del cuadrado de lado x+a



Área cuadrado (I) = x^2
Área cuadrado (IV)= a^2
Área rectángulo (II)=xa
Área rectángulo (III)=ax

Área total = $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

Calcula el área del cuadrilátero A'B'C'D' mediante un polinomio en x, sabiendo que AB=3cm, BC=5cm y AA'=BB'=CC'=DD'=x



área (A'B'C'D')=area(ABCD)-2·area(BB'C')-2· area(CC'D')=$3\cdot 5-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot(3-x)-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot(5-x)=15-(3x-x^2)-(5x-x^2)=15-8x+2x^2$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Calcula:

a) $\frac{x-2}{x^2}+\frac{x+2}{x^2-x}-\frac{1}{x^2-1}=\frac{(x-2)\cdot(x^2-1)+(x+2)\cdot x(x+1)-x^2}{x^2(x-1)(x+1)}=\frac{2x^3-x^2-x-3}{x^2(x^2-1)}$

b) $\left(1-\frac{x-1}{x}\right)\cdot\frac{x^2}{x+3}-1=\left(\frac{x}{x}-\frac{x-1}{x}\right)\cdot\frac{x^2}{x+3}-1=\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{x+3}-1=\frac{x}{x+3}-1=\frac{x-(x+3)}{x+3}=-\frac{3}{x+3}$

Calcula m para que el polinomio $P(x)=x^3-mx^2+5x-2$ sea divisible por (x+1)

Si es divisible por (x+1) entonces-1 es raíz de P(x) es decir P(-1)=-1-m-5-2=0 → m=-8

Calcular el valor de K si el resto de la división de $(2x^4+kx^3-7x+6):(x-2)$ es -8

Resto=P(2)=32+8k-14+6=-8 → 8k=-32 k=-4

Escribir los polinomios de segundo grado con siguientes raíces

a) 5 y -5 → $P(x)=(x-5)\cdot(x+5)=x^2-25$

b) 0 y 4 → $P(x)=x\cdot(x-4)=x^2-4x$

c) 2 y 3 → $P(x)=(x-2)\cdot(x-3)=x^2-5x+6$

d) -6 y 1 → $P(x)=(x+6)\cdot(x-1)=x^2+5x-6$

Escribir polinomio de segundo grado cuya única raíz sea 3

$P(x)=(x-3)^2$

Escribir polinomio de segundo grado sin raíces

$P(x)=x^2+2x+7$

Inventa dos polinomios P(x) y Q(x) tal que $mcm(P(x),Q(x))=x^2(x-3)(x+2)$

$P(x)=x\cdot(x-3)$, $Q(x)=x^2\cdot(x-2)$

Inventa dos polinomios P(x) y Q(x) tal que $mcd(P(x),Q(x))=x^2-4$

$P(x)=(x^2-4)\cdot x$; $Q(x)=(x^2-4)\cdot(x+1)$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Tema 3. Ecuaciones e inecuaciones. Sistemas de ecuaciones y de inecuaciones

1. Ecuaciones de segundo grado. Resolución

Las ecuaciones de segundo grado con una incógnita (la x) es la que se puede transformar en una ecuación del tipo.

$ax^2+bx+c=0$ (siendo $a\neq 0$)

1.1. Resolución por el método general

La ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ tiene como solución o raíces las que resultan de la siguiente expresión, sustituyendo, a, b y c:

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, la expresión $\Delta=b^2-4ac$ es el discriminate y el que marca el número de soluciones:

a. Si el discriminate es negativo ($\Delta<0$) no tiene soluciones reales (raíz negativa)
b. Si el discriminate es cero ($\Delta=0$) una única solución (raíz doble)
c. Si el discriminate es positivo ($\Delta>0$) dos soluciones distintas (2 raíces simples)

Demostración:

$$ax^2+bx+c=0 \rightarrow a(x+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a}=0 \rightarrow a(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a}-c \rightarrow (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \rightarrow$$

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \rightarrow (x+\frac{b}{2a})=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \rightarrow (x+\frac{b}{2a})=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

1.2. Resolución de la ecuaciones de segundo grado incompletas

Una ecuación es incompleta si alguno de los coeficientes b, c, o los dos son nulos. Estas ecuaciones aunque se pueden resolver por el método general se resuelven de forma más sencilla. Tres casos:

a. El término $b=0 \rightarrow ax^2+c=0$, despejando la incógnita: $x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$
b. El término $c=0 \rightarrow ax^2+bx=0$, factor común: $x(ax+b)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-b/a \end{cases}$
c. Los dos son cero $\rightarrow ax^2=0$, la solución es $x=0$ (raíz doble)

Ejercicio, resolver:

a) $x^2-6\sqrt{2}x+18=0 \rightarrow$ $x=\frac{6\sqrt{2}\pm\sqrt{72-72}}{2}=3\sqrt{2}$

b) $2x^2-7x+3=0 \rightarrow$ $x=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\begin{cases} 3 \\ 1/2 \end{cases}$

c) $\frac{x+7}{x+3}+\frac{x^2-3x+6}{x^2+2x-3}=1 \rightarrow \frac{x+7}{x+3}+\frac{x^2-3x+6}{(x+3)(x-1)}=1$

(x+7)·(x-1)+(x^2-3x+6)=(x^2+2x-3)→ x^2+x+2=0 →

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2}=no\ solución$

d) $\frac{x+1}{x+5}+\frac{1-x}{x-4}=\frac{5}{2}$ →2(x+1)(x-4)+2(1-x)(x+5)=5(x+5)(x-4)→ 5x^2+19x-102=0

$$x=\frac{-19\pm\sqrt{361+2040}}{10}=\frac{-19\pm 49}{10}=\left\langle \begin{array}{l} 3 \\ \frac{-34}{5} \end{array}\right.$$

e) **(x-√3)^2-1+x=x** → x^2-2√3x+3-1=0 → $x=\frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{12-8}}{2}=\left\langle \begin{array}{l} \sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3}-1 \end{array}\right.$

f) **1+(x-2)^2=1** → (x-2)^2=0 → x=2

g) **9x^2-25=0** → x^2=25/9 → $x=\pm\sqrt{\frac{25}{9}}=\pm\frac{5}{3}$

h) **x^2-2x=0** → x(x-2)=0 → x=0, x=2

2. Ecuaciones de grado superior (polinómicas)

Podemos resolver ecuaciones de grado superior (P(x)=0, con P(x) polinomio) transformándolas en producto de ecuaciones de primer o segundo grado igualadas a cero, es decir factorizando. Así las raíces serán las soluciones de la ecuación.

Ejemplo:

x^5-3x^4-8x^3+12x^2+16x=0 →x·(x-4)·(x+2)·(x-2)·(x+1)=0→x=0, x=-2, x=2, x=-1, x=4

Ejercicio:

a) **(x+π)·(x-1/2)·(3x-7)=0** → soluciones x=-π, x=1/2, x=7/3

b) **x^2·(x-√2)·(5x+1)=0** → soluciones x=0, x=√2, x=-1/5

c) **4x^5+20x^4-53x^3+23x^2+13x-7=0** →soluciones x=1 (doble), x=-7, x=1/2, x=-1/2

Existen ecuaciones polinómicas de grado 4 que se pueden transformar en ecuaciones de segundo grado, son las ***ecuaciones bicuadradas:*** **ax^4+bx^2+c=0**

Se resuelven en tres pasos:

1. haciendo el cambio x^2=t, x^4=t^2 con lo que se transforma en la ecuación de segundo grado con incógnita en t (at^2+bt+c=0).
2. Resolvemos la ecuación de segundo grado.
3. Deshacemos el cambio de variable x=$\pm\sqrt{t}$ (solución si t≥0)

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejemplo: $x^4-5x^2+4=0$

Paso1: $x^2=t \rightarrow t^2-5t+4=0$

Paso2: $t=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\dfrac{5\pm 3}{2}=\left\langle\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right.$

Paso3 : $x=2,-2,1,-1$

Ejercicio : resolver las siguientes ecuaciones

a) $\mathbf{x^4-x^2-6=0}$ → solución : x= $\pm\sqrt{3}$
b) $\mathbf{x^4-3x^2+2=0}$ → solución x=$\pm\sqrt{2},\pm 1$
c) $\mathbf{-x^4-4x^2-45=0}$ → No soluciones reales

Otras ecuaciones transformables en ecuaciones de segundo grado: $ax^{2n}+bx^n+c=0$, con $n\in N$, haciendo el cambio $x^n=t$ obtenemos una ecuación de segundo grado.

Ejemplo: $x^6-5x^3+6=0$

Paso 1: $x^3=t$, $x^6=t^2 \rightarrow t^2-5t-6=0$

Paso 2: t=3, t=2

Paso 3: $x=\sqrt[3]{3}$, $x=\sqrt[3]{2}$

3. Ecuaciones irracionales o con radicales

Una ecuación es irracional si tiene la incógnita (x) dentro de una o varias raíces, en este año sólo veremos irracionales con raíces cuadradas.

Resolución ecuaciones irracionales:

1. Se aísla un radical en un miembro de la ecuación.
2. Se eleva al cuadrado los miembros de la ecuación, eliminándose la raíz aislada.
3. Si todavía hay raíz se repite los procesos 1 y 2 hasta que ya no haya.
4. Se resuelve la ecuación resultante (polinómica)
5. Se comprueban las soluciones

Nota: la razón de comprobar es que al elevar al cuadrado pueda haber soluciones no válidas debido a que al elevar al cuadrado el signo se pierde, así $1\neq-1$ pero $(1)^2=(-1)^2$

Ejemplos

1)

$\sqrt{3x+4}-4=-2x$

$\sqrt{3x+4}=4-2x \xrightarrow{elev\,cuadrado} 3x+4=(4-2x)^2 \rightarrow$

$3x+4=16+4x^2-16x \rightarrow 4x^2-19x+12=0 \quad x=\begin{cases}4\\ 3/4\end{cases}$

Comprobación:

x=4 → $\sqrt{16}-4\neq-8$ (no solución)

x= $3/4$ → $\sqrt{\frac{25}{4}}-4=\frac{5}{2}-4=-\frac{3}{2}=-2\cdot\frac{3}{4}$ (solución)

2)

$\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+5}=0$

$\sqrt{x^2+3x-1}=\sqrt{x^2+5} \xrightarrow{elv\,cuadrado} x^2+3x-1=x^2+5 \rightarrow 3x=6 \rightarrow x=2$

Comprobación:

x=2→ $\sqrt{2^2+3\cdot2-1}-\sqrt{2^2+5}=\sqrt{9}-\sqrt{9}=0$ solución.

3)

$\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$

$\sqrt{x+5}=7-\sqrt{2x+8} \xrightarrow{elev\,cuadr} x+5=49+2x+8-14\sqrt{2x+8}$

$14\sqrt{2x+8}=x+52 \xrightarrow{elev\,cuadr} 196(2x+8)=x^2+104x+2704 \rightarrow x^2-288x+1136=0$

$x=284, x=4$

Comprobación:

x=284 → $\sqrt{289}+\sqrt{576}=17+24\neq7$ No solución

x=4 → $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$ Solución

Ejercicio, resolver:

a) $4x+2\sqrt{x+4}=4$ → $2\sqrt{x+4}=4-4x$ → $\left(2\sqrt{x+4}\right)^2=(4-4x)^2$ →

4(x+4)=16x^2-32x+16 → 16x^2-36x=0 → 4x(4x-9)=0 x= $\begin{cases}0\\ 9/4\end{cases}$

Comprobación:

x=0 → $0+2\cdot\sqrt{0+4}=4$ Solución

x= $9/4$ → $4\cdot\frac{9}{4}+2\sqrt{\frac{9}{4}+4}=9+2\cdot\frac{5}{2}\neq4$ No solución

b) $x^2+\sqrt{4x^2-3}=0$ → $x^2=-\sqrt{4x^2-3}\xrightarrow{elev} x^4=4x^2-3\rightarrow x^4-4x^2+3=0$

x^2=t, x^4=t^2 → t^2-4t+3=0 → t=$\begin{cases}3\\1\end{cases}$ x=$\begin{cases}\pm\sqrt{3}\\ \pm 1\end{cases}$

Comprobación*:*

x=1 → $1^2+\sqrt{4\cdot 1^2-3}=2\neq 0$ No solución

x=-1 → $(-1)^2+\sqrt{4\cdot(-1)^2-3}=2\neq 0$ No solución

x=$\sqrt{3}$ → $\left(\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{4\left(\sqrt{3}\right)^2-3}=6\neq 0$ No solución

x=$-\sqrt{3}$ → $\left(-\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{4\left(-\sqrt{3}\right)^2-3}=6\neq 0$ No solución

d) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x-1}=2$

$\sqrt{2x+5}=\sqrt{x-1}+2\xrightarrow{al\ cuadr} 2x+5=x-1+4+4\sqrt{x-1}\rightarrow$

$x+2=4\sqrt{x-1}\xrightarrow{al\ cuadr} x^2+4x+4=16(x-1)\rightarrow x^2-12x+20=0$

$x=10,\ x=2$

Comprobación:

x=10 → $\sqrt{25}-\sqrt{9}=5-3=2$ solución

x=2 → $\sqrt{9}-\sqrt{1}=3-1=2$ solución

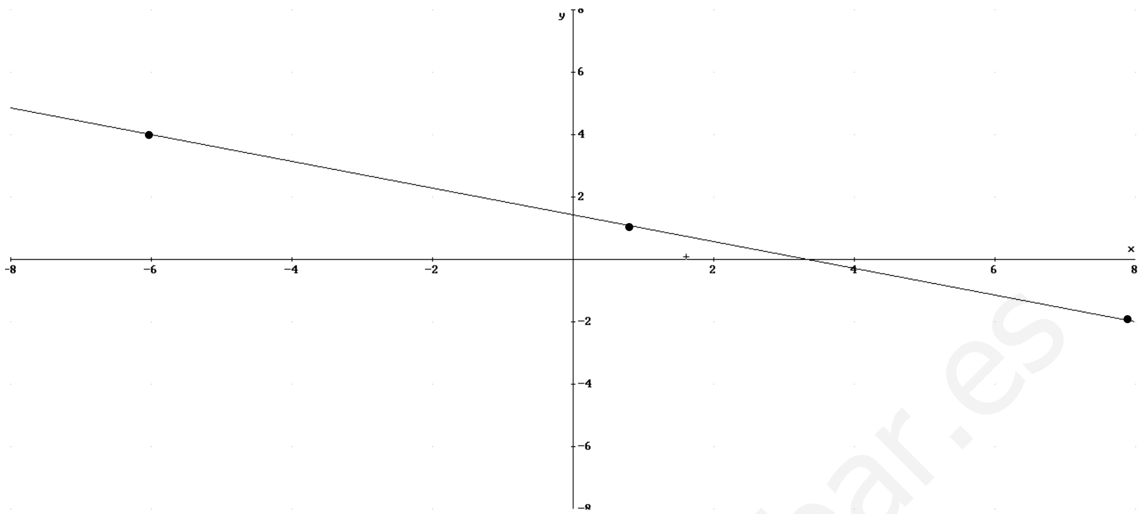
4. Ecuaciones lineales con dos incógnitas

Las ecuaciones lineales con dos incógnitas son de la forma **ax+by=c**, se caracterizan por tener infinitas soluciones para las dos variables (x,y) situadas sobre una recta.

Ejemplo: **3x+7y=10,** despejamos una variable (cualquiera de las dos) $x=\dfrac{10-7y}{3}$, damos valores a la variable no despejada y obtendremos valores de la despejada. Como es una recta si lo hacemos correctamente con dos valores sería suficiente, ya que por dos puntos pasa una única recta.

x	y
1	1
-6	4
8	-2

Representamos las soluciones:



Ejercicio: representa las soluciones de las siguientes ecuaciones

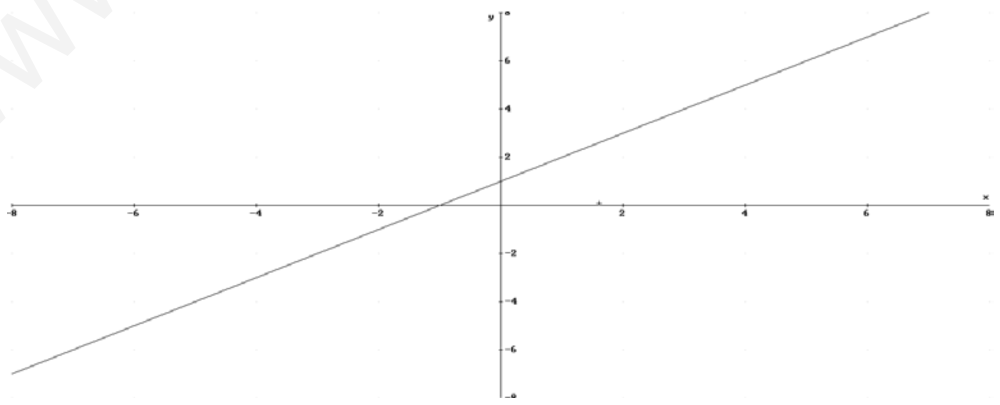
a) **$-x+y=1$**

b) **$\sqrt{3}x+5y=\sqrt{3}$**

c) **$-7x+3y=-5$**

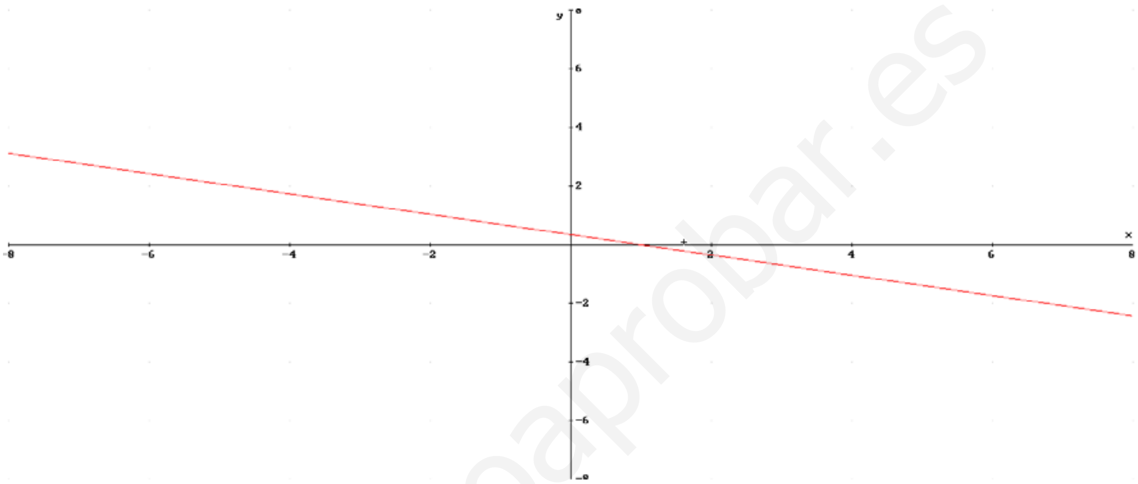
a) $-x+y=1 \rightarrow y=1+x$

x	y
1	2
0	1
-1	0



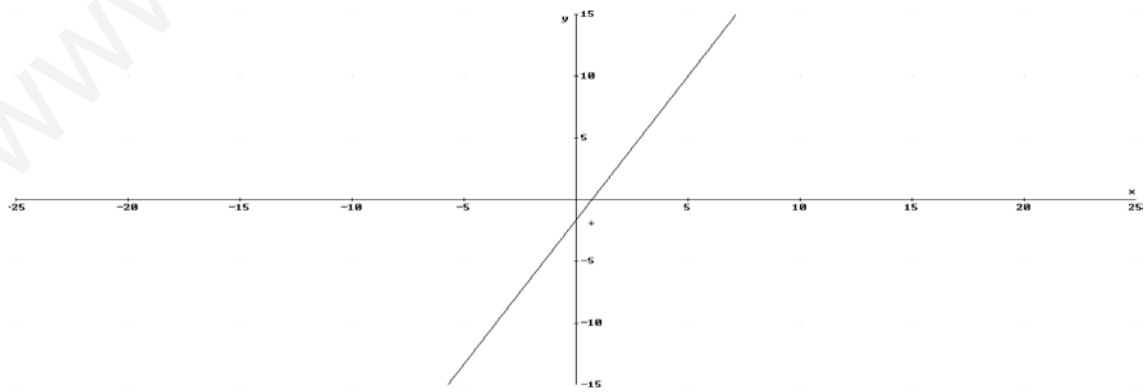
b) $\sqrt{3}x+5y=\sqrt{3} \rightarrow y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3}x}{5}$

x	y
1	0
2	$-\sqrt{3}/5 \approx -0{,}35$



c) $-7x+3y=-5 \rightarrow y=\dfrac{-5+7x}{3}$

x	y
2	3
-1	-4
5	10



5. Sistemas de 2 ecuaciones.

5.1 Sistemas lineales

Los sistemas con dos ecuaciones lineales son de la forma:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ ax+by=c \\ (2)\ a'x+b'y=c'\end{array}\right\}$$

Las soluciones al sistema serán las soluciones comunes a la ecuación lineal con dos incógnitas de la ecuación primera (S_1) y las soluciones de la segunda ecuación (S_2). De esta forma si llamamos S a las soluciones del sistema, estas serán igual a

$$S=S_1 \cap S_2$$

Según el número de soluciones se puede distinguir entre los siguientes tipos de sistemas:

1. Sistema compatible indeterminado, infinitas soluciones

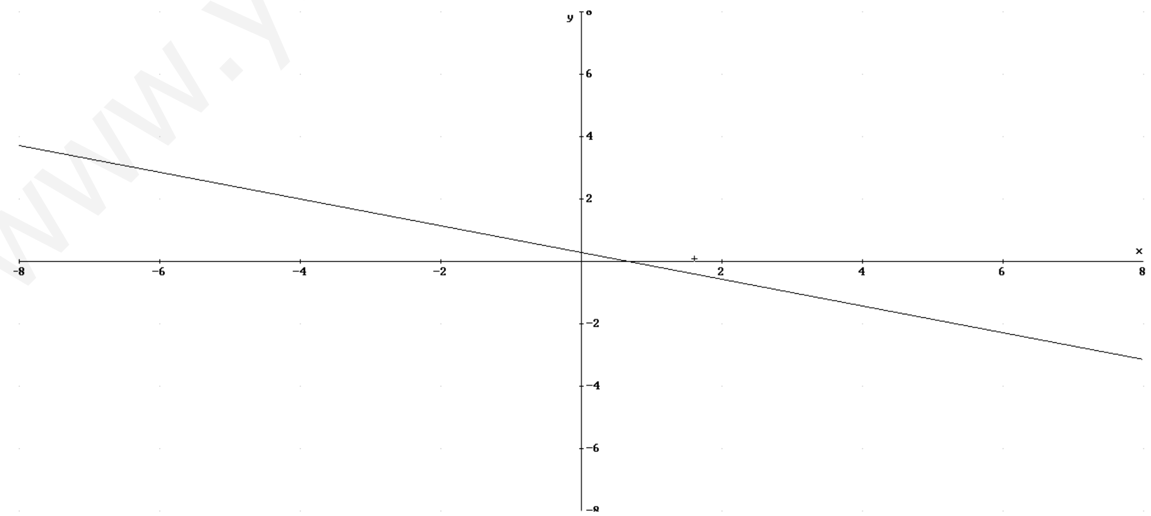
Ocurre cuando la ecuación (1) es equivalente a la (2), se cumple entonces:

$$\boxed{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}}$$

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l}(1)\ 3x+7y=2 \\ (2)\ -6x-14y=-4\end{array}\right\}(2)\equiv(1)\rightarrow \frac{3}{-6}=\frac{7}{-14}=\frac{2}{-4}$

Si representamos las dos ecuaciones se trata de dos rectas iguales, por tanto las soluciones son todos los puntos situados en la recta que viene determinada por la ecuación (1) o (2).

Ejemplo: en el ejemplo anterior las soluciones son:



2. *Sistema incompatible, no tiene soluciones*

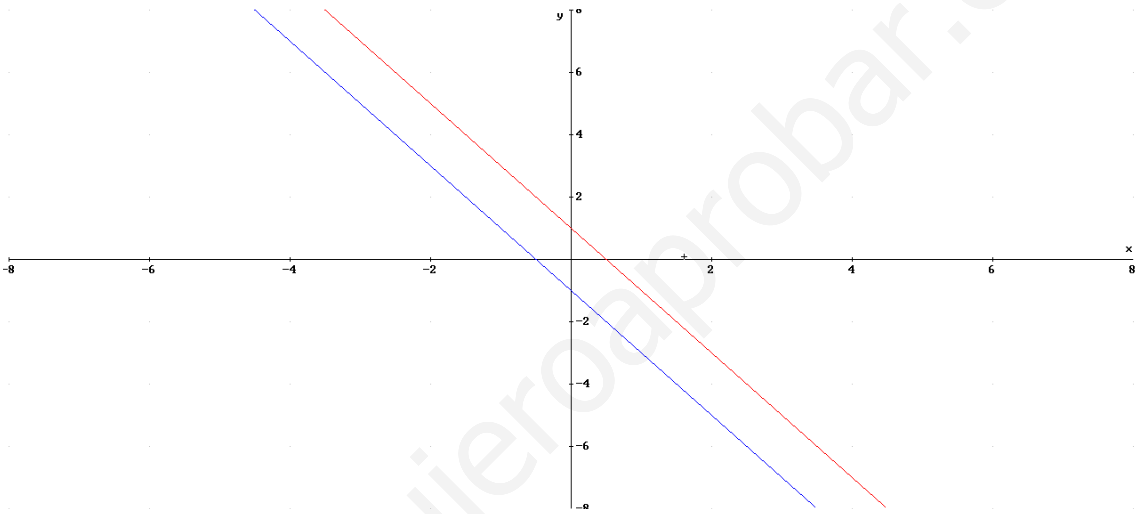
Ocurre cuando las dos ecuaciones son incompatibles, es decir tienen ninguna solución en común. Ocurre cuando la relación entre sus coeficientes son los siguientes:

$$\boxed{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}}$$

No tiene soluciones, al tratarse de dos rectas paralelas. Veamos un ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ 2x+y=1\\(2)\ 4x+2y=-2\end{array}\right\}\rightarrow\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\neq\frac{1}{-2}.$$

Interpretación gráfica:



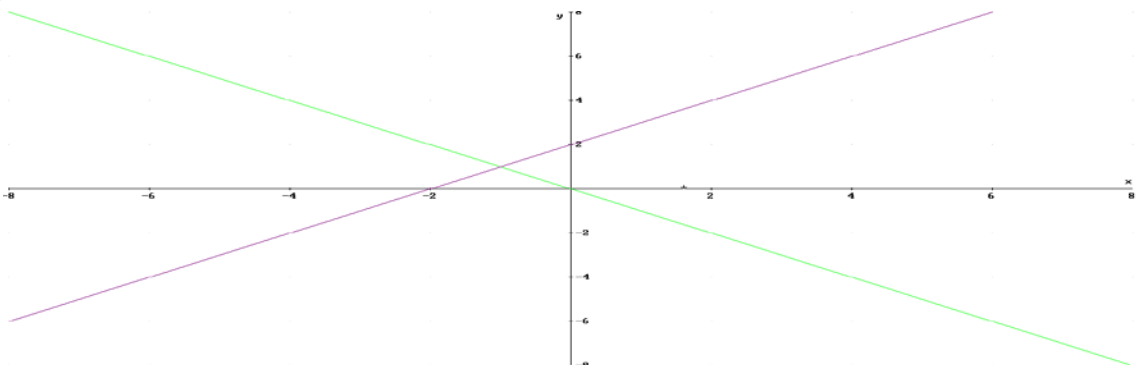
3. *Compatible determinado, una única solución.*

Ocurre cuando tienen una única solución. Gráficamente ocurre cuando las dos rectas se cortan en un único punto que será la solución a las dos ecuaciones. Ocurre si la relación entre los coeficientes:

$$\boxed{\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x+y=0\\(2)\ -x+y=2\end{array}\right\}\frac{1}{-1}\neq\frac{1}{1}\rightarrow comp\ \det$$



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales

Resolver un sistema es hallar sus soluciones, según el tipo de sistema tendremos:

1. **Compatibles indeterminados:** la solución es la de una de las dos ecuaciones, que resolvemos como hemos visto en el apartado anterior representando una recta.
2. **Incompatibles:** no tienen solución, por lo que no tendremos que resolverlas
3. **Compatibles determinados:** tiene una única solución que resolvemos por uno de los tres métodos vistos en el curso anterior. Veamos un ejemplo y resolvámoslo por los tres métodos:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\, x+y=1\\(2)\, x-y=0\end{array}\right\}$$

a) Sustitución: igualamos una incógnita en una ecuación y la introducimos en la otra ecuación, obteniendo una ecuación de primer grado con una incógnita:

y=1-x → x-(1-x) =0; 2x=1; x=1/2; y=1-1/2=1/2 → **solución; x=1/2, y=1/2**

b) Igualación: consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones para luego igualarlas entre si y obtener una ecuación con una incógnita:

y=1-x; y=x → 1-x=x; 2x=1→ **solución x=1/2; y=1/2**

c) Reducción: consiste en sumando o restando las ecuaciones multiplicadas por factores se anula alguna incógnita, la x o la y. Así obtenemos una ecuación de primer grado con una incógnita:

(1)+(2) → 2x=1, x=1/2, y=1-1/2=1/2 → **solución x=1/2; y=1/2**

Ejercicio: resuelve, clasifica y interpreta gráficamente las soluciones de los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l}(1)\, 3x-2y=1\\(2)\, 6x-4y=2\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l}(1)\;\; 4x-y=5\\(2)\, -8x+2y=3\end{array}\right\}$

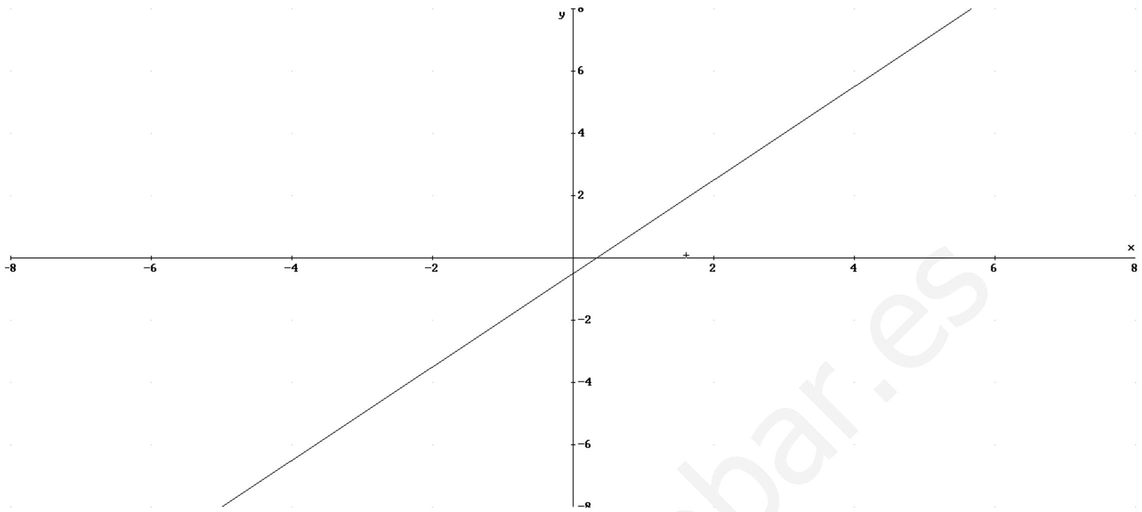
c) $\left.\begin{array}{l}(1)\;\; x-3y=2\\(2)\;\; 2x+y=4\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l}(1)\, -18x+6=6y\\(2)\, y+3x+5=6\end{array}\right\}$

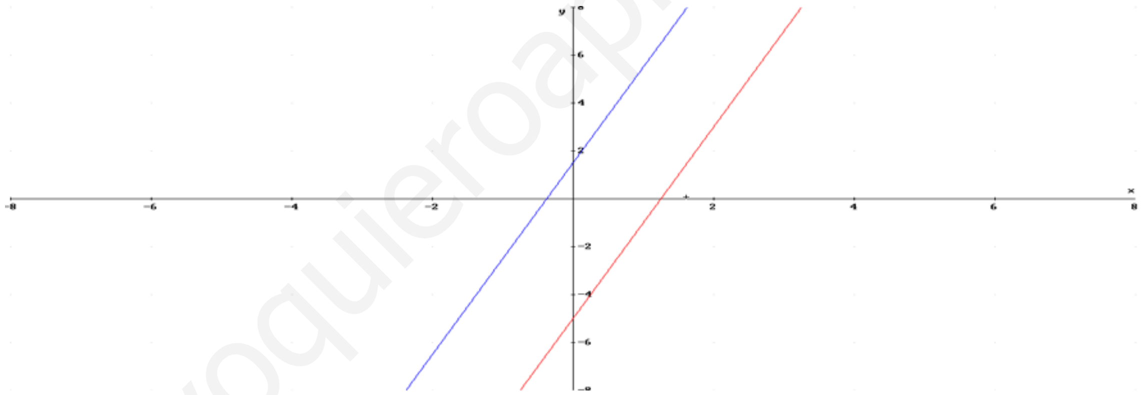
e) $\left.\begin{array}{l}(1)\;\; \dfrac{x}{3}-2y=\dfrac{3}{4}\\(2)\;\; 5x+y=0\end{array}\right\}$

Soluciones:

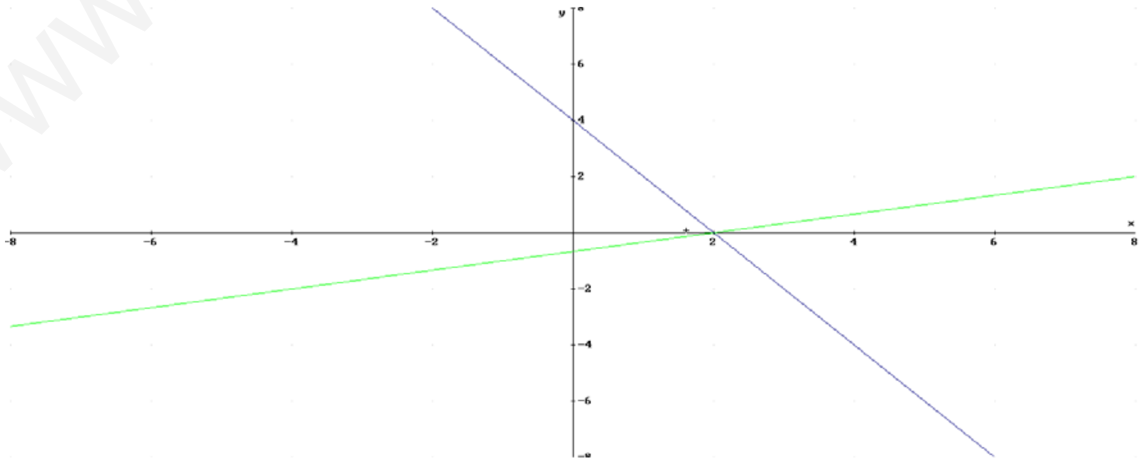
a) $\frac{3}{6}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$ Compatible indeterminado → $x=\frac{1+2y}{3}$



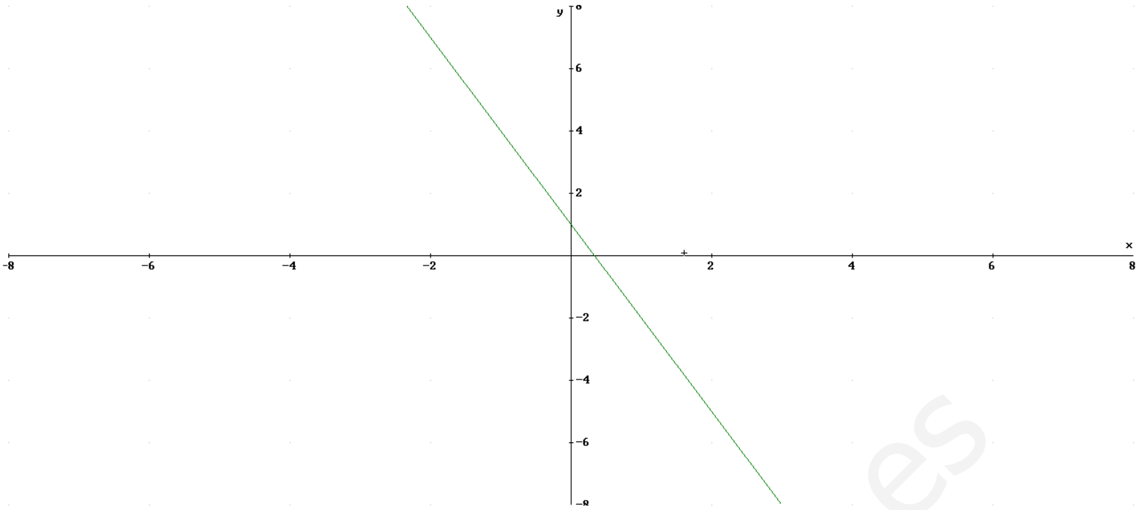
b) $\frac{4}{-8}=\frac{-1}{2}\neq\frac{5}{3}$. Incompatible, no solución



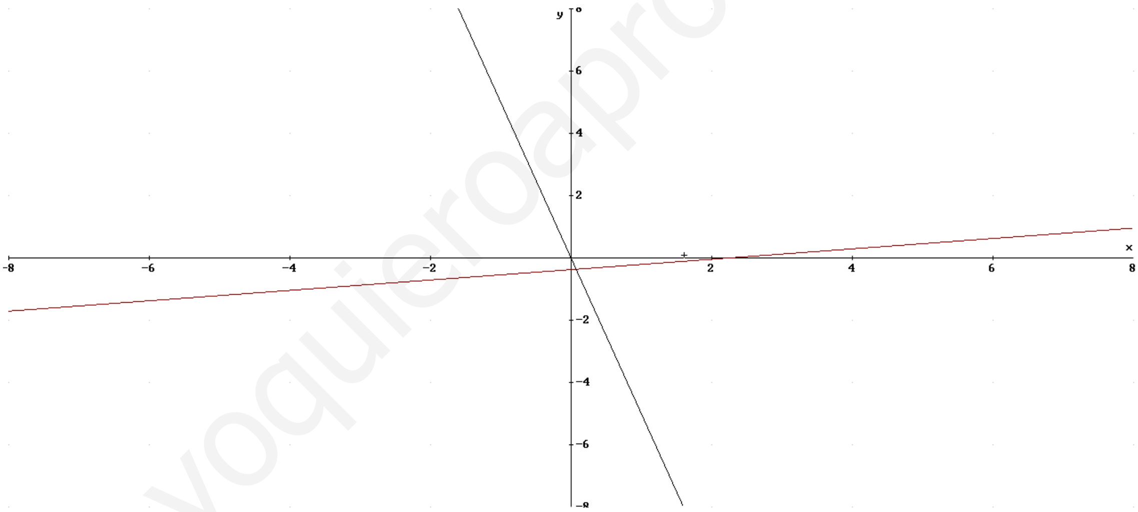
c) $\frac{1}{2}\neq\frac{-3}{1}$. Compatible determinado, una solución. **x=2, y=0**



d) $\frac{-18}{3}=\frac{-6}{1}=\frac{-6}{1}$ → Compatible indeterminado. Infinitas soluciones.



e) $\left.\begin{array}{l}(1)\ \dfrac{x}{3}-2y=\dfrac{3}{4}\\ (2)\ 5x+y=0\end{array}\right\}=\left.\begin{array}{l}(1)\ \ 4x-24y=9\\ (2)\ \ 5x+y=0\end{array}\right\}\ \dfrac{4}{5}\neq\dfrac{-24}{1}$ → compatible determinado, una solución → Solución x=9/124, y=-45/124



5.2 Sistemas no lineales

Estos sistemas son aquellos donde una o varias ecuaciones no son lineales, es decir aparecen términos cuadráticos, cúbico, etc. En este tema trataremos sólo cuando tenemos exponentes cuadráticos. Generalmente se resuelve por sustitución. Veamos tres ejemplos:

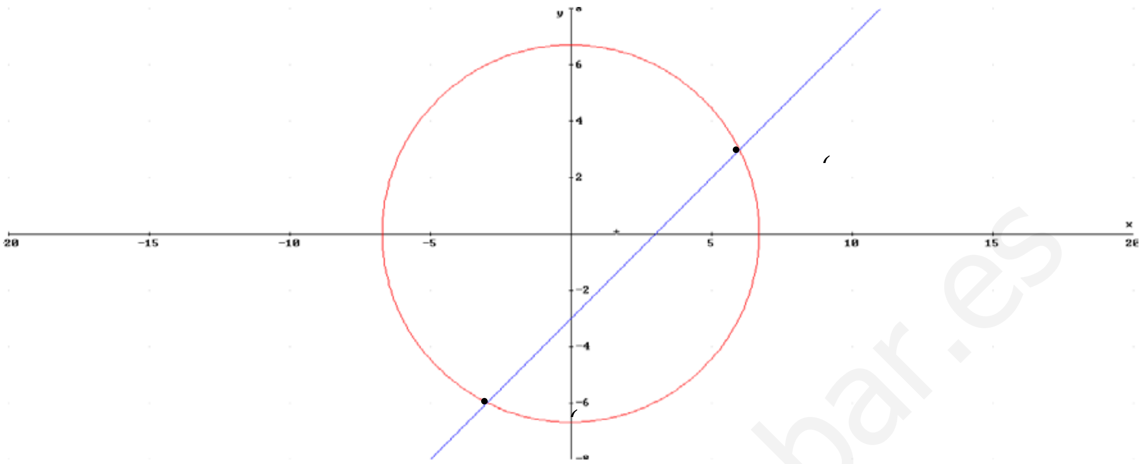
Ejemplo 1:

$\left.\begin{array}{l}(1)\ x-y=3\\ (2)\ x^2+y^2=45\end{array}\right\}$ → x=3+y , sustituyendo en (2) $(3+y)^2+y^2=45$; $2y^2+6y-36=0$

$$y=\frac{-6\pm\sqrt{36+288}}{4}=\frac{-6\pm 18}{4}=\left\langle\begin{array}{l}-6\rightarrow x=3-6=-3\\ \\ 3\rightarrow x=3+3=6\end{array}\right.$$

Dos soluciones (x=-3, y=-6); (x=6, y=3)

Para interpretar gráficamente la solución tendremos que saber que la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio R es de la forma $x^2+y^2=R^2$. De esta forma la ecuación $x^2+y^2=45$, es una ecuación de una circunferencia de radio $R=\sqrt{45}$



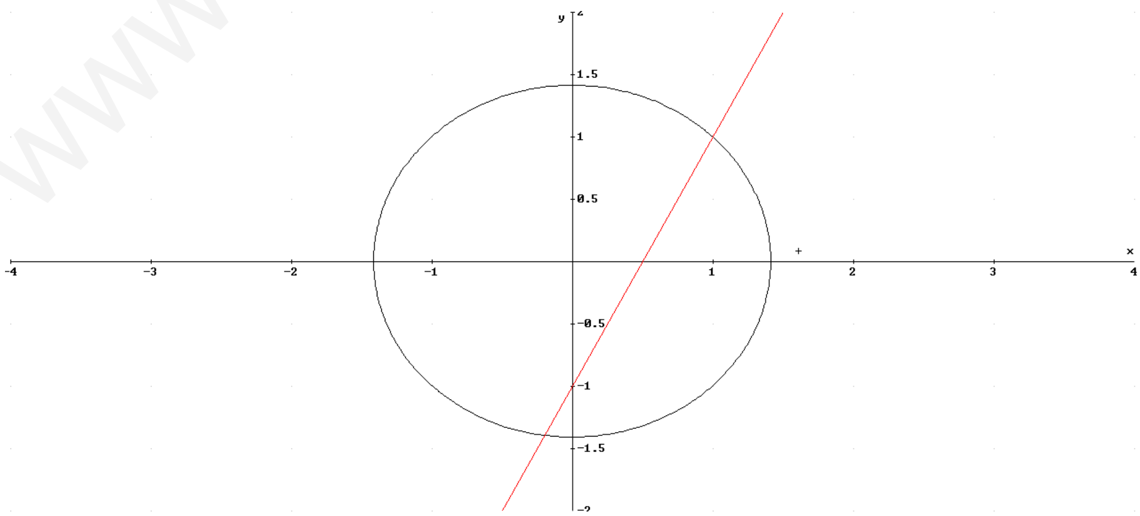
Ejemplo 2:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ y-x=-1+x\\(2)\ x^2+y^2=2\end{array}\right\} \rightarrow y=-1+2x \rightarrow x^2+(2x-1)^2=2;\ \ x^2+4x^2-4x+1-2=0$$

$$5x^2-4x-1=0 \rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{10}=\frac{4\pm 6}{10}=\left\langle\begin{array}{l}1\rightarrow y=-1+2=1\\ \\ {}^{-1}\!/_{5}\rightarrow x=-1-{}^{2}\!/_{5}={}^{-7}\!/_{5}\end{array}\right.$$

Soluciones (x=1, y=1); (x= ${}^{-1}\!/_{5}$, y= ${}^{-7}\!/_{5}$)

Interpretación gráfica (circunferencia de radio $\sqrt{2}$ y recta)



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

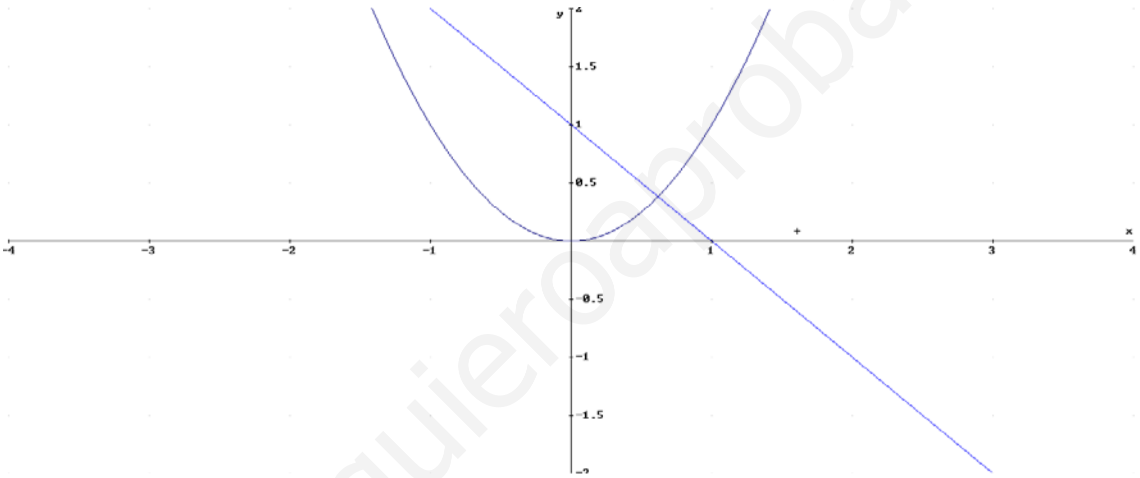
Ejemplo 3:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \ y=x^2\\(2)\ \ \ y+x=1\end{array}\right\} \rightarrow \quad y=1\text{-}x \quad \rightarrow \quad 1\text{-}x=x^2 \quad \rightarrow \quad x^2+x\text{-}1=0 \quad \rightarrow$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\rightarrow y=1-\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\\[2ex]\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\rightarrow x=1-\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Soluciones ($x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $y=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$) ($x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $y=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$)

Interpretación gráfica ($y=x^2$ es una parábola, $y+x=1$ una recta)



6. Sistemas de ecuaciones lineales generales

Hasta este curso sólo considerábamos sistemas con 2 ecuaciones y 2 incógnitas, en este curso veremos el caso general con un número n de incógnitas y m de ecuaciones. Para resolver utilizaremos el método de Gauss.

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es de la forma:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \ a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\(2)\ \ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\(m)\, a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{array}\right\}$$

- Donde las incógnitas son $x_1,x_2,\ldots,x_n$
- Los coeficientes son a_{ij}
- Los términos independientes son $b_1,b_2,\ldots,b_m$

Ejemplo: 4 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} (1) \quad x+2y-3z=3 \\ (2) -2x+y+z=5 \\ (3) \quad x+y+z=4 \\ (4) -2x+3y-z=9 \end{array}\right\}$$

- Incógnitas: x,y,z,t
- Matriz de coeficientes: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
- Columna de términos independientes: $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$
- Matriz ampliada $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 9 \end{array}\right)$

Las soluciones del sistema serán los valores de las incógnitas que cumplan las m ecuaciones.

En función el número de soluciones puede ocurrir que sea:

a) Compatibles determinados: tiene solución única
b) Compatibles indeterminadas: tiene infinitas soluciones
c) Incompatibles: no tiene solución

6.1 Sistemas equivalentes.

Dos sistemas equivalentes son los que tienen mismas soluciones aunque no tengan mismo número de ecuaciones.

Para transformar un sistema en otro equivalente podemos realizar los siguientes criterios:

1) Criterio 1: Multiplicamos o dividimos los miembros de cualquier ecuación por un número distinto de cero.
2) Criterio 2: Sustituimos una ecuación por la suma de ella con una combinación lineal de otras del sistema.
3) Citerio3: Eliminamos las ecuaciones que son combinación lineal de alguna de las otras ecuaciones.

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejemplos:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x+y+z=3\\(2)\ 2x-4y+2z=2\\(3)\ x-z=3\end{array}\right\}\xrightarrow{EQUI}\left.\begin{array}{ll}(1')=2(1) & 2x+2y+2z=6\\(2')=3(2) & 6x-12y+6z=6\\(3')=(3) & x-z=3\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x+y+z=3\\(2)\ 2x-4y+2z=2\\(3)\ x-z=3\end{array}\right\}\xrightarrow{EQUI}\left.\begin{array}{ll}(1')=(1) & x+y+z=3\\(2')=(2)-2(1) & -6y=-4\\(3')=(3) & x-z=3\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x+y+z=3\\(2)\ x-y+z=2\\(3)\ 2x+2z=5\end{array}\right\}\xrightarrow{EQUI\ \ PUES\ \ (3)=(1)+(2)}\left.\begin{array}{l}(1)\ x+y+z=3\\(2)\ x-y+z=2\end{array}\right\}$$

6.3 Resolución por el método Gauss

El método de Gauss generaliza el método de la reducción, que es útil para 2 ecuaciones, pero para más utilizaremos el citado método. Por sencillez utilizaremos la matriz ampliada, que recordemos que son los coeficientes de las ecuaciones y los términos independientes.

En este curso trabajaremos con sistemas con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas (n). El objetivo es buscar una matriz triangular superior de la forma:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} & & b_1\\ 0 & a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} & & b_2\\ 0 & 0 & a_{31} & .. & a_{3n} & & b_3\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} & & b_n \end{array}\right)$$

Las transformaciones que realizaremos para obtener esta matriz son las siguientes:

- Cambiar el orden de las filas, que no consiste más que ordenar las ecuaciones del sistema
- Cambiamos el orden de las columnas, que consiste en reordenar las incógnitas, debemos recordar este cambio cuando resolvamos el sistema
- Cambiamos una fila por una combinación lineal de ella con otra ecuación.

Cuando utilicemos el método de Gauss puede ocurrir tres cosas:

1. Que la última fila de la matriz sea (0 0 0 … 0 | b_n) con $b_n \neq 0$ lo que entonces el sistema será **incompatible** ($0x+0y+\dots+0=b_n\neq 0$ es imposible)
2. Que la última fila sea (0 0 0 … 0 |0) o eliminamos una fila (al ser dosiguales) y entonces sobra la ecuación, y será sistema **compatible indeterminado**
3. Que la última fila sea (0 0 … a_{nn}| b_n) con $a_{nn}\neq 0$ con lo que el sistema es entonces **compatible determinado**

Ejemplos:

a)
$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y+z-t=1 \\ 2x-y+3z=2 \\ x+y+z+t=2 \\ -2x-y+z+3t=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} f_3 \\ \\ f_1 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} f_1 \\ f_2-2f_1 \\ f_3-2f_1 \\ f_4+2f_1 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & .1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3-f_2 \\ f_4-3f_2 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & .0 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 11 \end{array}\right) \rightarrow$$

$C_2 \leftrightarrow C_3$

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ 4f_4+10f_1 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & .0 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 34 & 34 \end{array}\right)$$

Es compatible determinado. Recordemos que hemos cambiado el orden de las columnas 2 y 3, es decir el orden de la incógnitas es x,z,y,t.

$$\left.\begin{array}{r} x+z+y+t=2 \\ z-3y-2t=-2 \\ -4y-t=-1 \\ 34t=34 \end{array}\right\} \rightarrow \text{t=1, y=0, z=0, x=1}$$

b)
$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z+t=3 \\ 2x+3y-z-t=0 \\ x-z+t=2 \\ 2x+2y-2z+2t=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} f_1\\ f_2\\ f_3\\ f_4\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&-1&1&3\\ 2&3&-1&-1&0\\ 1&0&-1&1&2\\ 2&2&-2&2&5\end{array}\right)\rightarrow \begin{array}{c} f_1\\ f_2-2f_1\\ f_3-f_1\\ f_4-2f_1\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&-1&1&3\\ 0&-1&1&-3&-6\\ 0&-2&0&0&-1\\ 0&-2&0&0&-1\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\begin{array}{c} f_1\\ f_2\\ f_3-2f_2\\ f_4-f_2\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&-1&1&3\\ 0&-1&1&-3&-6\\ 0&0&-2&6&11\\ 0&0&-2&6&11\end{array}\right)\rightarrow \begin{array}{c} f_1\\ f_2\\ f_3\\ f_4-f_3\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&-1&1&3\\ 0&-1&1&-3&-6\\ 0&0&-2&6&11\\ 0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

Es compatible indeterminado (infinitas soluciones), dejaremos como parámetro libre la incógnita t:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z+t=3\\ -y+z-3t=-6\\ -2z+6t=11\end{array}\right\}$$

-2z+6t=11 → $z=\dfrac{-11+6t}{2}=3t-\dfrac{11}{2}$

-y+ $3t-\dfrac{11}{2}$-3t=-6 → $y=\dfrac{1}{2}$

x+2·1/2+ $3t-\dfrac{11}{2}$+t=3 → $x=\dfrac{-7}{2}-4t$

Para cada valor de t tendremos una solución.

c) $\left.\begin{array}{r} x-2y+z=10\\ 2x-y-2z=0\\ 3x-3y-z=3\end{array}\right\}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-2&1&10\\ 2&-1&-2&0\\ 3&-3&-1&3\end{array}\right)$

$$\begin{array}{c} f_1\\ f_2\\ f_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-2&1&10\\ 2&-1&-2&0\\ 3&-3&-1&3\end{array}\right)\rightarrow \begin{array}{c} f_1\\ f_2-2f_1\\ f_3-3f_1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-2&1&10\\ 0&3&-4&-20\\ 0&3&-4&-27\end{array}\right)\rightarrow \begin{array}{c} f_1\\ f_2\\ f_3-f_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-2&1&10\\ 0&3&-4&-20\\ 0&0&0&-7\end{array}\right)$$

Sistema incompatible (0x+0y+0z=-7 es imposible)

Ejercicios, resolver:

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=1\\ 2x+y+2z=7\\ -3x+2y+z=1\end{array}\right\}$ → C.D. solución x=1, y=1, z=2

b) $\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=0 \\ x-y+2z-3t=1 \\ y+z-2t=2 \\ x+2y+2z-t=2 \end{array}\right\}$ → C.I solución x=-3t-2, y=$\dfrac{1-2t}{3}$, z=$\dfrac{8t+5}{3}$

c) $\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=1 \\ -x+y-z+t=0 \\ 2x+3y-z+2t=1 \\ x+4y-2z+3t=3 \end{array}\right\}$ → Incompatible

d) $\left.\begin{array}{r} x-2y-z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ -x-y+2z=-1 \end{array}\right\}$ → C.D. x=1, y=0, z=0

7. Inecuaciones lineales

Las inecuaciones son expresiones semejantes a las ecuaciones pero en vez de aparecer el signo = aparecen los signos $\leq, <, \geq, >$. Veamos diferentes tipos de inecuaciones

7.1 Inecuaciones lineales con una incógnita.

Son expresiones de la forma (después de simplificar) de la forma:

ax+b<c , ax+b>c, ax+b≤c ó ax+b≥c siendo a,b,c∈R y a≠0

Para resolver la inecuación hay que tener en cuenta las siguientes reglas:

a) Si un número está a un lado de la desigualdad y deseamos pasarla al otro lado pasará restando y al revés (igual que en las ecuaciones)

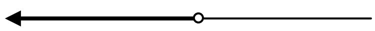
   Ejemplo: 5x-2<6 → 5x<6+2 → 5x<8

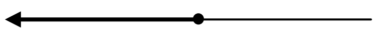
b) Si multiplicamos o dividimos la desigualdad por un número negativo entonces el signo < o ≤ cambia a > o ≥, y al revés. De esta forma si queremos despejar de x un número que le multiplica pasa dividiendo cambiando el sentido de la desigualdad si es un número negativo. Lo mismo pasa si está dividiendo

Ejemplos: -3x<2 → x>-2/3

-x/5≥2 → x≤-10

Despejando la x de la inecuación anterior tendremos las siguientes posibles expresiones:

x<-b/a Solución=(-∞,-b/a) 

x≤-b/a Solución=(-∞,-b/a] 

x>-b/a Solución=(-b/a,∞) 

x≥-b/a Solución=[-b/a,∞) 

Ejemplo: 3-5x< 8 → -5x<8-3 → -5x<5 → x>-1 x∈(-1,∞)

Ejercicio, resolver las siguientes inecuaciones:

a) 2(x-2)+3x<5x+6

b) 3x+7-5(2x-3)≥(x-1)/2 -1

c) 3·(x-1)/2 –x > (x-3)/2

Solución

a) 2x-4+3x<5x+6 → 0x<10 → 0<10 ,que es cierto independientemente del valor de x, luego la solución es x∈R

b) 3x+7-10x+15≥(x-1)/2-1, -7x+22≥(x-1)/2-1 $\xrightarrow{mult\ por\ 2}$ -14x+44≥x-1-2→ -15x≥-47 → $x \leq \frac{47}{15}$, x∈(-∞, $\frac{47}{15}$]

c) $\frac{3x-3}{2} - x > \frac{x-3}{2} \xrightarrow{mul\ por\ 2} 3x-3-2x > x-3 \to 0x > 0 \to 0 > 0$ No es cierto independientemente del valor de x, luego no hay soluciones S=∅

7.2 Inecuaciones lineales con dos incógnitas

Una inecuación lineal con dos incógnitas es una expresión de la forma:

ax+by<c; ax+by>c; ax+by≤c ; ax+by≥c

Por lo general existen infinitos valores de parejas (x,y) que cumplen las soluciones a la inecuación lineal. Veremos las soluciones representadas en los ejes de coordenadas.

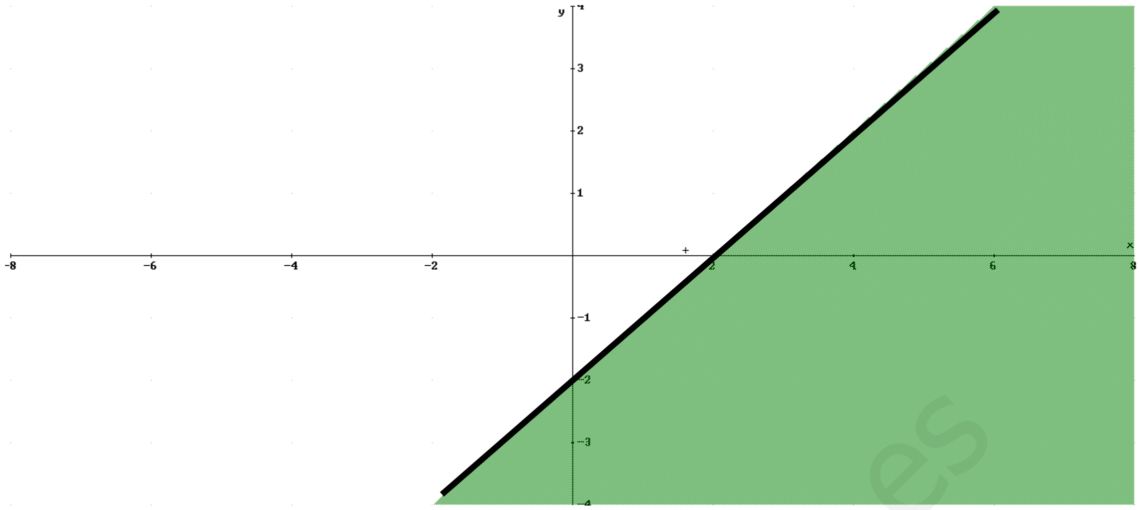
Pasos a seguir para obtener las soluciones:

1. Representamos la recta determinada por ax+by=c. quedando dividido el plano en dos semiplanos (uno de ellos será la solución)
2. Tomamos un punto arbitrario con un valor de x e y. Si para estos valores de x y de y la inecuación es cierta, el semiplano que contiene el punto es la solución, sino es así es el otro semiplano
3. Si tenemos ≥ ó ≤ la recta será solución (que es la solución a la igualdad ax+by=c) si tenemos < ó > entonces la recta no será solución

Ejemplo:

x-y ≥ 2. representamos la recta y=x+2. Tomamos el punto (0,0) → 0-0 ≥2 que no cumple la inecuación, luego la solución es el semiplano que no contiene el origen. La recta es solución ya que el símbolo es ≥

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)



Ejercicios:

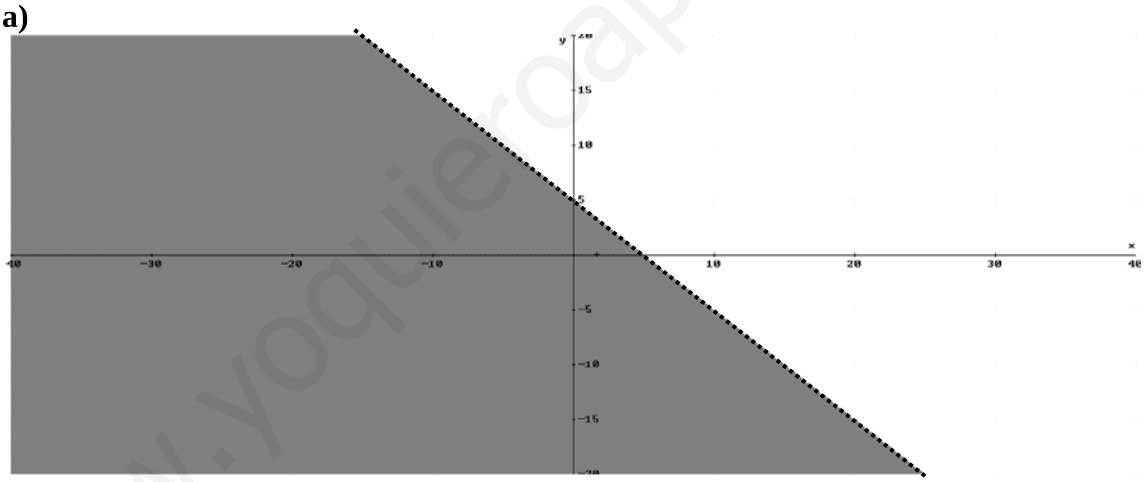
a) **x+y<5**

b) **x-y ≤ 1**

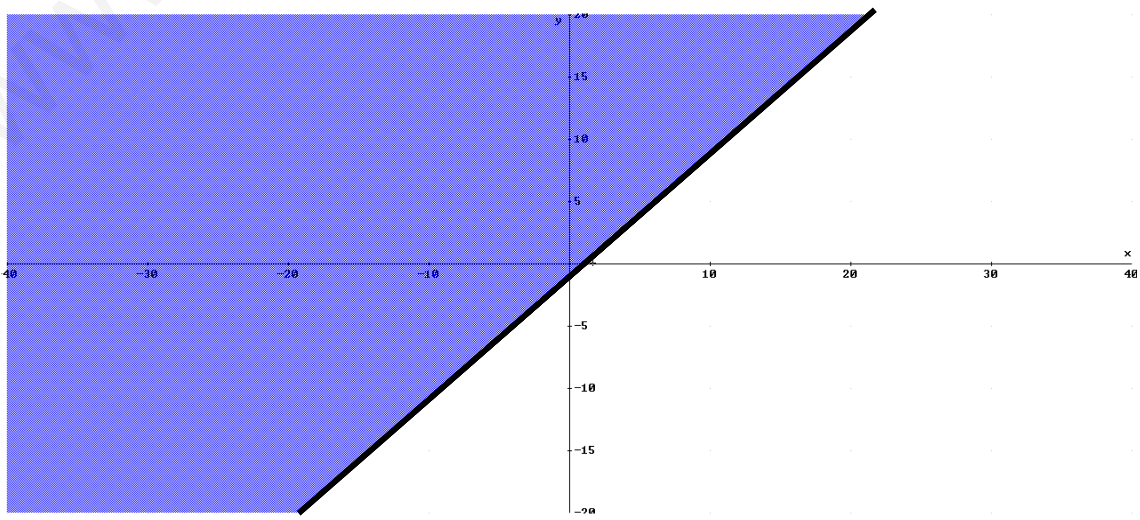
c) **2x-1/3 ≥x-y**

Solución

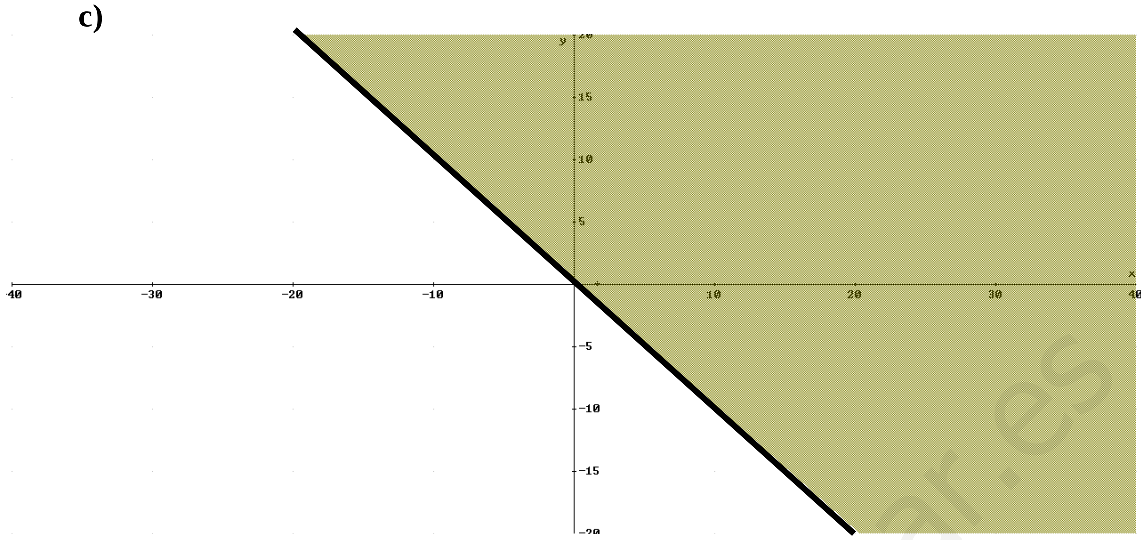
a)



b)



c)



7.3. Inecuaciones de segundo grado con una incógnita

Son expresiones que después de operar son de la forma:

$ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c>0$; $ax^2+bx+c\leq 0$; $ax^2+bx+c\geq 0$

Los pasos para la resolución de las inecuaciones son los siguientes:

1. Cálculo de las soluciones a la igualdad (raíces de ax^2+bx+c) que son x_1 y x_2
   a. Si son soluciones reales, factorizamos el polinomio $a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)<0$
      i. Dividimos la recta real en 3 intervalos(2 si es raíz doble) $(-\infty,x_1)$; (x_1,x_2) ; (x_2,∞). Estudiamos el signo en cada intervalo
      ii. Las soluciones son los intervalos que cumplen la desigualdad.
   b. Si no son reales entonces ax^2+bx+c no cambia de signo, por lo que o es siempre positivo si c>0 o negativo si c<0. Así las soluciones serán o todo R o el vacío.

Ejemplos:

a) $x^2+x-6\leq 0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\left\langle\begin{array}{l}-3\\2\end{array}\right.$$

$x^2+x-6\leq 0 \rightarrow (x+3)(x-2)\leq 0$

	$(-\infty,-3)$	-3	(-3,2)	2	$(2,\infty)$
Signo(x+3)	-	0	+	+	+
Signo(x-2)	-	-	-	0	+
Signo(x^2+x-6)	+	0	-	0	+

Solución $x\in[-3,2]$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

b) $x^2+1<0$

$x^2=-1 \rightarrow$ no solución real.

x^2+1 siempre es positivo, por ejemplo en x=0: $0^2+1=1>0$

No soluciones $S=\varnothing$

c) $x^2+1>0 \rightarrow x \in R$

Ejercicios:

a) $x^2-6x+9>0$

b) $-3x^2-5x+2\leq 0$

c) $(x-3)^2\geq 4$

d) $(2x-1)/5>3x^2/2$

Soluciones:

a) $(x-3)^2>0$

	$(-\infty,3)$	3	$(3,\infty)$
Signo(x-3)	-	0	+
Signo(x-3)	-	0	+
Signo(x^2-6x+9)	+	0	+

Solución $\rightarrow x \in R-\{3\}$

b) $-3x^2-5x+2\leq 0 \rightarrow -3(x-1/3)(x+2)\leq 0$

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,1/3)$	1/3	$(1/3,\infty)$
Signo(x+2)	-	0	+	+	+
Signo(x-1/3)	-	-	-	0	+
-3	-	-	-	-	-
Signo(x^2+x-6)	-	0	+	0	-

Solución $\rightarrow x \in (-\infty,-2] \cup [1/3,\infty)$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

c) $(x-3)^2 \geq 4 \rightarrow x^2-6x+5 \geq 0 \rightarrow (x-5)\cdot(x-1) \geq 0$

	$(-\infty,1)$	1	$(1,5)$	5	$(5,\infty)$
Signo(x-1)	-	0	+	+	+
Signo(x-5)	-	-	-	0	+
Signo(x^2-6x+5)	+	0	-	0	+

Solución $\rightarrow$ **$x \in (-\infty,1] \cup [5,\infty)$**

7.4 Inecuaciones polinómicas y algebraicas

7.4.1 Polinomios

En este apartado estudiaremos las inecuaciones del tipo:

$P(x)<0$, $P(x)>0$, $P(x) \leq 0$, $P(x) \geq 0$.

Resolución:

1. Factorizamos, obteniendo las raíces x_1, x_2, …,x_n
2. Estudiamos el signo en los intervalos $(-\infty,x_1)$, (x_1,x_2),…, (x_n,∞)
3. De los intervalos tomamos aquellos que solucionen la inecuación.

Ejemplo : $x^4+x^3+3x^2-11x-14 \leq 0$; Factoriz$\rightarrow(x+1)(x-2)(x^2+2x+7) \leq 0$.Raíces x=-1, x=2

	$(-\infty,-1)$	1	$(-1,2)$	2	$(2,\infty)$
Signo(x+1)	-	0	+	+	+
Signo(x-2)	-	-	-	0	+
Signo(x^2+2x+7)	+	+	+	+	+
Signo($x^4+x^3+3x^2$-11x-14)	+	0	-	0	+

Solución $x \in [-1,2]$

Ejercicios: resuelve

1) $-x^3-2x^2+x+2>0$

2) $-3x^3-24x^2-21x \leq 0$

3) $x^3-2x^2 \leq -x$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Soluciones:

1) $-x^3-2x^2+x+2=-(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)>0$. Raíces x=-2, -1,1

	$(-\infty,-2)$	-2	(-2,-1)	-1	(-1,1)	1	$(1,\infty)$
Signo(x+2)	-	0	+	+	+	+	+
Signo(x+1)	-	-	-	0	+	+	+
Signo(x-1)	-	-	-	-	-	0	+
-1	-	-	-	-	-	-	-
Signo($-x^3-2x^2+x+2$)	+	0	-	0	+	0	-

Solución $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,1)$

2) $-3x^3-24x^2-21x=-3\cdot x\cdot(x+7)\cdot(x+1)\leq 0$. Raíces x=-7,-1, 0

	$(-\infty,-7)$	-7	(-7,-1)	-1	(-1,0)	0	$(0,\infty)$
Signo(x+7)	-	0	+	+	+	+	+
Signo(x+1)	-	-	-	0	+	+	+
Signo(x)	-	-	-	-	-	0	+
-3	-	-	-	-	-	-	-
Signo($-x^3-2x^2+x+2$)	+	0	-	0	+	0	-

Solución $x\in[-7,-1]\cup[0,\infty)$

3) $x^3-2x^2\leq -x \rightarrow x^3-2x^2-x\leq 0 \rightarrow x(x-1)^2\leq 0$

	$(-\infty,0)$	0	(0,1)	1	$(1,\infty)$
Signo(x)	-	0	+	+	+
Signo(x-1)	-	-	-	0	+
Signo(x-1)	-	-	-	0	+
Signo(x^3-2x^2-x)	-	0	+	0	+

Solución $x\in(-\infty,0]\cup\{1\}$

7.4.2 Fracciones algebraicas

Las inecuaciones de fracciones algebraicas son expresiones de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}<0\,;\ \frac{P(x)}{Q(x)}>0;\ \frac{P(x)}{Q(x)}\leq 0;\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$$, siendo P(x) y Q(x) polinomios.

La forma de resolver estas inecuaciones es semejante a la de los polinomios. Los pasos son los siguientes:

1. Factorización de P(x) y de Q(x). Y simplificación de la fracción si coincide algún factor.
2. Estudiamos el signo en los intervalos comprendidos entre las raíces de P(x) y Q(X) que no han sido simplificadas
3. A partir de estudiar el signo de cada factor podemos determinar cuando la fracción algebraica es mayor, menor o igual que cero

Nota: cuidado con las raíces del polinomioQ(x), ya que en estos valores $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *no se anula, sino que no existe (dividir por cero)*

Ejemplo: $\frac{x^2-1}{x^2+5x+6}\leq 0 \rightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x+3)}\leq 0$ → raíces son -3, -2, -1 y 1

	(-∞,-2)	-3	(-3,-2)	-2	(-2,-1)	-1	(-1,1)	1	(1,∞)
Sig(x+3)	-	0	+	+	+	+	+	+	+
Sig(x+2)	-	-	-	0	+	+	+	+	+
Sig(x+1)	-	-	-	-	-	0	+	+	+
Sig(x-1)	-	-	-	-	-	-	-	0	+
Sig($\frac{x^2-1}{x^2+5x+6}$)	+	No existe	-	No existe	+	0	-	0	+

Solución: x∈(-3,-2)∪[-1,1]

Ejercicios, resolver las siguientes inecuaciones

a) $\frac{-x^2+6x-8}{x^2-4} \geq 0 \rightarrow \frac{-(x-4)\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} \geq 0$ → raíces -2 y 4

	(-∞,-2)	-2	(-2,4)	4	(4,∞)
Signo(x+2)	-	0	+	+	+
Signo(x-4)	-	-	-	0	+
Signo(-1)	-	-	-	-	-
Signo($\frac{-x^2+6x-8}{x^2-4}$)	-	No existe	+	0	-

Solución x∈(-2,4]

b) $\frac{2x^2+6x+10}{x^2-x} \leq 0 \rightarrow \frac{2x^2+6x+10}{x(x-1)} \leq 0$ → raíces 0 y 1.

	(-∞,0)	0	(0,1)	1	(1,∞)
Signo(x)	-	0	+	+	+
Signo(x-1)	-	-	-	0	+
Signo(2x2+6x+10)	+	+	+	+	+
Signo $\frac{2x^2+6x+10}{x^2-x}$	+	No existe	-	No existe	+

Solución x∈(0,1)

8. Sistemas lineales de inecuaciones

8.1 Una incógnita

Los sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita son sistemas de la forma:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ ax+b \leq 0 \\ (2)\ a'x+b'>0\end{array}\right\}$$ o con cualquier signo otro símbolo de desigualdad

La forma de resolver el sistema es el siguiente:

1. Obtenemos las soluciones de (1) y de (2), S_1 y S_2 respectivamente
2. Las soluciones del sistema tienen que ser de (1) y (2) luego es la intersección de sus soluciones $S=S_1 \cap S_2$

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l}(1)\ x+3>0\\(2)\ 3x-6\geq 0\end{array}\right\}$

$S_1 \rightarrow x>-3 \quad S_1=(-3,\infty)$

$S_2 \rightarrow 3x\geq 6;\ x\geq 2 \quad S_2=[2,\infty)$

Solución $S=S_1\cap S_2=[2,\infty)$

Ejercicios:

1. $\left.\begin{array}{l}(1)\ 5-3x\geq 4x+13\\(2)\ 2x+7<5x+11\end{array}\right\}$

$S_1 \rightarrow -8\geq 7x\ ;\ x\leq(-8/7) \quad S_1=(-\infty,\ -8/7]$

$S_2 \rightarrow -3x<4\ ;\ x>-4/3 \qquad S_2=(-4/3,\infty)$

$S=S_1\cap S_2=(\ -4/3,-8/7]$

2. $\left.\begin{array}{l}(1)\ 5(x-3)\leq -2+x\\(2)\ 3x>2x+1\\(3)\quad x<3\end{array}\right\}$

$S_1 \rightarrow 4x\leq 13;\ S_1=(-\infty,13/4]$

$S_2 \rightarrow x>1\ ; \quad S_2=(1,\infty)$

$S_3 \rightarrow x<3; \quad S_3=(-\infty,3)$

$S=S_1\cap S_2\cap S_3=(1,3)$

8.2 Dos incógnitas

Son sistemas formados por dos o más inecuaciones con dos incógnitas:

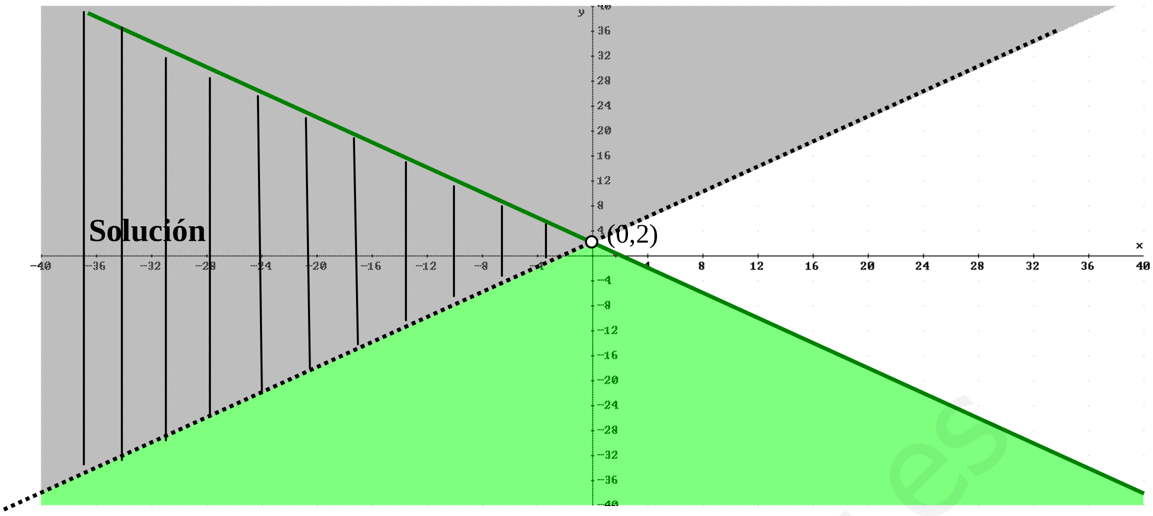
$\left.\begin{array}{l}(1)\quad ax+by\leq c\\(2)\ a'x+b'y>c'\end{array}\right\}$ o con cualquier signo otro símbolo de desigualdad

Resolución de los sistemas:

1. Se representan en el plano cartesiano las soluciones de (1) y (2)
2. Las soluciones del sistema son la intersección de las soluciones a las dos inecuaciones

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l}(1)\qquad x+y\leq 2\\(2)\ -2x+2y>4\end{array}\right\}$

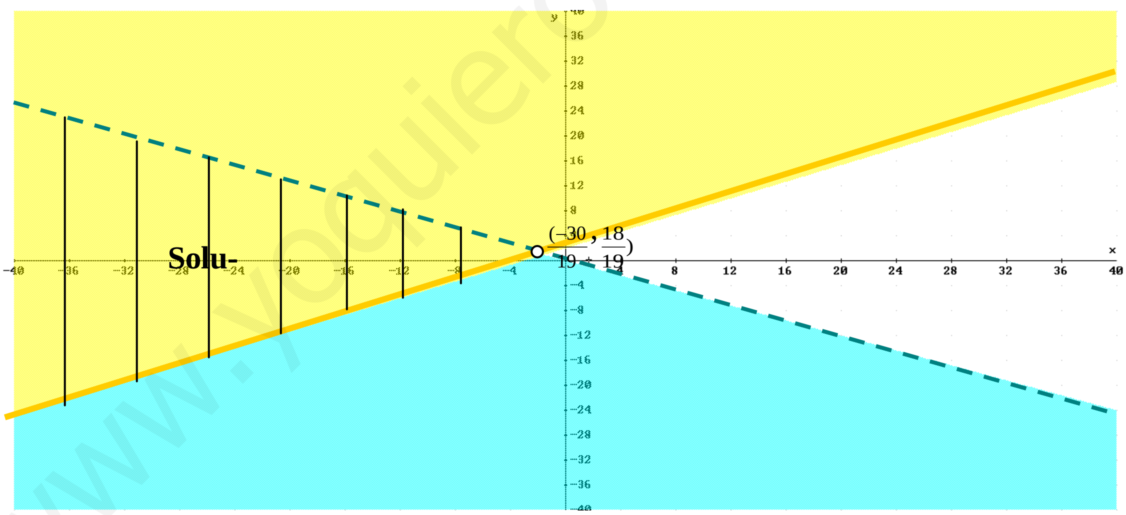
 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)



Punto de corte, es la solución al sistema $\left.\begin{array}{r}(1)\quad x+y=2\\(2)\ -2x+2y=4\end{array}\right\}$. Resolviéndolo obtenemos x=0, y=2

Ejercicios:

1) $\left.\begin{array}{r}(1)\quad 3x+5y<0\\(2)\ -2x+3y\geq 6\end{array}\right\}$

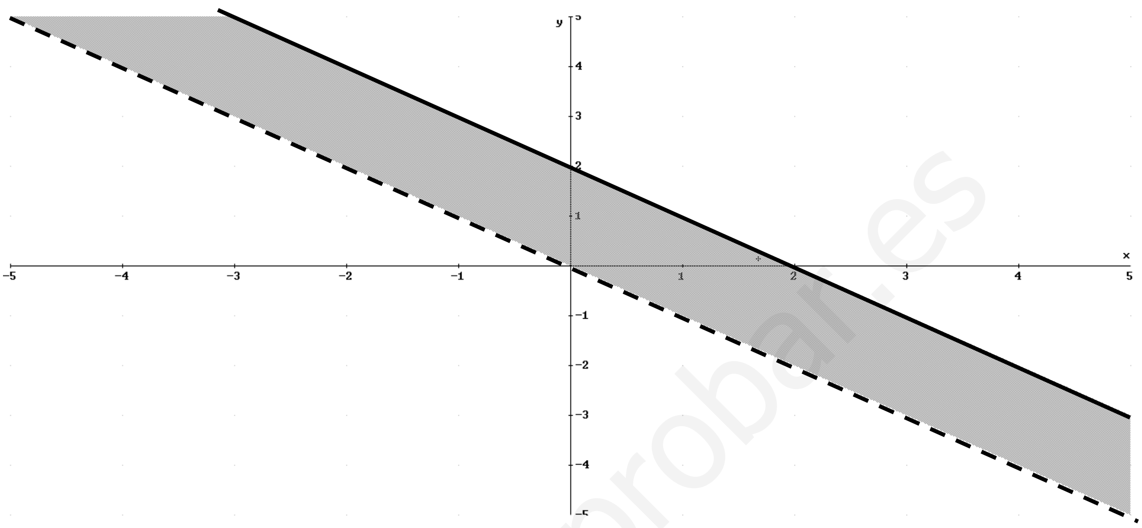


Puntos de corte es la solución del sistema $\left.\begin{array}{r}(1)\quad 3x+5y=0\\(2)\ -2x+3y=6\end{array}\right\}$. Resolviéndolo obtenemos

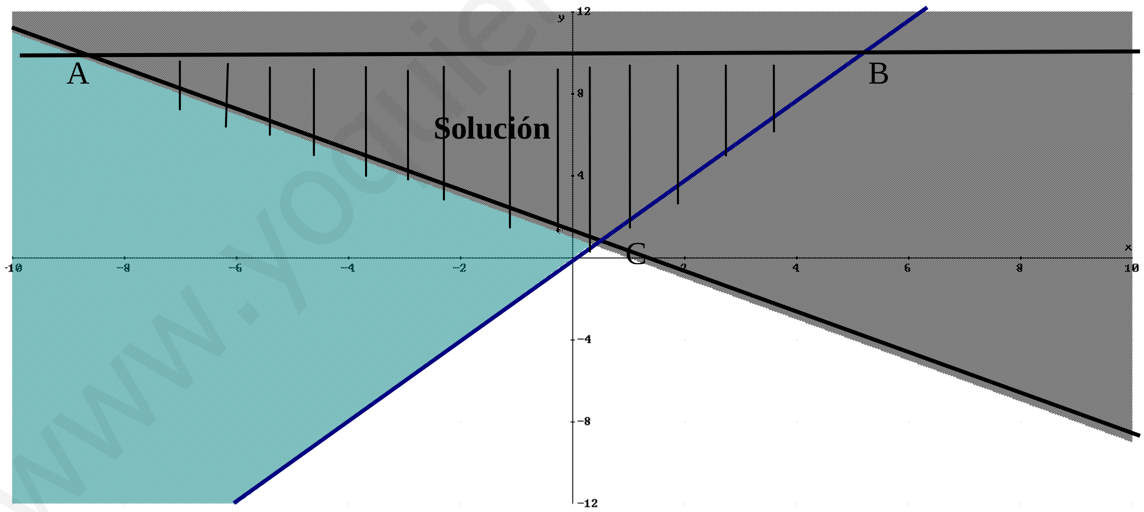
x=$\frac{-30}{19}$, y=$\frac{18}{19}$

2) $\left.\begin{array}{l}(1)\quad x+y>0\\(2)\ -3x-3y\geq -6\end{array}\right\}$

Son rectas paralelas y la solución es el espacio comprendido entre ambas rectas. Veamos el dibujo



3) $\left.\begin{array}{l}(1)\ 2x-y\leq 0\\(2)\ x+y\geq 1\\(3)\ y\leq 10\end{array}\right\}$



Calculemos A, B y C.

Cálculo de A: punto de corte de $\left.\begin{array}{r}y=10\\x+y=1\end{array}\right\}$ → (-9,10)

Cálculo de B: punto de corte de $\left.\begin{array}{r}y=10\\2x-y=0\end{array}\right\}$ → (5,10)

Cálculo de C: punto de corte de $\left.\begin{array}{r}x+y=1\\2x-y=0\end{array}\right\}$ → (1/3, 2/3)

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

9. Ecuaciones y sistemas logarítmicos y exponenciales

9.1 Defínción y propiedades del logarítmo

Definición: el logaritmo es la operación inversa al exponente, así :

$y=\log_a x \rightarrow a^y=x$

Elementos del logaritmo:

- Base del logaritmo, a.
- Argumento del logaritmo x

Ejemplos:

$\log_{10}100=2 \rightarrow 10^2=100$

$\log_2 8=3 \rightarrow 2^3=8$

$\log_3(1/9)=-2 \rightarrow 3^{-2}=1/9$

$\log_{10}0{,}001=-3 \rightarrow 10^{-3}=1/1000=0.001$

Notación: $\log_{10} x=\log x$. Los logaritmos decimales son los que aparecen en la calculadora.

Propiedades (muy importantes):

1. $\log_a a=1$; $\log_a 1=0$
2. $\log_a x_1+\log_a x_2=\log_a(x_1 \cdot x_2)$. Ejemplo $\log_2 8+\log_2 4=\log_2 32 \rightarrow 3+2=5$
3. $\log_a x_1-\log_a x_2=\log_a(x_1/x_2)$. Ejemplo $\log_2 8-\log_2 4=\log_2 2 \rightarrow 3-2=1$
4. $\log_a(x)$ no existe si $x\leq 0$. Pues $a^y>0$. Ejemplo log(-2) y log(0) no existen
5. $n\cdot\log_a x=\log_a x^n \rightarrow$ Ejemplo: $-2\cdot\log(10)=\log(10^{-2}) \rightarrow -2\cdot 1=-2$
   $\log_3 3^2=\log_3 9=2$
6. $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Esta última propiedad muy útil para calcular logaritmos con la calculadora. Ejemplo $\log_2 6=\dfrac{\log 6}{\log 2}=\dfrac{0{,}778}{0{,}301}=2{,}58$. Comprobación: $2^{2.58}\approx 6$

Ejercicios

1) Calcular los siguientes logaritmos exactos sin usar la calculadora:

a) $\log_6 1296$

b) $\log_2 0{,}125$

c) $\log_3\sqrt{27}$

d) $\log_5 625$

e) $\log_{1/5}25$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Solución:

a) $11296=6^4 \rightarrow \log_6 1296=4$

b) $0{,}125=\frac{1}{4}=2^{-2} \rightarrow \log_2 0{,}125=-2$

c) $\sqrt{27}=\sqrt{3^3}=3^{3/2} \rightarrow \log_3\sqrt{27}=3/2$

d) $625=5^4 \rightarrow \log_5 625=4$

e) $25=5^2=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \rightarrow \log_{1/5}25=-2$

2) Utiliza la tecla de la potencia x^y para calcular con aproximación de centésimas el siguiente logaritmo: $\log_7 32$

Solución: $\log_7 32 \approx 1.78$

3) Calcular la incógnita

a) $y=\log_4\sqrt{2}$

b) $-4=\log_b 2$

c) $-\frac{1}{2}=\log_4 x$

Solución:

a) $\sqrt{2}=2^{1/2}=\left(4^{1/2}\right)^{1/2}=4^{1/4} \rightarrow \log_4\sqrt{2}=\frac{1}{4}$

b) $-4=\log_b 2 \rightarrow b^{-4}=2 \rightarrow 1=2\cdot b^4 \rightarrow b^4=1/2 \rightarrow b=\sqrt[4]{1/2}$

c) $-\frac{1}{2}=\log_4 x \rightarrow x=4^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$

4) Sabiendo que $\log_b(x)=0{,}5$, $\log_b(y)=0{,}2$, $\log_b(z)=0{,}3$, se cumple $a=\frac{x^3}{yz}$, calcular $\log_b a$ y luego el valor de a. Nota aplicar las propiedades de logaritmos:

Solución:

$\log_b\left(\frac{x^3}{yz}\right)=\log_b(x^3)-\log_b(yz)=3\cdot\log_b(x)-(\log_b(y)+\log_b(z))=3\cdot 0{,}5-(0{,}2+0{,}3)=1$

$\log_b(a)=1 \rightarrow a=b$

9.2 Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Ecuaciones con logaritmos: para resolver las ecuaciones logarítmicas tendremos que agrupar los logaritmos en uno sólo o en uno por cada lado de la igualdad. Una vez que tengamos un único logaritmo o uno por cada lado de la igualdad, para quitarnos el logaritmo tomamos el exponente.

Ejemplo:

$\log_2(-8x-4)-\log_2(x^2)=2 \rightarrow \log_2\left(\frac{-8x-4}{x^2}\right)=2 \rightarrow \left(\frac{-8x-4}{x^2}\right)=2^2 \rightarrow \left(\frac{-8x-4}{x^2}\right)=4 \rightarrow$ $(-8x-4)=4\cdot x^2 \rightarrow 4x^2+8x+4=0 \rightarrow x=-1$. Tenemos que comprobar que la solución es válida, pues puede ocurrir que el logaritmo sea negativo:

$x=-1 \rightarrow \log_2\left(\frac{8-4}{(-1)^2}\right)=\log_2(2)=2$

Problema, resolver:

1. $3\cdot\log(x)-\log(32)=\log(x)-\log(2)$
2. $2\cdot\log(x)+\log(2)=\log(x+1)$
3. $\log_3(2)+\log_3(x-3)=(1/2)\cdot\log_3(2x)$

Solución:

1) $\log(x^3)-\log(32)=\log(x)-\log(2) \rightarrow \log\left(\frac{x^3}{32}\right)=\log\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{x^3}{32}\right)=\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow x^3=16x$

$\rightarrow x(x^2-16)=0 \rightarrow x=0,\ x=4,\ x=-4.$

Comprobación:

$x=0 \rightarrow \log(0)=\log(0)$ pero no existe el logaritmo de cero, luego no es solución

$x=-4 \rightarrow \log(-2)=\log(-2)$ no existe el logaritmo de cero, luego no es solución

$x=4 \rightarrow \log(2)=\log(2)$ si es solución

2) $\log(x^2)+\log(2)=\log(x+1) \rightarrow \log(2\cdot x^2)=\log(x+1) \rightarrow 2x^2=x+1 \rightarrow 2x^2-x-1=0 \rightarrow$ $\rightarrow x=1,\ x=-1/2$. Los dos soluciones son válidas:

$x=1 \rightarrow \log(2)=\log(2)$

$x=-1/2 \rightarrow \log(1/2)=\log(1/2)$

3) $\log_3(2\cdot(x-3))=\log_3(\sqrt{2x}) \rightarrow 2x-6=\sqrt{2x} \rightarrow (2x-6)^2=2x \rightarrow 4x^2-26x+36=0 \rightarrow$ $x=2,\ x=9/2$. Al elevar al cuadrado debemos comprobar si las dos soluciones son válidas:

$x=2 \rightarrow 2\cdot 2-6\neq\sqrt{2\cdot 2}$. No solución

$x=9/2 \rightarrow 2\cdot\frac{9}{2}-6=\sqrt{2\cdot\frac{9}{2}} \rightarrow 3=3$. Solución

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ecuaciones con exponente: *a)* si tenemos una sola potencia igualada a un número, tomamos logaritmo en la misma base en los dos lados de la ecuación(el logaritmos se va con el exponente) obteniendo la solución. b) Si tenemos varios exponente tenemos que poner todos los exponentes con misma base y luego hacer un cambio de variable. Con dicho cambio se resuelve la ecuación, y luego se deshace el cambio de variable.

Ejemplo :

$3^{x-1}=2 \rightarrow \log_3 3^{x-1}=\log_3 2 \rightarrow (x-1)\cdot\log_3 3= \log_3 2 \rightarrow (x-1)= \log_3 2 \rightarrow x=1+ \log_3 2$

$3^x+3^{x-1}+9^x=13 \rightarrow 3^x+\frac{3^x}{3}+\left(3^x\right)^2=13 \rightarrow y=3^x \rightarrow y+y/3+y^2=13 \rightarrow 3y+y+3y^2=39 \rightarrow$ $3y^2+4y-39=0 \rightarrow y=3, y=-13/3$:

$3=3^x \rightarrow x=1$

$-13/3=3^x \rightarrow x=\log_3(-13/3)$ no solución

Problemas:

1) $2^{3x-1}=11$
2) $5^{x-5}\cdot5^{-x}+4\cdot5^{-3x}=0$
3) $5^{x+1}=1/25$
4) $11^x-11^x+1+11^{2x}=-9$

Solución:

1) $2^{3x-1}=11 \rightarrow 3x-1=\log_2 11 \rightarrow x=(\log_2 11+1)/3$
2) $5^x-5\cdot5^{-x}+4\cdot5^{-3x}=0 \rightarrow 5^x-5\cdot\frac{1}{5^x}+4\cdot\frac{1}{\left(5^x\right)^3}=0 \rightarrow y=5^x \rightarrow y-\frac{5}{y}+\frac{4}{y^3}=0 \rightarrow$

   $y^4-5y^2+4=0 \rightarrow y=\pm2, y=\pm1.$

   $y=2 \rightarrow 5^x=2 \rightarrow x=\log_5 2$

   $y=1 \rightarrow 5^x=1 \rightarrow x=\log_5 1=0$

   $y=-2 \rightarrow 5^x=-2 \rightarrow x=\log_5(-2)$ no existe

   $y=1 \rightarrow 5^x=-1 \rightarrow x=\log_5(-1)$ no existe
3) $5^{x+1}=1/25 \rightarrow x+1=\log_5(1/25) \rightarrow x=-2-1=-3$
4) $11^x-11^{x+1}+11^{2x}=-9 \rightarrow 11^x-11\cdot11^x+(11^x)^2=-9 \rightarrow y=11^x \rightarrow y-11y+y^2=-9 \rightarrow$ $y^2-10y+9=0 \rightarrow y=9, y=1$

   $11^x=9 \rightarrow x=\log_{11} 9$

   $11^x=1 \rightarrow x= \log_{11} 1=0$

9.3 Sistemas logarítmicos y exponenciales

Se resuelven o bien haciendo cambio de variables u obteniendo ecuaciones sin logaritmos y exponentes.

a) $\left.\begin{array}{l}\log(x)-\log_2(y)=1\\ 2\log(x)+\log_2(y)=5\end{array}\right\}$

Solución

$$\log(x)=X,\ \log_2(y)=Y \rightarrow \left.\begin{array}{r} X-Y=1 \\ 2X+Y=5 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} X=2 \rightarrow x=100 \\ Y=1 \rightarrow y=2 \end{array}$$

b) $\left.\begin{array}{r} 2^x+3^y=7 \\ 2^{x+1}+1=3^{y+1} \end{array}\right\}$

Solución

$$\left.\begin{array}{r} 2^x+3^y=7 \\ 2\cdot 2^x+1=3\cdot 3^u \end{array}\right\}\ 2^x=X,\ 3^y=Y \rightarrow \left.\begin{array}{r} X+Y=7 \\ 2\cdot X+1=3\cdot Y \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} X=4 \rightarrow x=2 \\ Y=3 \rightarrow y=1 \end{array}$$

c) $\left.\begin{array}{r} \log(x)+\log(y)=3 \\ x+y=70 \end{array}\right\}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} \log(x\cdot y)=3 \\ x+y=70 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} (x\cdot y)=10^3 \\ x+y=70 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x_1=20,\ y_1=50 \\ x_1=50,\ y_1=20 \end{array}$$

d) $\left.\begin{array}{r} 2^x\cdot 4^y=8 \\ x+y=2 \end{array}\right\}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} 2^x\cdot 2^{2y}=8 \\ x+y=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2^{x+2y}=8 \\ x+y=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=3 \\ x+y=2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \end{array}$$

e) $\left.\begin{array}{l} \log(x+y)-\log(x-y)=\log(5) \\ 2^x/2^y=2 \end{array}\right\}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \log\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)=\log(5) \\ 2^{x-y}=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} \dfrac{x+y}{x-y}=5 \\ x-y=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=5x-5y \\ x-y=1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array}$$

Tema 4. Números Complejos

1. Números complejos.

1.1. Definición de números complejo

Cuando resolvíamos las ecuaciones de segundo grado y el discrimínate era negativo (raíz negativa) decíamos que dicha ecuación no tenía soluciones reales. ¿pero es qué acaso puede haber otro tipo de soluciones?. En este tema veremos los números complejos, en este conjunto de números las raíces pares de índice negativo tienen solución.

Ejemplos:

1) $x^2+4=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1}$

2) $x^2-4x+5=0 \rightarrow x = \frac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 5}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{4}}{2} = 2 \pm \sqrt{-1}$

Antes de definir el conjunto de los números complejos vamos a definir la ***unidad imaginaria, i:***

$i=\sqrt{-1}$ tal que $i^2=-1$

De esta forma las soluciones a las ecuaciones 1 y 2 son:

1) $x = \pm 2i$
2) $x=2 \pm i$

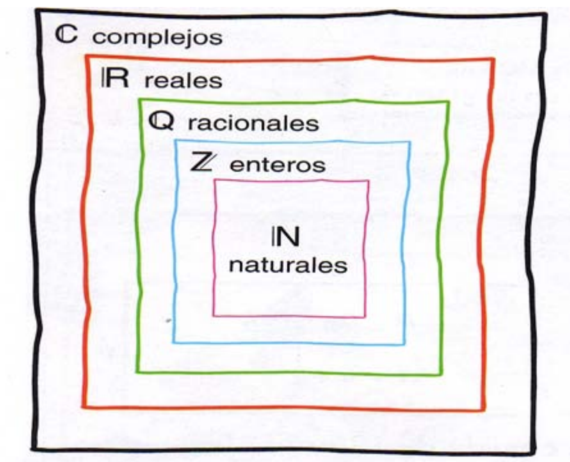
Números complejos ($\mathbb{C}$) son aquellos que se pueden escribir de la forma $z=a+b\cdot i$, donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria. Esta forma de representar a los $\mathbb{C}$ se denomina ***forma binómica.***

Partes de los complejos $z=a+b\cdot i$:

- Parte real $Re(z)=a$
- Parte imaginaria $Im(z)=b$

Nota: los números reales están incluidos en los complejos, son en los que la parte imaginaria es cero (b=0).

Los complejos que no tiene parte real se denominan ***imaginarios puros***. Por ejemplo $z=5i$, $z=\pi i$…



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio: escribe los siguientes números complejos en función de la unidad imaginaria:

a) $\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$

b) $\sqrt{-16}=4\,i$

Ejercicio: resuelve las siguientes ecuaciones y factoriza los polinomios con números complejos:

a) $x^2-4x+13=0$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-52}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=\begin{cases}x=2+3i\\ x=2-3i\end{cases}$$

$x^2-4x+13=(x-(2+3i))\cdot(x-(2-3i))$

Comprobación:

$(x-(2+3i))\cdot(x-(2-3i))=x^2-(2-3i)x-(2+3i)x+(2+3i)(2-3i)=x^2-4x+(2^2-(3i)^2)=$

$=x^2-4x+(4-9(i)^2)=x^2+4x-(4+9)=x^2-4x+13$

b) $3x^2-3x+2=0$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-24}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{-15}}{6}=\begin{cases}x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{6}i\\ x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{6}i\end{cases}$$

$3x^3-3x+2=3\cdot\left(x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{6}i\right)\right)\cdot\left(x-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{6}i\right)\right)$

Comprobación:

$$3\cdot\left(x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{6}i\right)\right)\cdot\left(x-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{6}i\right)\right)=3\left(x^2-x+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{6}i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{6}i\right)\right)=$$

$$=3\cdot\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{15}{36}i^2\right)=3\cdot\left(x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{15}{36}\right)=3\cdot\left(x^2-x+\frac{24}{36}\right)=3x^2-3x+2$$

1.2.Conjugado y opuesto de números complejos

Veamos tres definiciones muy importantes:

Dos números complejos $z_1=a_1+b_1i$ y $z_2=a_2+b_2i$ son ***iguales*** si son iguales tanto la parte imaginaria como la real:

$$\mathbf{z_1=z_2\leftrightarrow a_1=a_2 \text{ y } b_1=b_2}$$

Ejemplo: hallar x e y sabiendo que z=z', siendo z=3+xi y z'=y-5i. Como z=z' entonces x=-5 e y=3

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Dado un número complejo z=a+bi:

- llamamos ***opuesto*** de z al número complejo –z=-a-bi. Tal que se cumple que z+(-z)=0

- llamamos ***conjugado*** de z al complejo $\overline{z} = a - bi$. Cumpliéndose:

  · Re(z)=Re($\overline{z}$)

  · Im(z)=-Im($\overline{z}$)

Ejemplos:

z=3+15i → $\overline{z}$=3-15i

z=-12+πi → $\overline{z}$=-12-πi

Nota: z+$\overline{z}$=2·Re(z)

1.3. Representación gráfica de los complejos

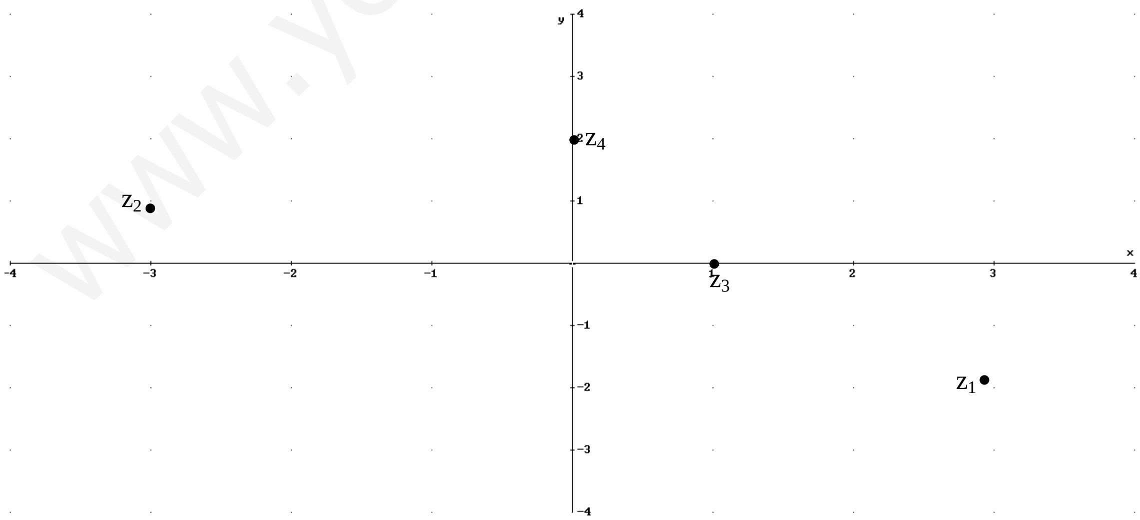
Los números complejos no se pueden representar en la recta real, para su representación es necesario dos dimensiones (una para la parte real y otra para la imaginaria). De esta forma los complejos se representan en un sistema cartesiano denominado ***plano complejo.***

En este plano complejo el complejo z=a+bi se representa tal que la parte real, a, estará en el eje de abcisas (eje x) denominado ***eje real*** y la parte imaginaria, b, en el eje de ordenadas (eje y) denominado ***eje imaginario.***

De esta forma el complejo z=a+bi es equivalente al punto P(a,b) que se llama ***afijo*** del complejo z.

Ejemplos:

Representar los complejos z_1=3-2i, z_2=-3+i, z_3=1, z_4=2i



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

2. Operaciones con complejos

Las operaciones con complejos se basan en las operaciones con números reales y en que $i \cdot i = i^2 = -1$. Veamos a partir de estas dos premisas las operaciones con complejos:

2.1. Suma y resta de complejos

La suma y la resta de números complejos se realiza sumando o restando las partes reales e imaginarias entre sí:

- Suma: $(a_1+b_1 \cdot i)+(a_2+b_2 \cdot i)= (a_1+ a_2)+(b_1+ b_2) \cdot i$
- Resta: $(a_1+b_1 \cdot i)-(a_2+b_2 i)= (a_1- a_2)+(b_1- b_2) \cdot i$

Ejemplo: $z=(6+2 \cdot i)$, $z'=(-2+3 \cdot i)$

$z+z'=(6+2 \cdot i)+(-2+3 \cdot i)=4+5 \cdot i$

$z-z'=(6+2 \cdot i)-(-2+3 \cdot i)=8-i$

Nota: podemos calcular gráficamente la suma de z_1+z_2 como suma de los vectores con afijos de z_1 y de z_2

2.2. Producto de complejos

El producto de dos complejos se realiza como si fueran reales y a partir de saber que $i^2=-1$:

$z_1 \cdot z_2=(a_1+b_1 \cdot i) \cdot (a_2+b_2 \cdot i)=a_1 \cdot a_2+(a_1 \cdot b_2)i+(a_2 \cdot b_1)i+b_1 \cdot b_2 \cdot i^2=(a_1 \cdot a_2- b_1 \cdot b_2)+(a_2 \cdot b_1+ a_1 \cdot b_2) \cdot i$

Ejemplo: $z=(6+2 \cdot i)$, $z'=(-2+3 \cdot i)$

$z \cdot z'=(6+2 \cdot i) \cdot (-2+3 \cdot i)=(-12-6)+(18-4) \cdot i=-18+14 \cdot i$

Nota: el producto de dos complejos conjugados es un número real igual al cuadrado de la distancia del afijo al centro: $z \cdot \bar{z} =(a+bi)(a-bi)=(a^2+b^2)+(ab-ab) \cdot i=(a^2+b^2)$

2.3. División de complejos

Para calcular la división de dos complejos multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador, así este será un número real:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Ejemplo:

$$\frac{1+2i}{3-4i}=\frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{3+4i+6i-8}{25}=\frac{-5}{25}+\frac{10}{25}i=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$$

2.4. Potencia de números complejos

La potencia de un complejo $z=(a+bi)$ de exponente natural z^n se realiza multiplicando z consigo mismo n veces.

Ejemplo: $(2+3i)^3=(2+3i)(2+3i)(2+3i)=(-5+12i) \cdot (2+3i)=-46+9i$

2.5. Potencias de i

Como sabemos que i=$\sqrt{-1}$ podemos calcular el valor de i^n de la siguiente forma:

$i^0=1$	$i^4=i^2\cdot i^2=-1\cdot(-1)=1$	$i^8=1$	$i^{12}=1$
$i^1=i$	$i^5=i$	$i^9=i$	$i^{13}=i$
$i^2=-1$	$i^6=-1$	$i^{10}=-1$	$i^{14}=-1$
$i^3=i^2\cdot i=-i$	$i^7=-i$	$i^{11}=-i$	$i^{15}=-i$

Luego podemos expresarlo en función del resto de dividir n entre 4:

$$i^n=\begin{cases} 1 & n=4k \ (resto(n:4)=0) \\ i & n=4k+1 \ (resto(n:4)=1) \\ -1 & n=4k+2 \ (resto(n:4)=2) \\ -i & n=4k+3 \ (resto(n:4)=3) \end{cases}$$

Ejercicio: realiza las siguientes operaciones

a) $(1+2i)^3=(1+2i)(1+2i)(1+2i)=(-3+4i)(1+2i)=-11-2i$

b) $\dfrac{-1-i}{-4+5i}=\dfrac{(-1-i)(-4-5i)}{(-4+5i)(-4-5i)}=\dfrac{4+5i+4i-5}{16+25}=\dfrac{-1}{41}+\dfrac{9}{41}i$

c) $\dfrac{(2-i)(3+i)}{-1+2i}-2i=\dfrac{7-i}{-1+2i}-2i=\dfrac{(7-i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}-2i=\dfrac{-9-13i}{5}-2i=-\dfrac{9}{5}-\dfrac{23}{5}i$

d) $i^{2008}=i^0=1$ → resto(2008:4)=0)

e) $i+i^2+...+i^{20}=(i-1-i+1)\cdot 5=0$

Ejercicio: calcular x tal que se cumple:

a) Halla x para que $(x+3i)^2$ sea imaginario puro

$(x+3i)^2=(x+3i)(x+3i)=x^2-9+3xi+3xi=(x^2-9)+6xi$ → imaginario puro si $x^2-9=0$ → $x=\pm3$

b) Halla x para que $(x+3i)^2$ sea real

$(x+3i)^2=(x^2-9)+6xi$ →real si 6x=0 → x=0

c) Halla x para que $\frac{2+xi}{1-xi}$ sea número imaginario

$\dfrac{2+xi}{1-xi}=\dfrac{(2+xi)\cdot(1+xi)}{(1-xi)\cdot(1+xi)}=\dfrac{2-x^2+3xi}{1+x^2}=\dfrac{2-x^2}{1+x^2}+\dfrac{3x}{1+x^2}i$ → imaginario $2-x^2=0$→$x=\pm\sqrt{2}$

d) Halla x para que $\frac{2+xi}{1-xi}$ sea número real

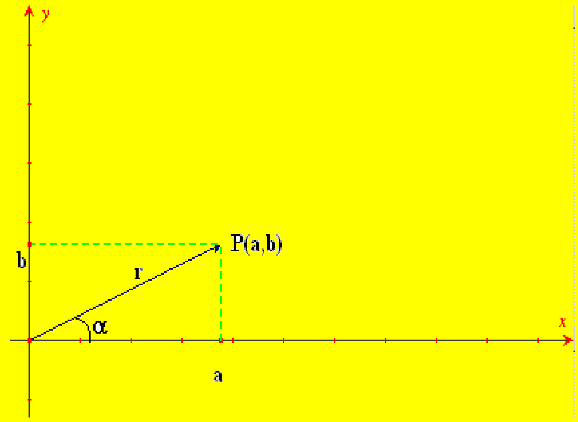
$\dfrac{2+xi}{1-xi}=\dfrac{2-x^2}{1+x^2}+\dfrac{3x}{1+x^2}i$ →real x=0

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

3. Complejos en forma polar

Como hemos visto en el primer punto el complejo z=(a+bi) se puede relacionar con el vector $\vec{v}$=(a,b). La forma polar cosiste en definir el complejo a partir del módulo y el ángulo que forma dicho vector con el sentido positivo del eje OX.

Un complejo en forma polar formado por el módulo y el argumento:



- ***Módulo*** de z (r): es el módulo del vector $\overrightarrow{OP}$ .Y por tanto |z|= $r=\sqrt{a^2+b^2}$
- ***Argumento*** de z (α): es el ángulo que forma el vector $\overrightarrow{OP}$ y el sentido positivo del eje OX:

arg(z)=α= $ar\cot g\left(\frac{b}{a}\right)$

El complejo z con módulo r y ángulo α en forma polar se escribe como z=r_α

Nota: darse cuenta que $ar\cot g\left(\frac{b}{a}\right)$ tiene dos soluciones en [0,360º), hay que dibujar el complejo para saber cuál de las dos soluciones es la real.

Ejemplo: escribir en forma polar z=3-4i

r=|z|= $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

α=arg(z)= $ar\cot g\left(\frac{-4}{3}\right)=\begin{cases} 306{,}87^{\circ} \\ 126{,}87^{\circ}\,(no\ solucion)\end{cases}$ → z=$5_{306{,}87^{\circ}}$

Los **números reales** son:

- Positivos: el argumento es nulo α=0 → ejemplo: 7=$7_{0^{\circ}}$
- Negativos: el argumento es α=180º → ejemplo: -7=$7_{180^{\circ}}$

Los complejos imaginarios son:

- Positivos: el argumento es α=90º → ejemplo: 7i=$7_{90^{\circ}}$
- Negativos: el argumento es α=270º → ejemplo: -7i=$7_{270^{\circ}}$

Ejercicio, expresar en forma polar:

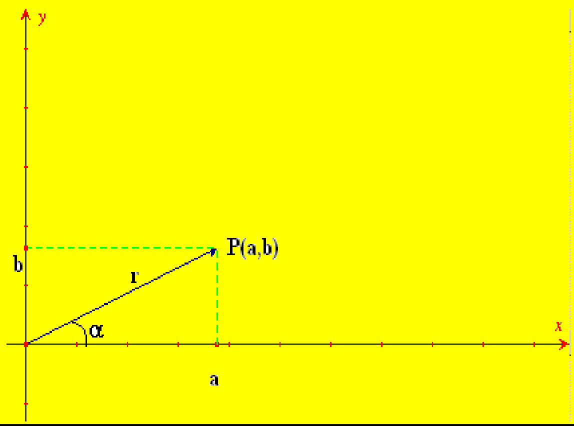
a) z=2+i → r=$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$, α=$ar\cot g\left(\frac{1}{2}\right)=\begin{cases} 26{,}56^{\circ} \\ 206{,}56^{\circ}\,(no\ solución)\end{cases}$ → z=$\sqrt{5}_{\,26{,}56^{\circ}}$

b) z=-1-$\sqrt{3}i$ → r=$\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}$, α=$ar\cot g\left(\sqrt{3}\right)=\begin{cases} 60^{\circ}\,(no\ solución) \\ 240^{\circ}\end{cases}$ → z=$2_{240^{\circ}}$

c) z=-3i → r=$\sqrt{0^2+(3)^2}=3$, α=$ar\cot g\left(-\frac{0}{3}\right)=\begin{cases} 90^{\circ}\,(no\ solución) \\ 270^{\circ}\end{cases}$ → z=$3_{270^{\circ}}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

3.1. Paso de forma polar a forma binómica. Expresión trigonométrica.



A partir de las funciones trigonométricas es sencillo pasar de forma polar a forma binómica:

$a=Re(z)=r\cdot\cos(\alpha)$

$b=Im(z)=r\cdot sen(\alpha)$

El número complejo se puede poner de la siguiente forma ***(forma trigonométrica)***

$z=r(\cos\alpha+i\cdot sen\alpha)$

Ejemplo: pasar a forma binómica $z=4_{60^{\circ}} \rightarrow z=4\cdot(\cos 60+isen30)=(2+2\sqrt{3}\,i)$

Ejercicio: poner los siguientes complejos en forma binómica y trigonométrica los siguientes complejos:

a) $1_{120^{\circ}}=1\cdot(\cos 120+isen120)=(-0.5+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

b) $2_{\pi/3}=2\cdot(\cos(\pi/3)+isen(\pi/3))=1+\sqrt{3}i$

c) $2_{3\pi/2}=2\cdot(\cos(3\pi/2)+isen(3\pi/2))=-2i$

3.2. Operaciones en forma polar

Las mismas operaciones que hicimos con los complejos en forma binómica también podemos hacer en forma polar

Suma y resta: cuando tenemos una suma de complejos en forma polar lo recomendable es pasar los dos a forma polar a binómica sumar y luego volver a pasar a forma polar.

Producto: de dos complejos en forma polar es otro complejo tal que:

- El módulo es igual al producto de los dos módulos
- El argumento es igual a la suma de los argumentos

$r_{\alpha}\cdot s_{\beta}=(r\cdot s)_{\alpha+\beta}$

Cociente: de dos complejos en forma polar es otro complejo tal que:

- El módulo es igual al cociente de los dos módulos
- El argumento es igual a la resta de los dos argumentos

$$\frac{r_{\alpha}}{s_{\beta}}=\left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta}$$

Potencia: de un complejo en forma polar es otro complejo tal que:

- El módulo es la potencia n-ésima del módulo de z
- El argumento es n veces el argumento del argumento de z

$(r_{\alpha})^{n}=(r^{n})_{n\alpha}$

Nota: cuando tenemos una potencia de un número complejo en forma binómica la forma más sencilla de calcular esta potencia es pasar el complejo a forma polar y luego elevar.

Nota: si z=r_α entonces $\bar{z} = r_{360-\alpha}$

Ejercicio: Operar y expresar el resultado en la misma forma

a) $3_{225^o} \cdot 5_{200^o} = 15_{425^o} = 15_{65^o}$

b) $2_{20^o} : 4_{45^o} = 0.5_{-25^o} = 0.5_{335^o}$

c) $2_{30^o} - 4_{330^o} = 2\cdot(\cos 30 + i\,\mathrm{sen}30) - 4(\cos 330 + i\,\mathrm{sen}330) = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3}+3i$

r= $\sqrt{3+9} = \sqrt{12}$ → α= $ar\cot g\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}\right) = \begin{cases} 120^o \\ 300^o\,(no\ solución) \end{cases}$ → z= $\sqrt{12}_{120^o}$

d) $(1-i)^4$→ r= $\sqrt{2}$ α= $ar\cot g(-1) = \begin{cases} 135^o\,(no\ solución) \\ 315^o \end{cases}$ $(1-i)^4 = (\sqrt{2}_{315})^4 = 4_{1260^o} = 4_{180^o} =$ $2\cdot(\cos 180^o + i\,\mathrm{se}180^o) = -4$

e) $-2\cdot i = 2_{180^o} \cdot 1_{90} = 2_{270^o}$

4. Raíces de números complejos

El cálculo de raíces de un número complejo en forma binómica es muy tedioso, por lo que en la práctica se hace por lo general se pasan a forma polar.

La raíz n-ésima de un número complejo tiene n soluciones $\sqrt[n]{r_\alpha}$. Los pasos son los siguientes:

- El módulo es la raíz n-esima del modulo del número dado
- El argumento es $\beta = \frac{\alpha + 360k}{n}$ con k=0,1,2..n-1

$$\sqrt[n]{r_\alpha} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha+360k}{n}}$$

Demostración: veamos que estos complejos son la solución de la raíz n-ésima, para esto elevamos la solución a n y veamos que es igual a z:

$$\left(\left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha+360k}{n}}\right)^n = \left(\sqrt[n]{r}\right)^n_{n\cdot\frac{\alpha+360k}{n}} = r_{\alpha+360k} = r_\alpha$$

Ejemplos: a) $\sqrt[3]{2+2i}$:

r=|z|= $\sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$; α=arg(z)= $arctg(1) = \begin{cases} 45^o \\ 225^o\ (no\ solución) \end{cases}$ → z= $\sqrt{8}_{45^o}$

$$\sqrt[3]{2+2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}_{45^o}} = \sqrt[6]{8}_{\frac{45+360k}{3}} = \begin{cases} \sqrt[6]{8}_{15^o} \\ \sqrt[6]{8}_{135^o} \\ \sqrt[6]{8}_{255^o} \end{cases}$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

b) $\sqrt{4}=\sqrt{4_{0^\circ}}=2_{\frac{0+360k}{2}}\begin{cases}2_{0^\circ}=2\\ 2_{180^\circ}=-2\end{cases}$

c) $\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{27_{180^\circ}}=3_{\frac{180+360k}{3}}=\begin{cases}3_{60^\circ}\\ 3_{180^\circ}=-3\\ 3_{300^\circ}\end{cases}$

Nota: vemos que haciendo las raíces de números reales en las soluciones en el campo de los complejos las soluciones reales están incluidas en estas.

Ejercicio: calcular las siguientes raíces

a) $\sqrt{3_{150^\circ}}=\begin{cases}\sqrt{3}_{75}\\ \sqrt{3}_{255^\circ}\end{cases}$

b) $\sqrt[4]{i}=\sqrt[4]{1_{90}}=\begin{cases}1_{22.5^\circ}\\ 1_{112.5^\circ}\\ 1_{202.5^\circ}\\ 1_{292.5^\circ}\end{cases}$

c) $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{27_{0^\circ}}=\begin{cases}3_{0^\circ}=3\\ 3_{120^\circ}\\ 3_{240^\circ}\end{cases}$

d) $\sqrt[5]{-1+i}=\sqrt[5]{\sqrt{2}_{135^\circ}}=\begin{cases}\sqrt[10]{2}_{27}\\ \sqrt[10]{2}_{99}\\ \sqrt[10]{2}_{171}\\ \sqrt[10]{2}_{243}\\ \sqrt[10]{2}_{315}\end{cases}$

4.1. Representación de raíces de un número complejo

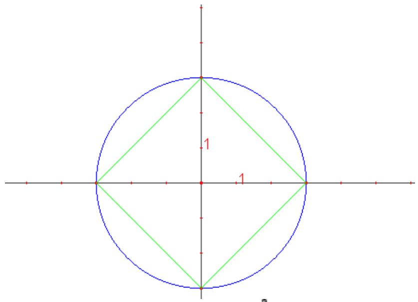
Cuando representamos las raíces n-ésimas de un número complejo se cumple que todas las soluciones:

- Tienen el mismo módulo (misma distancia del origen)
- Dos raíces consecutivas se diferencian en que el argumento es 360/n más que el anterior

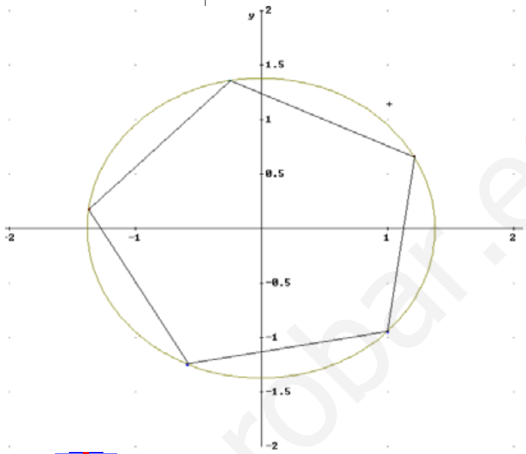
Con estas dos propiedades se cumplen que los afijos forman un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio r=modulo raíz.

Ejemplos:

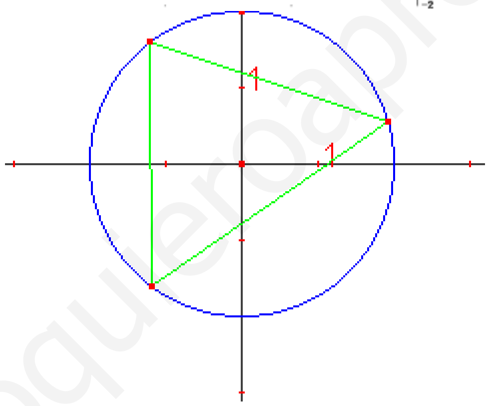
a) $\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{81_{0^\circ}}=\begin{cases}3_{0^\circ}=3\\ 3_{90^\circ}=3i\\ 3_{180^\circ}=-3\\ 3_{270^\circ}=-3i\end{cases}$



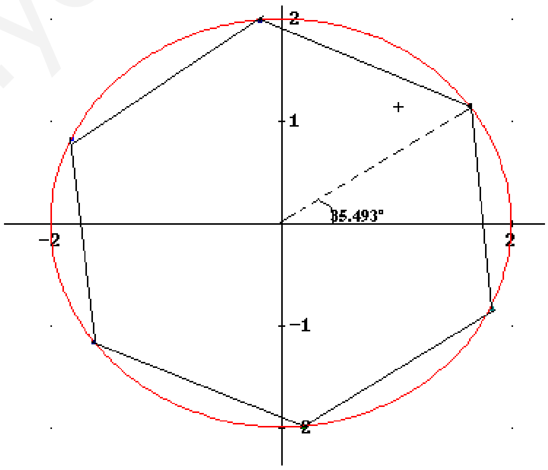
b) $\sqrt[5]{(-4+3i)}=\sqrt[5]{5_{143,13}}=\begin{cases}\sqrt[5]{5}_{\,28,6^\circ}\\ \sqrt[5]{5}_{\,100,6^\circ}\\ \sqrt[5]{5}_{\,172,6^\circ}\\ \sqrt[5]{5}_{\,244,6^\circ}\\ \sqrt[5]{5}_{\,316,6^\circ}\end{cases}$



c) $\sqrt[3]{8_{30^\circ}}=\begin{cases}2_{10^\circ}\\ 2_{130^\circ}\\ 2_{250^\circ}\end{cases}$



Ejercicio: calcular z y n sabiendo que las raíces n-ésimas de z sus soluciones son:



Sabemos que n=6, pues es hay 6 soluciones (hexágono). Calculemos $z=r_\alpha$:

$\sqrt[6]{r}=2\rightarrow r=2^6=64$

$\alpha=35.493\cdot 6=212.96^\circ$ **z=$64_{212.96^\circ}$**

Ejercicio: de un complejo z sabemos que su raíz cuarta tiene una de sus soluciones en el afijo A(3,2), calcular el resto de soluciones

$z_1=3+2i=\sqrt{13}_{33.69^\circ}$

$z_2=\sqrt{13}_{33.69^\circ+90^\circ}=\sqrt{13}_{123.69^\circ}$

$z_3=\sqrt{13}_{33.69^\circ+180^\circ}=\sqrt{13}_{213.69^\circ}$

$z_4=\sqrt{13}_{33.69^\circ+270^\circ}=\sqrt{13}_{303.69^\circ}$

$z=\left(\sqrt{13}_{33.69^\circ}\right)^4=169_{134.76^\circ}$

5. Ecuaciones con números complejos.

Cuando trabajábamos con polinomios dijimos que el número de raíces reales del polinomio (soluciones P(x)=0) eran a lo sumo igual al grado del polinomio. Pero y si consideramos las soluciones complejas ¿cuántas soluciones tiene?. Esto es lo que demostró Gauss en lo que hoy se llama teorema fundamental del álgebra:

Teorema fundamental del álgebra: todo polinomio de grado n con coeficientes reales o complejos tiene n raíces (contando el grado demultiplicidad).

$a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n=0 \rightarrow$ n soluciones

No siempre es sencillo calcular las n raíces. Los métodos usados para la resolución son los mismos que para soluciones reales. Veamos algún ejemplo:

- $z^2-4z+8=0$

  $$z=\frac{4\pm\sqrt{16-32}}{2}=2\pm 2i$$

- $z^3+4z^2+9z+36=0$

  Como es de grado 3 primero tendremos que buscar soluciones por Ruffini

  $z^3+4z^2+9z+36=(z+4)(z^2+9)=(z+4)(z+3i)(z-3i) \rightarrow$ soluciones $z=-4$, $z=\pm 3i$

- $z^3+8i=0$

  $$z=\sqrt[3]{-8i}=\sqrt[3]{8_{270^\circ}}=\begin{cases}2_{90^\circ}=2i\\ 2_{210^\circ}\\ 2_{330^\circ}\end{cases}$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio : resolver las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $z^2+z+1=0$

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=\begin{cases}\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\\[2mm]\dfrac{-1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\end{cases}$$

b) $z^4+256=0$

$$z=\sqrt[4]{-256}=\sqrt[4]{256_{180}}=\begin{cases}4_{45^\circ}\\4_{135^\circ}\\4_{225^\circ}\\4_{315^\circ}\end{cases}$$

c) $z^3-6z^2+10z-8=0$

$z^3-6z^2+10z-8=(z-4)\cdot(z^2-2z+2)=(z-4)(z-(1+i))(z-(1-i))$

$z^2-2z+2=0 \rightarrow z=1\pm i$

d) $z^3+64i=0$

$z^3=-64i \rightarrow z=\sqrt[3]{-64i}=\sqrt[3]{64_{270^\circ}}=\begin{cases}4_{90^\circ}\\4_{210^\circ}\\4_{330^\circ}\end{cases}$

e) $z^6-28z^3+27=0$

$z^6-28z^3+27=0 \rightarrow z^3=t,\ z^6=t^2 \rightarrow t^2-28t+27=0$

$$t=\frac{28\pm\sqrt{676}}{2}=\frac{28\pm 26}{2}=\begin{cases}27\\1\end{cases}$$

$$z=\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1_0}=\begin{cases}1_0=1\\1_{120^\circ}\\1_{240^\circ}\end{cases}$$

$$z=\sqrt[3]{27}=27_0=\begin{cases}3_0=3\\3_{120^\circ}\\3_{240^\circ}\end{cases}$$

5.1. Representación de ecuaciones en el campo de los complejos.

Dentro de las ecuaciones en el campo de los complejos centrémonos en aquellas que sus coeficientes son reales. Tendremos de esta forma que la ecuación a resolver es de la forma:

P(z)=0 con P(z) un polinomio.

Nota: La variable del polinomio se define z, en vez de x, para tener en cuenta que z puede tomar valores complejos (en cambio $x\in R$).

Por el teorema fundamental del álgebra el nº de soluciones es igual al grado del polinomio. Para ver la representación de las soluciones de la ecuación $\{z_1,z_2,\ldots,z_n\}$, es decir las raíces del polinomio ($P(z_i)=0$) recordemos cómo se factoriza el polinomio (tema 2). Los factores irreducibles en los que se descomponen un polinomio son de dos tipos:

- ✓ Polinomios de 1^er grado del tipo $(z-x_i)\rightarrow x_i$ solución real.
- ✓ Polinomios de 2º grado sin soluciones reales (ax^2+bx+c, cuyo discriminante $\Delta=b^2-4ac<0$). Veamos las soluciones complejas de estos polinomios:

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b\pm i\Delta}{2a}=\begin{cases} z_1=\dfrac{-b}{2a}+\dfrac{\Delta}{2a}i \\ z_2=\dfrac{-b}{2a}-\dfrac{\Delta}{2a}i \end{cases}$$ que son complejos conjugados,

es decir $z_1=\overline{z_2}$

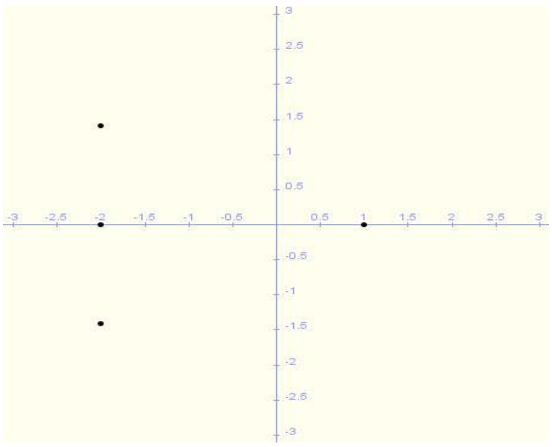
Conclusión: las soluciones en el campo de los complejos son:

- ✓ Números reales
- ✓ Las soluciones complejas vienen en parejas de complejos conjugados.

Ejemplo: representar las soluciones en el campo de los complejos de las siguientes ecuaciones con coeficientes reales:

a) $z^4+5z^3+8z^2-2z-12=0$. Factorizando $\rightarrow (z-1)\cdot(z+2)\cdot(z^2+4z+6)=0$

Soluciones: $z_1=1$, $z_2=-2$ (reales), $z=\frac{-4\pm\sqrt{-8}}{2}=\begin{cases} z_3=-2+\sqrt{2}i \\ z_4=-2-\sqrt{2}i \end{cases}$ (complejos conjugados)

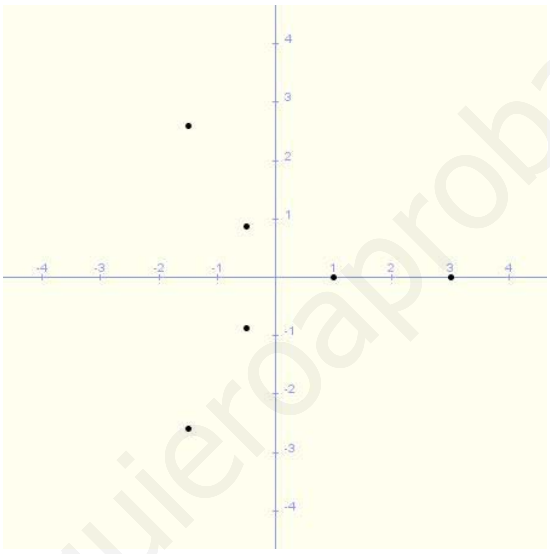


b) $z^6-28z^3+27=0$: Cambio de variable $z^3=t$, $z^6=t^2$ → $t^2-28t+27=0$

$$t=\frac{28\pm\sqrt{676}}{2}=\frac{28\pm 26}{2}=\begin{cases}27\\1\end{cases}$$

$$z=\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1_0}=\begin{cases}1_0=1\\1_{120^\circ}\\1_{240^\circ}\end{cases}$$

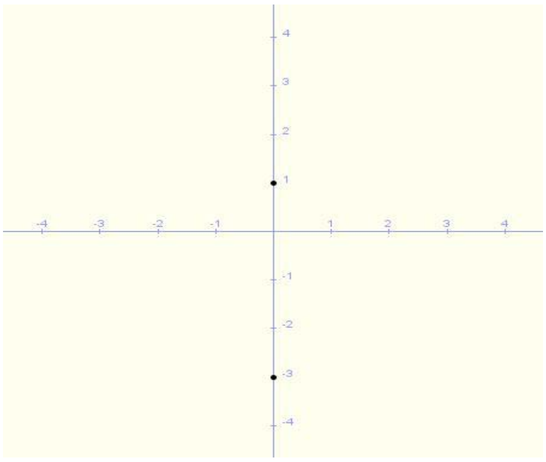
$$z=\sqrt[3]{27}=27_0=\begin{cases}3_0=3\\3_{120^\circ}\\3_{240^\circ}\end{cases}$$



Las ecuaciones en las que alguno de sus coeficientes no son reales no tienen que cumplir lo visto para aquellas con coeficientes reales, es decir puede tener soluciones que no son o reales o complejas conjugadas

Ejemplo:

$z^2+2iz+3=0$ → $z=\frac{-2i\pm\sqrt{-4-12}}{2}=\frac{-2i\pm\sqrt{-16}}{2}=\begin{cases}z_1=-i+2i=i\\z_2=-i-2i=-3i\end{cases}$ no son conjugados



Ejercicios finales

1.- Expresa los siguientes números complejos en forma binómica

a) $\sqrt{-16}+3$ **b)** $\sqrt{-4}-2$ **c)** $\sqrt{-8}+\sqrt{2}$

Solución:

a) 3+4i b) -2+2i c) $\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$

**2.– Represent
a y obtén en forma polar los siguientes complejos**

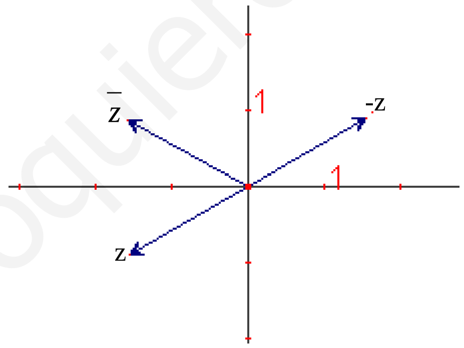
a) z=-1-$\sqrt{3}$i **b)** –z **c)** $\bar{z}$

Solución:

a) z=-1-$\sqrt{3}$i → r=$\sqrt{4}=2$, $\alpha=arct\left(\sqrt{3}\right)=\begin{cases}60^{o}\\240^{o}\end{cases}$ → z= $2_{240^{o}}$

b) -z=1+$\sqrt{3}$i, → r=$\sqrt{4}=2$, $\alpha=arct\left(\sqrt{3}\right)=\begin{cases}60^{o}\\240^{o}\end{cases}$ → z= $2_{60^{o}}$

c) $\bar{z}$=-1+$\sqrt{3}$i,→ r=$\sqrt{4}=2$, $\alpha=arct\left(-\sqrt{3}\right)=\begin{cases}300^{o}\\120^{o}\end{cases}$ → z= $2_{120^{o}}$



3.- Calcular las siguientes potencias del número i:

a) i^{211} **b)** i^{-1} **c)** i^{-2} **d)** i^{-3} **e)** i^{-4}

Solución

a) resto(211:4)=3 → i^3=-i

b) $i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i\cdot i}=\frac{i}{-1}=-i$

c) $i^{-2}=\frac{1}{i^2}=-1$

d) $i^{-3}=\frac{1}{i^3}=\frac{1}{-i}=\frac{i}{-i\cdot i}=i$

e) $i^{-4}=\frac{1}{i^4}=\frac{1}{1}=1$

4.- Opera y simplifica al máximo:

a) $\dfrac{30(1-i)}{-4-2i}+(2-3i)$

$$\frac{30(1-i)}{-4-2i}+(2-3i)=\frac{-30+30i}{4+2i}+\frac{(2-3i)\cdot(4+2i)}{4+2i}=\frac{-30+30i+8+4i-12i+6}{4+2i}=$$
$$\frac{-16+22i}{4+2i}=\frac{(-16+22i)(4-2i)}{20}=\frac{-64+44}{20}+\frac{32i+88i}{20}=\frac{-20}{20}+\frac{120}{20}i=-1+6i$$

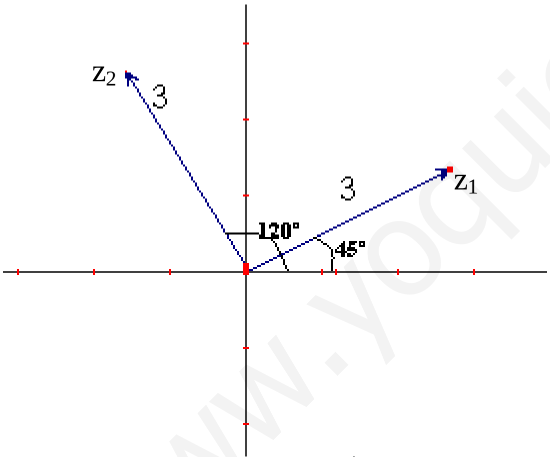
b) $2i-\dfrac{(2+3i)3}{-3+i}$

$$2i-\frac{(2+3i)3}{-3+i}=2i-\frac{(6+9i)(-3-i)}{10}=2i-\left(\frac{-18+9}{10}+\frac{-27i-6i}{10}\right)=2i+0{,}9+3{,}3i=0{,}9+5{,}3i$$

c) $\dfrac{(1+3i)^2-(2i)^2}{-3+4i}$

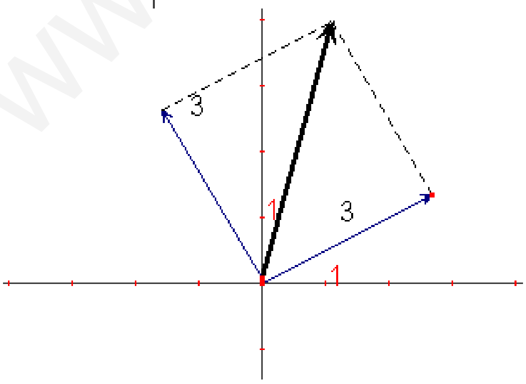
$$\frac{(1+3i)^2-(2i)^2}{-3+4i}=\frac{(1+3i)(1+3i)+4}{-3+4i}=\frac{-8+6i+4}{-3+4i}=\frac{(-4+6i)(-3-4i)}{25}=\frac{12+24}{25}+\frac{16i-18i}{25}=\frac{36}{25}-\frac{2}{25}i$$

5. - Sean z_1 y z_2 con lo siguientes afijos:

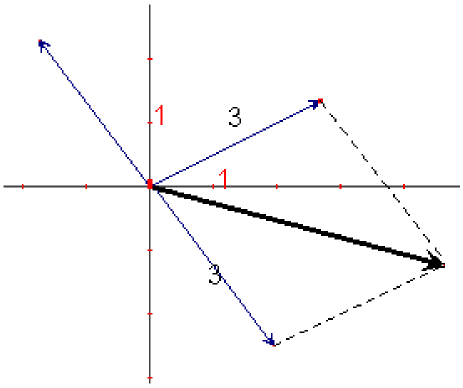


a) z_1+z_2
b) z_1-z_2
c) $z_1\cdot z_2$
d) $z_1:z_2$

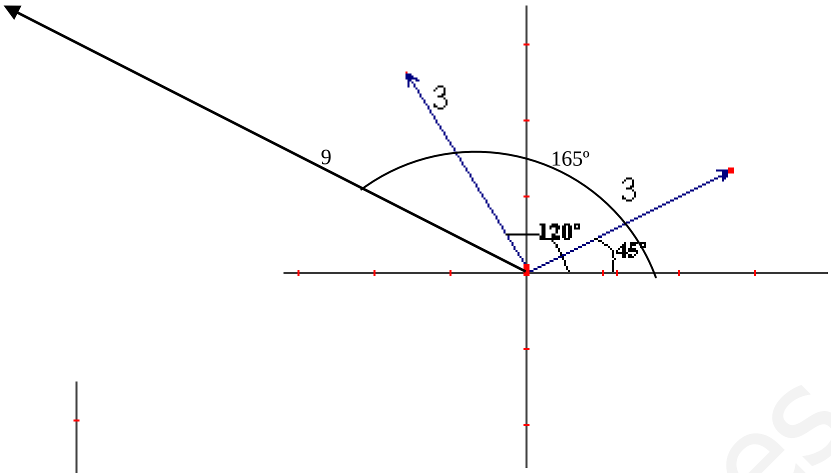
a)



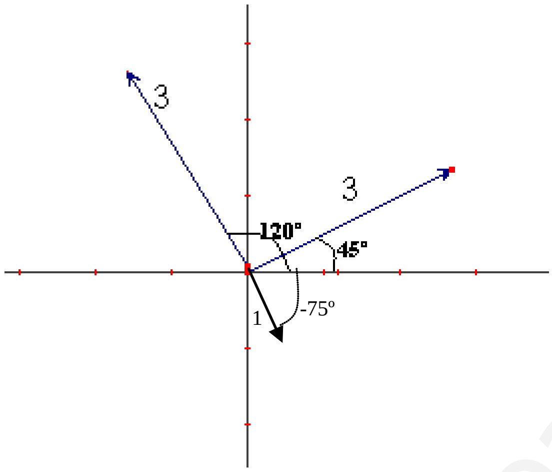
b)



c)



d)



6.- Calcula x para que se cumpla:

a) $\dfrac{7+11i}{x-2i}$ es real

b) $\dfrac{7+11i}{x-2i}$ es imaginario puro

Soluciones:

a) $\dfrac{7+11i}{x-2i}=\dfrac{(7+11i)(x+2i)}{x^2+4}=\dfrac{7x-22}{x^2+4}+\dfrac{14i+11xi}{x^2+4}$ → real si 14+11x=0 → x=-14/11

b) Imaginario si x=22/7

Otra forma a partir de notación polar :

7+11i → α=arctg(11/7)

x-2i → α=arctg(-2/x)

a) arctg(-2/x)=arctg(11/7) → -2/x=11/7 → x=-14/11

b) arctg(-2/x)=-90+57.53 → -2/x=-7/11 → x=-22/7

7.- Escribe en forma polar

a) (-3+4i) **b) $\sqrt{3}+i$** **c) -3i** **d) -3**

Solución

a) r $=\sqrt{9+16}=5$ $\propto = arcotg\left(-\frac{4}{3}\right)=\begin{matrix}306.87\\126.87\end{matrix}$ → $z=5_{126.9^\circ}$

b) r $=\sqrt{3+1}=2$ $\propto = arcotg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\begin{matrix}30\\210\end{matrix}$ → $z=2_{30^\circ}$

c) $-3i=3_{270^\circ}$

d) $-3=3_{180^\circ}$

8.- Escribe en forma polar y binómica los conjugados y opuestos de

a) $z=5_{120^\circ}$ **b) $z=3_{\pi/2}$** **c) $z=\sqrt{3}_{\pi/6}$**

Solución

a) $-z=5_{120^\circ+180^\circ}=5_{300^\circ}$ $\quad \bar{z}=5_{120+90^\circ}=5_{210^\circ}$

b) $-z=3_{\pi/2+\pi}=3_{3\pi/2}$ $\quad \bar{z}=3_{3\pi/2}$

c) $-z=\sqrt{3}_{\pi/6+\pi}=\sqrt{3}_{7\pi/6}$ $\quad \bar{z}=\sqrt{3}_{\pi/6+3\pi/2}=\sqrt{3}_{5\pi/6}$

9) Efectúa las siguientes operaciones expresando el resultado en forma polar

a) $4_{120^\circ}\cdot 2_{300}=8_{420^\circ}=8_{60^\circ}$

b) $\dfrac{4_{\pi/4}}{2_{90}}=2_{-45^\circ}=2_{315}$

c) $\left(\sqrt{4}_{200^\circ}\right)^6=4^3{}_{1200}=64_{120^\circ}$

d) $2_{45^\circ}-4_{315^\circ}=2(\cos 45+i\cdot sen45)-4(\cos 315+i\cdot sen315)=(-\sqrt{2}+3\sqrt{2}i)=\sqrt{20}_{108,4^\circ}$

e) $\dfrac{i^{302}}{i^{485}-i^{274}}=\dfrac{-1}{i+1}=\dfrac{-1(1-i)}{2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$

10.- Utilizando el binomio de Newton y la potencia en forma polar calcular y comprobar que el resultado es el mismo: $(2-3\sqrt{2}i)^4$

$(2-3\sqrt{2}i)^4=1\cdot 2^4+4\cdot 2^3\cdot(-3\sqrt{2}i)+6\cdot 2^2\cdot(-3\sqrt{2}i)^2+4\cdot 2\cdot(-3\sqrt{2}i)^3+1\cdot(-3\sqrt{2}i)^4=$

$=16-96\sqrt{2}\cdot i-432+432\sqrt{2}i+324=-92+336\sqrt{2}i$

$(2-3\sqrt{2}i)=(\sqrt{22})_{295,24^\circ}$ → $((\sqrt{22})_{295,24^\circ})^4=484_{100,96^\circ}$

Comprobación $-92+336\sqrt{2}i=484_{100,96^\circ}$

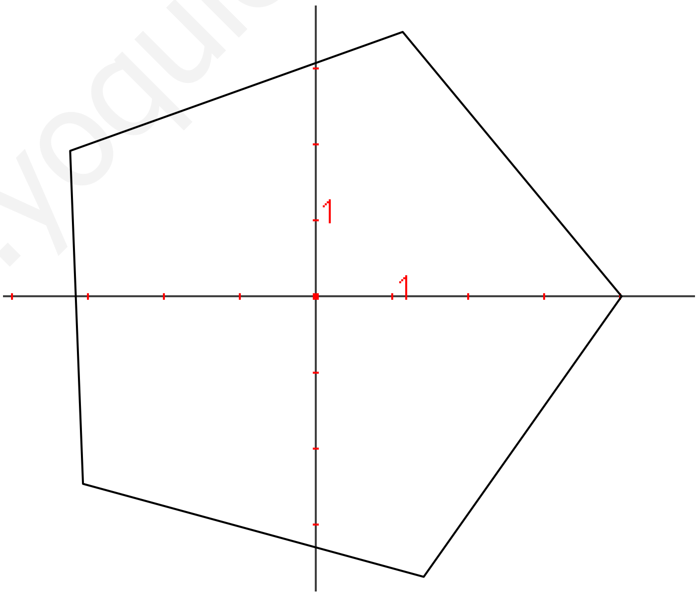
11.- Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{64_{120^\circ}} = \begin{cases} 4_{40^\circ} \\ 4_{160^\circ} \\ 4_{280^\circ} \end{cases}$ **b)** $\sqrt[4]{9_{220^\circ}} = \begin{cases} \sqrt{3}_{55^\circ} \\ \sqrt{3}_{145^\circ} \\ \sqrt{3}_{235^\circ} \\ \sqrt{3}_{325^\circ} \end{cases}$ **c)** $\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180^\circ}} = \begin{cases} 2_{30^\circ} \\ 2_{90^\circ} = 2i \\ 2_{150^\circ} \\ 2_{210^\circ} \\ 2_{270^\circ} = -2i \\ 2_{330^\circ} \end{cases}$

d) $\sqrt[5]{1-\sqrt{3}i} = \sqrt[5]{2_{300}} = \begin{cases} \sqrt[5]{2}_{60^\circ} \\ \sqrt[5]{2}_{132^\circ} \\ \sqrt[5]{2}_{204^\circ} \\ \sqrt[5]{2}_{276^\circ} \\ \sqrt[5]{2}_{348^\circ} \end{cases}$ **e)** $\sqrt[4]{-i} = \sqrt[4]{1_{270^\circ}} = \begin{cases} 1_{67.5^\circ} \\ 1_{157,5^\circ} \\ 1_{247,5^\circ} \\ 1_{337,5^\circ} \end{cases}$

f) $\sqrt[4]{\dfrac{-1+i}{1+i}} = \sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{12}_{135^\circ}}{\sqrt{2}_{45^\circ}}} = \sqrt[4]{1_{90}} = \begin{matrix} 1_{22,5^\circ} \\ 1_{112,5^\circ} \\ 1_{202,5^\circ} \\ 1_{292,5^\circ} \end{matrix}$

12.- En el gráfico se muestra las soluciones de las raíces de un número. Determínalas y descubre que número es.



Es una raíz quinta al haber 5 soluciones →una solución es 4_0, luego el resto son 4_{72°, 4_{144°, 4_{216°, 4_{288}

Calculemos z: $z=(4_0)^5=1024$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

13.-Resuelve las siguientes ecuaciones en el campo de los complejos:

a) z^2-8iz+4i-19=0

b) z^4+1=0

c) z^4+3z^2+2=0

a) z^2-8iz+4i-19=0 →

$$z=\frac{8i+\sqrt{-64-16i+76}}{2}=4i+\sqrt{3-4i}=\begin{cases}4i+2-i=2+3i\\4i-2+i=-2+5i\end{cases}$$

b) $z=\sqrt[4]{1}=\begin{cases}1_0=1\\1_{90^\circ}=i\\1_{180^\circ}=-1\\1_{270^\circ}=-i\end{cases}$

c) t^2=z , t^4=z^2 → t^2+3t+2=0 → t=-1, t=-2 $z=\sqrt{-1}=\begin{cases}i\\-i\end{cases}$, $z=\sqrt{-2}=\begin{cases}i\sqrt{2}\\-i\sqrt{2}\end{cases}$

14.-Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Determinar los números complejos cuyo cuadrado sea igual a su conjugado

b) Encuentra los números complejos cuyo conjugado coincide con su opuesto

c) Determinar los números complejos cuyo conjugado es igual a su inverso

Solución

a) $z^2=\bar{z}$ → $(r_\alpha)^2=r_{360-\alpha}$ → $r^2{}_{2\alpha}=r_{360-\alpha}$

$r=1$

$$360-\alpha+360k=2\alpha\rightarrow\alpha=120+120k\begin{cases}k=-1\rightarrow 0^\circ\\k=0\rightarrow 120^\circ\\k=1\rightarrow 240^\circ\end{cases}$$

$z_1=1$, $z_2=1_{120}$, $z_3=1_{240}$

Comprobación:

$1^2=1$

$(1_{120^\circ})^2=1_{240}$

$(1_{240^\circ})^2=1_{480}=1_{120^\circ}$

b) $\bar{z}=-z$ llamamos $z=a+bi$, luego $\bar{z}=a-bi$; $-z=-a-bi$ → $\bar{z}=-z$ → a=-a, -b=-b→a=0, b∈R → z=bi, es decir los imaginarios puros

c) $\bar{z}=\dfrac{1}{z}\xrightarrow{z=r_\alpha} r_{360-\alpha}=\dfrac{1}{r_\alpha}\to r_{360-\alpha}=\left(\dfrac{1}{r}\right)_{-\alpha}\to\begin{cases} r=\dfrac{1}{r} \\ 360-\alpha=-\alpha\end{cases}$

$\begin{matrix} r^2=1\to r=1 \\ y\ 360-\alpha\equiv\alpha\end{matrix}$. Luego todos los complejos con módulo 1 cumplen esta propiedad.

Veamos un ejemplo z=1_{10^o} → $\bar{z}=1_{350^o}$ $\quad \dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1_{10^o}}=1_{-10}=1_{350}$

15.- La suma de un complejo y su conjugados es 16 y la suma de sus módulos es 20. Determinarlos:

z=a+bi y $\bar{z}=a-bi$

z+$\bar{z}$=2a=16 → a=8

$2\sqrt{a^2+b^2}=20\to\sqrt{64+b^2}=10\to b=6$

16.- Encuentra los complejos tales que su cubo es igual a su raíz cuadrada

z=r_α → $z^3=r^3_{3\alpha}$ y $\sqrt{z}=\begin{cases}\sqrt{r}_{\alpha/2} \\ \sqrt{r}_{\alpha/2+180}\end{cases}$

Veamos el módulo: $r^3=\sqrt{r}\to r^6=r\to r=0,\ r=1$

Veamos el ángulo:

a) $\quad 3\alpha=\dfrac{\alpha}{2}+360k\to\dfrac{5}{2}\alpha=360k\to\alpha=144k=\begin{cases}k=0\to\alpha=0^o \\ k=1\to\alpha=144^o \\ k=2\to\alpha=288^o\end{cases}$

b) $\quad 3\alpha=\dfrac{\alpha}{2}+180+360k\to\dfrac{5}{2}\alpha=180+360k\to\alpha=72+144k=\begin{cases}k=0\to\alpha=72^o \\ k=1\to\alpha=216^o\end{cases}$

Comprobación:

$z_1=0\to 0^3=0;\ \sqrt{0}=0$

$z_2=1_0\to(1_0)^3=1\to\sqrt{1_0}=\begin{cases}1 \\ -1\end{cases}$

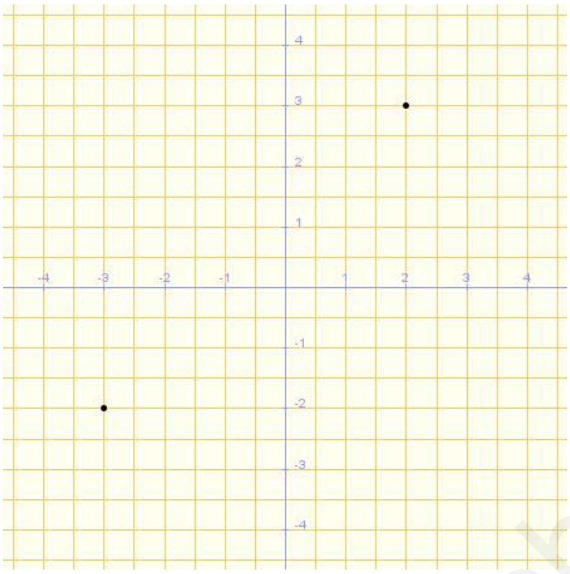
$z_3=1_{144^o}\to(1_{144^o})^3=1_{72^o}\to\sqrt{1_{144}}=\begin{cases}1_{72} \\ 1_{252}\end{cases}$

$z_4=1_{288^o}\to(1_{288^o})^3=1_{144^o}\to\sqrt{1_{288}}=\begin{cases}1_{144} \\ 1_{324}\end{cases}$

$z_5=1_{72^o}\to(1_{72^o})^3=1_{216^o}\to\sqrt{1_{72}}=\begin{cases}1_{36} \\ 1_{216}\end{cases}$

$z_6=1_{216^o}\to(1_{216^o})^3=1_{288^o}\to\sqrt{1_{216}}=\begin{cases}1_{108} \\ 1_{288}\end{cases}$

17.- Encuentra el polinomio de 4º grado con coeficientes reales en los que sabemos que el coeficiente de mayor grado es 3 y dos de sus 4 raíces son:



z_1=2+3i , z_2=-3-2i.

Como en el enunciado nos dicen que el polinomio tiene coeficientes reales, se cumple que si alguna raíz es compleja, su complejo conjugado también es raíz. De esta forma

$z_3=\overline{z_1} = 2 - 3i,\ z_4=\overline{z_2} = -3 + 2i$

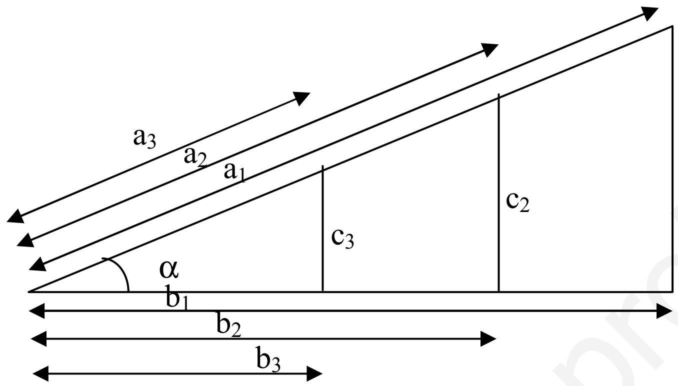
$P(z)=3\cdot(z-(2+3i))\cdot(z-(2-3i))\cdot(z-(-3+2i))\cdot(z-(-3-2i))=3\cdot(z^2-4z+13)\cdot(z^2+6z+13)=$

$= 3x^4 + 6x^3 - 24x^2 - 102x + 117$

Trigonometría (I)

1. Razones trigonométricas en triángulos rectángulos. (Ángulos agudos)

Por criterios de semejanza se cumple que los triángulos rectángulos con un ángulo igual son semejantes, y por tanto sus lados proporcionales. De esta manera conociendo el valor de uno de los ángulos de un triángulo rectángulo, α, las razones de sus lados están fijadas. Estas razones es lo que llamamos razones trigonométricas del ángulo α. Veámoslo gráficamente



$$\frac{c_1}{a_1}=\frac{c_2}{a_2}=\frac{c_3}{a_3}=sen(\alpha)=\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$
$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}=\cos(\alpha)=\frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa}$$
$$\frac{c_1}{b_1}=\frac{c_2}{b_2}=\frac{c_3}{b_3}=tg(\alpha)=\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo}$$

Es importante darse cuenta que el valor de las razones trigonométricas depende del ángulo y no del triángulo.

Como sabemos a partir del teorema de Pitágoras el valor de la hipotenusa (a) de un triángulo es mayor que el de los dos catetos (b y c), por tanto se cumple que:

$0<sen(\alpha)<1$, $0<\cos(\alpha)<1$ cuando $\alpha\in(0,90º)$.

A partir de estas razones trigonométricas fundamentales podemos definir las siguientes:

$$\sec(\alpha)=\frac{1}{\cos(\alpha)}=\frac{hipotenusa}{cateto\ contiguo}$$
$$\cos ec(\alpha)=\frac{1}{sen(\alpha)}=\frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$
$$\cot g(\alpha)=\frac{1}{tg(\alpha)}=\frac{cateto\ contiguo}{cateto\ opuesto}$$

2. Relaciones trigonométricas fundamentales

Los valores de sen(α), cos(α) y tg(α) no son independientes, están relacionados entre sí, como veremos en este apartado. De hecho sabiendo que α∈(0º,90º) conociendo el valor de una de las tres razones podemos obtener las otras dos.

Relaciones fundamentales

Relación 1 → $tg(\alpha)=\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

Relación 2 → $sen^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$

Notación: $sen^2(\alpha)=(sen(\alpha))^2 \quad \cos^2(\alpha)=(\cos(\alpha))^2$

Relación 3 → $1+tg^2(\alpha)=\frac{1}{\cos^2(\alpha)}$

Relación 4 → $1+\cot g^2(\alpha)=\frac{1}{sen^2(\alpha)}$

Demostración:

1) $$\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{\frac{cat\ opue}{hip}}{\frac{cat\ cont}{hip}}=\frac{cat\ opue}{cat\ cont}=tg(\alpha)$$

2) $$sen^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=\left(\frac{cat\ op}{hip}\right)^2+\left(\frac{cat\ cont}{hip}\right)^2=\frac{\overbrace{cat\,op^2+cat\,cont^2}^{Pitagoras}}{hip^2}=\frac{hip^2}{hip^2}=1$$

3) $$1+tg^2(\alpha)=1+\frac{sen^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}=\frac{\cos^2(\alpha)+sen^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}=\frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

4) $$1+\cot g^2(\alpha)=1+\frac{\cos^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)}=\frac{sen^2(\alpha)+\cos s^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)}=\frac{1}{sen^2(\alpha)}$$

Ejercicio: calcular las restantes razones trigonométricas

1) sen(45)= $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos^2(45)+sen^2(45)=1$ → $\cos^2(45)+1/2=1$ → $\cos^2(45)=1/2$ →

$$\cos(45)=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\xrightarrow{como\ 45<90º\ solo\ soluciones\ positivas}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg(45)=\frac{sen(45)}{\cos(45)}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$$

2) tg(30)= $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\left.\begin{array}{r} tg(30)=\frac{sen(30)}{cos(30)}=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \mathrm{sen}^2(30)+\cos^2(30)=1 \end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} \frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right\}\rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}x \rightarrow x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2=1$$

$(1+1/3)x^2=1 \rightarrow x^2=3/4 \rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x=\cos(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (cuando $\alpha\in(0,90^o)$ razones trigonométricas son positivas)

$y=\mathrm{sen}(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos(\alpha)=1/2$

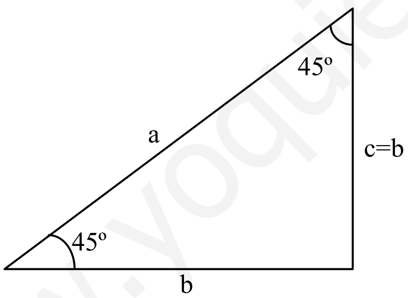
Otra forma: $1+tg^2(30)=\frac{1}{\cos^2(30)} \rightarrow 1+\frac{1}{3}=\frac{1}{\cos^2(30)} \rightarrow \cos(30)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$tg(30)=\frac{sen(30)}{\cos(30)} \rightarrow sen(30)=tg(30)\cdot\cos(30)=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}$$

3. Razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º

Las razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º son muy importantes, ya que se usan mucho. Además se caracterizan porque se pueden calcular a partir del teorema de Pitágoras. Vamos a calcularlas

a) Ángulo α=45º, si dibujamos un triángulo rectángulo con α=45º se caracteriza que es isósceles:



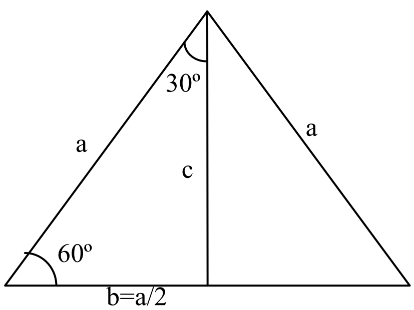
$a^2=b^2+b^2=2b^2 \rightarrow a=\sqrt{2}b$

sen(45)=$\frac{c}{a}=\frac{b}{\sqrt{2}b}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

cos(45)=$\frac{b}{a}=\frac{b}{\sqrt{2}b}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

tg(45)=$\frac{sen(45)}{\cos(45)}=1$

b) Ángulo α=30º y α=60º, este ángulo es el que se forma al dividir un triángulo equilátero en dos:



$c^2=a^2-(a/2)^2 \rightarrow c^2=3a^2/4 \rightarrow c=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

sen(60º)=cos(30)=$\frac{c}{a}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

cos(60º)=sen(30)=$\frac{b}{a}=\frac{a/2}{a}=\frac{1}{2}$

tg(60º)=$\frac{sen(60)}{\cos(60)}=\sqrt{3}$

tg(30)=$\frac{sen(30)}{\cos(30)}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. Resolución de triángulos rectángulos.

Resolver un triángulo rectángulo es obtener a partir de los datos conocidos todos los ángulos y lados de dicho triángulo. Para resolver un triángulo utilizaremos los siguientes teoremas:

1. Teorema de Pitágoras
2. Suma de ángulos es 180º
3. Razones trigonométricas

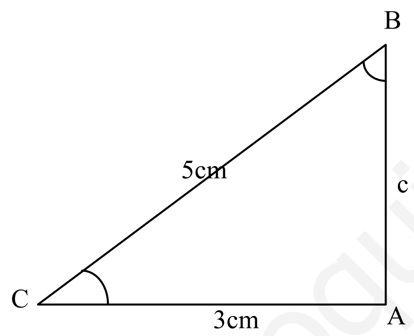
Todo triángulo rectángulo se puede calcular si conocemos dos datos, siempre que uno de ellos sea un lado. Vamos a ver dos casos

4.1. Conociendo dos lados

Nos faltaría conocer un lado y dos ángulos (ya que el otro ángulo es 90º). Pasos

a) El tercer lado se calcula por Pitágoras
b) Calculamos los otros dos ángulo a partir de las razones trigonométricas

Ejemplo: resolver el siguiente triángulo



c=$\sqrt{5^2-3^2}$=4cm

cos $\hat{C}$=3/5 → $\hat{C}$=arcos(3/5)=53º7’48”

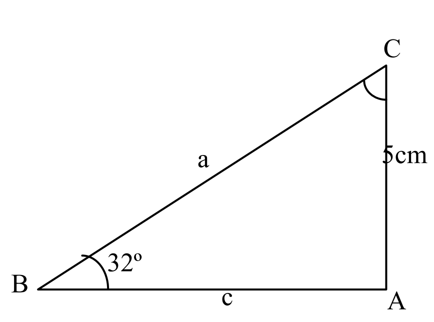
$\hat{B}=90º-\hat{C}=36º\,52'12''$

4.2. Conociendo un lado y un ángulo

Nos falta conocer otro ángulo y dos lados

a) Obtenemos el otro ángulo restando a 90º el que nos han dado
b) Obtendremos los otros dos lados a partir de las razones trigonométricas

Ejemplo: resolver el siguiente triángulo



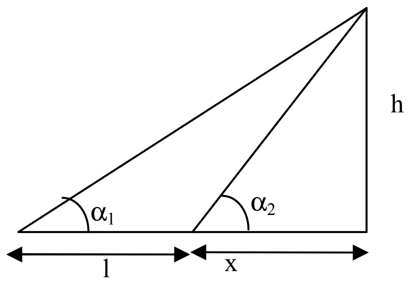
$\hat{C}=90º-\hat{B}=58º$

sen(32)=5/a → a=5/sen(32)≈9,4cm

tg(32)=5/c → c=5/tg(32) ≈8m

4.3. Cálculo altura con doble medida

Cuando queremos calcular la altura de una montaña, casa, etc. pero no somos capaces de acercarnos a la base, y por tanto no podemos calcular la distancia de un punto al objeto que deseamos medir tendremos que utilizar otro método. Veamos como con dos medidas indirectas podemos obtener la altura.



Donde conocemos l, α_1, α_2

$$\left.\begin{array}{l} tg(\alpha_1)=h/(l+x) \\ tg(\alpha_2)=h/x \end{array}\right\}$$

es un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas.

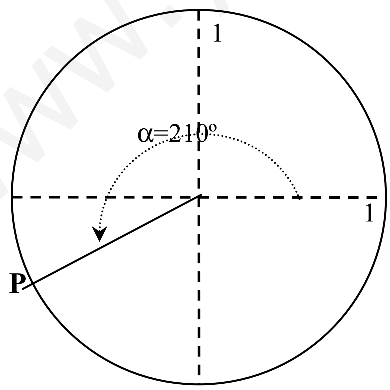
5. Razones trigonométricas de ángulo cualquiera.

Hasta ahora habíamos definido las razones trigonométricas en triángulos rectángulos, de tal forma que los ángulos, no recto, eran siempre menores a 90º. En este apartado vamos a extender las definiciones para cualquier ángulo (0º$\leq \alpha < 360°$)

Definición: la circunferencia goniométrica es una circunferencia de radio unidad en donde los ángulos se sitúan de la siguiente forma

- vértice en el centro
- el radio horizontal es el eje OX y el vertical OY
- un lado del ángulo situado en lado positivo del eje OX
- el otro lado formando ángulo α en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Ejemplo: situamos α=210º en la circunferencia goniométrica:

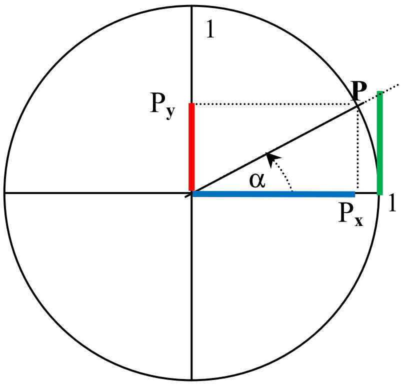


Definición de razones trigonométricas en la circunferencia (0º$\leq \alpha \leq 360°$):

- sen(α)=coordenada vertical del punto P=P_y
- cos(α)=coordenada horizontal del punto P=P_x
- tg(α)=$\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{Py}{Px}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Veamos gráficamente los valores de sen(α), cos(α) y tg(α)



Explicación de la tangente: tenemos que tg(α)=P_y/P_x. Se cumple que el triángulo rectángulo de catetos P_y y P_x es semejante al que tiene de lado horizontal 1 (radio circunferencia) y vertical la línea verde (pongamos que su tamaño es x). Al ser semejantes tg(α)=P_y/P_x=x/1=x=línea verde.

5.1. Signo de las razones trigonométricas en los distintos cuadrantes

En este apartado vamos a ver el signo de las razones trigonométricas según el valor del ángulo, α. Para entender esta tabla simplemente hay que recordar la definición del seno y el coseno y ver la posición de P para estos valores de α. El signo de la tangente se deduce de tg(α)=sen(α)/cos(α)

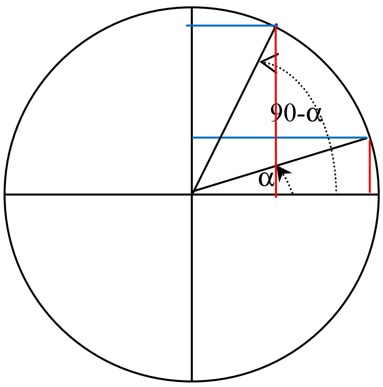
	sen(α)	cos(α)	tg(α)
0º<α<90º (cuadrante I)	+	+	+
90º<α<180º (cuadrante II)	+	-	-
180º<α<270º (cuadrante III)	-	-	+
270º<α<360º (cuadrante IV)	-	+	-

6. Reducción de un ángulo al primer cuadrante.

6.1. Ángulos complementarios

Definición: dos ángulos α y α_2 se dicen complementarios si suman 90º ($\alpha+\alpha_2$=90º). De esta forma llamaremos a α_2=90-α.

Veamos las relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos complementarios, para esto apoyémonos en la circunferencia goniométrica:



sen(α)=cos(90-α)

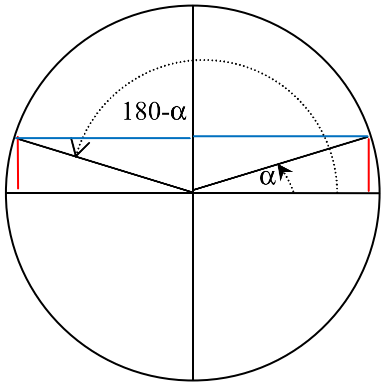
cos(α)=sen(90-α)

tg(α)=1/tg(90-α)

6.2. Ángulos suplementarios

Definición: dos ángulos α y α_2 se dicen suplementarios si suman 180º ($\alpha+\alpha_2=180º$). De esta forma llamaremos a $\alpha_2=180-\alpha$.

Veamos las relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos suplementarios, para esto apoyémonos en la circunferencia goniométrica.



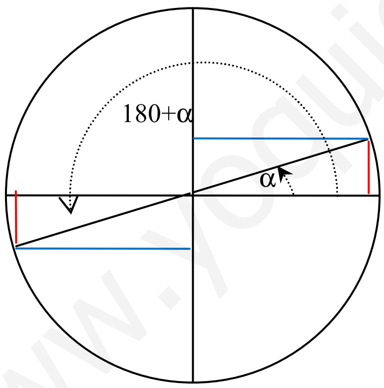
$\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(180-\alpha)$

$\cos(\alpha) = -\cos(180-\alpha)$

$\text{tg}(\alpha) = -\text{tg}(180-\alpha)$

6.3. Ángulos que difieren 180º

En este apartado vamos a ver las relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos que difieren 180º (α, $\alpha+180º$), para esto apoyémonos en la circunferencia goniométrica.



$\text{sen}(\alpha) = -\text{sen}(180+\alpha)$

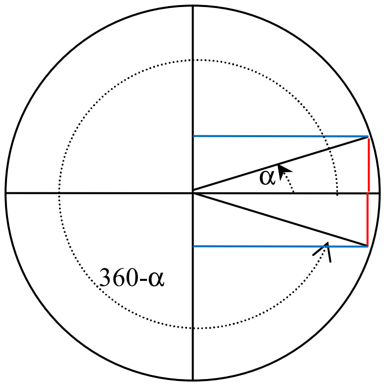
$\cos(\alpha) = -\cos(180+\alpha)$

$\text{tg}(\alpha) = \text{tg}(180+\alpha)$

6.4. Ángulos opuestos o que suman 360º

En este apartado vamos a ver las relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos que suman 360º (α, $360º-\alpha$), para esto apoyémonos en la circunferencia goniométrica.

Nota: en la calculadora los ángulos del IV cuadrante aparecen con signo negativo, es decir el giro en sentido horario de los ángulos se pueden considerar negativos. *Ejemplos:* 320º=-40º, 300º=-60º



$\text{sen}(\alpha) = -\text{sen}(360-\alpha)$

$\cos(\alpha) = \cos(360-\alpha)$

$\text{tg}(\alpha) = -\text{tg}(360-\alpha)$

Ejercicio: calcular el valor de las siguientes razones trigonométricas sin utilizar la calculadora:

1) $\alpha=120^{\circ} \rightarrow \alpha=180-60$. Son ángulos 120º y 60º son suplementarios, apliquemos las relaciones vistas en el apartado 6.2

$\text{sen}(120^{\circ}) = \text{sen}(60^{\circ}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(120^{\circ}) = -\cos(60^{\circ}) = -\frac{1}{2}$

$\text{tg}(120^{\circ}) = -\text{tg}(60^{\circ}) = -\sqrt{3}$

2) $\alpha=240^{\circ} \rightarrow \alpha=180^{\circ}+60^{\circ}$. Los ángulos 240º y 60º se diferencian en 180º, apliquemos las relaciones vistas el apartado 6.3.

$\text{sen}(240^{\circ}) = -\text{sen}(60^{\circ}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(240^{\circ}) = -\cos(60^{\circ}) = -\frac{1}{2}$

$\text{tg}(240^{\circ}) = \text{tg}(60) = \sqrt{3}$

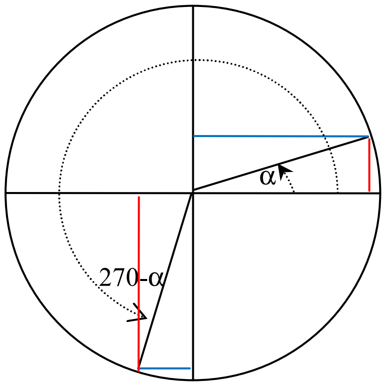
3) $\alpha=300^{\circ}=-60^{\circ} \rightarrow \alpha=360^{\circ}-60^{\circ}$. Los ángulos 300º y 60º suman 360º, apliquemos las relaciones vistas en el apartado 6.5.

$\text{sen}(300^{\circ}) = -\text{sen}(60^{\circ}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(300^{\circ}) = \cos(60^{\circ}) = \frac{1}{2}$

$\text{tg}(300^{\circ}) = -\text{tg}(60^{\circ}) = -\sqrt{3}$

4) $\alpha=260^{\circ}$, sabiendo que $\text{sen}(10^{\circ})\approx0{,}17$, $\cos(10^{\circ})\approx0.98$, $\text{tg}(10^{\circ})\approx0.18$, podemos relacionar este ángulo con 270º de la siguiente forma $\alpha=260^{\circ}=270^{\circ}-10^{\circ}$. Veamos con la circunferencia goniométrica como relacionarlos:



sen(270-α)=-cos(α)

cos(270-α)=-sen(α)

tg(α)=1/tg(270º-α)

A partir de esto podemos ver el valor de las razones trigonométricas de 260º

sen(260º)=-cos(10º)≈-0.98

cos(260º)=-sen(10º)≈-0.17

tg(260º)=1/tg(10º) ≈5.6

Ejercicio: calcular los ángulos que cumplen:

a) sen(α)=0.25

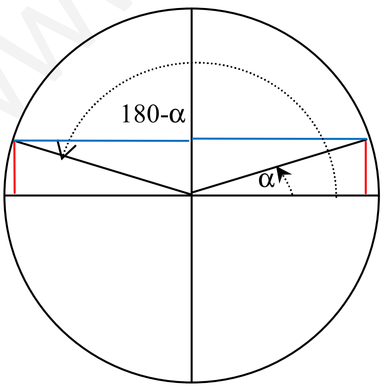
b) cos(α)=-0.3

c) sen(α)=-0.1

d) cos(α)=0.7 y sen(α)<0

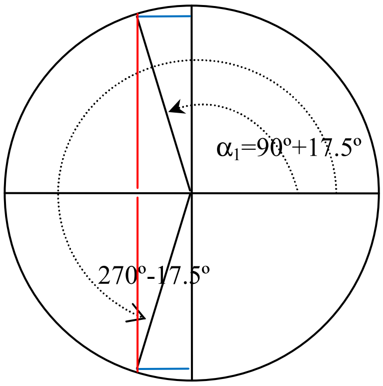
Solución:

a) sen(α)=0.25 → α=arcsen(0.25)=14.5º (calculadora). Si dibujamos el ángulo obtenemos el otro ángulo que cumple que el seno vale 0.25



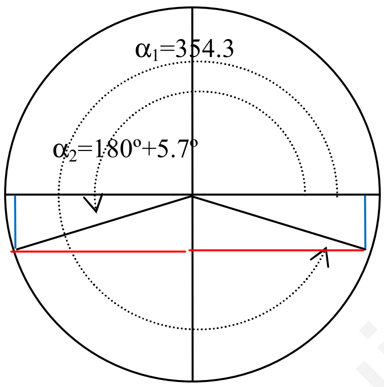
La otra solución es $\alpha_2=180º-\alpha_1=165.5º$

b) $\cos(\alpha)=-0.3 \rightarrow \alpha_1=107.5º$ (calculadora). Si dibujamos el ángulo obtenemos el otro ángulo que cumple que el coseno vale -0.3



La otra solución es $\alpha_2=270º-17.5º=252.5º$

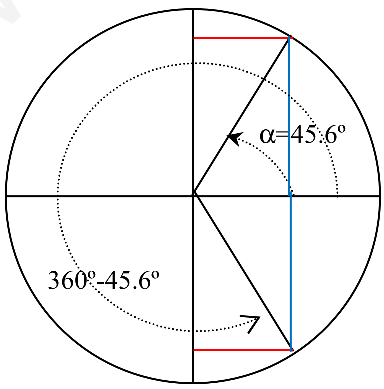
c) $\text{sen}(\alpha)=-0.1 \rightarrow \alpha_1=-5.7º$(calculadora) $\alpha_1=354.3º$. Si dibujamos el ángulo obtenemos el otro ángulo que cumple que el seno vale -0.1



La otra solución es $\alpha_2=180º+5.7º=185.7º$

d) $\cos(\alpha)=0.7$ y $\text{sen}(\alpha)<0 \rightarrow \alpha_1=45.6º$, pero el $\text{sen}(\alpha_1)>0$ (cuadrante I), luego no es ángulo que buscamos. Veamos a partir de la circunferencia goniométrica otro ángulo,α_2, que cumpla que su coseno es también 0.7 pero el seno sea negativo.

Nota: Aunque 45.6º es muy próximo a 45º, a la hora de dibujarlo lo haremos más cerca de 90º a fin de que podamos distinguir el tamaño del seno y coseno que en 45º son iguales.



El ángulo $\alpha_2=360º-45.6º=314.4º$ cumple que $\cos(\alpha_2)=0.7$ pero ahora si $\text{sen}(\alpha_2)<0$. Lugo la solución es $\alpha=314.4º$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

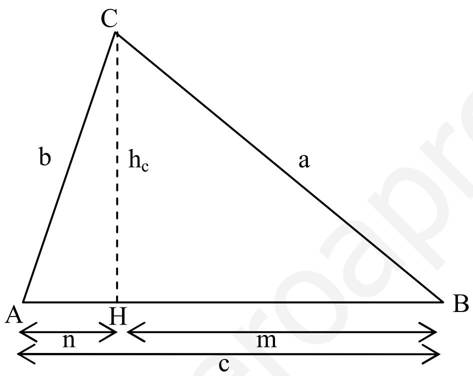
7. Teorema del seno y del coseno

Estos teoremas se utilizan para resolver triángulos no rectángulos, en los que no podemos aplicar ni el teorema de Pitágoras, ni las razones trigonométricas.

Es posible resolver los triángulos sin necesidad de conocer los teoremas del seno y del coseno, trazando una de sus alturas descomponemos el triángulo en dos triángulos rectángulos y podremos aplicar el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas. Si bien resulta más sencillo y metódico aplicar los teoremas del seno y del coseno

7.1. Teorema del seno

Dado un triángulo ABC, al cual trazamos una de sus alturas, por ejemplo la del vértice C, cortando en el lado c en el punto H y dividiendo el triángulo en dos rectángulos AHC y BHC:



Calculemos la altura h_c a partir de los triángulos rectángulos y de la razón seno:

$$\left.\begin{array}{l} sen\,\hat{A}=\dfrac{h_c}{b} \\ sen\,\hat{B}=\dfrac{h_c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow a\cdot sen\hat{B}=b\cdot sen\hat{A} \;\Rightarrow \frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}$$

Si trazamos la altura del vértice A obtendríamos de forma análoga la siguiente relación:

$$\frac{c}{sen\hat{C}}=\frac{b}{sen\hat{B}}$$

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores, obtendremos las relaciones que se conocen como el teorema del seno.

Teorema del seno: en todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos:

$$\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}=\frac{c}{sen\hat{C}}$$

Nota: el cociente de estas relaciones es igual a 2R, siendo R el radio de la circunferencia circunscrita: $\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}\frac{c}{sen\hat{C}}=2R$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

7.2. Teorema del coseno

Apliquemos Pitágoras en el triángulo CBH:

$$\left.\begin{array}{l} CBH: a^2 = h_c{}^2 + m^2 \rightarrow a^2 = h_c{}^2 + (c-n)^2 \\ CHA: b^2 = h_c{}^2 + n^2 \rightarrow h_c{}^2 = b^2 - n^2 \end{array}\right\} \rightarrow a^2 = b^2 - n^2 + c^2 - 2cn + n^2 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cn$$

Aplicando el coseno del triángulo ACH :

$$\cos\hat{A} = \frac{n}{b} \rightarrow n = b\cdot\cos\hat{A}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, obtendremos una de las ecuaciones del teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\hat{A}$$

Podemos llegar a expresiones análogas trazando las otras dos alturas, correspondientes a los vértices A y B.

Teorema del coseno: las relaciones entre los tres lados y los ángulos de cualquier triángulo son:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\hat{C}$$

8. Resolución de triángulos no rectángulos

Resolver un triángulo cualquiera es determinar todos sus elementos, es decir, sus tres lados y ángulos.

Para resolverlo aplicaremos los siguientes teoremas:

- Teorema del seno
- Teorema del coseno
- La suma de los ángulo del triángulo es 180º ($\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º$)

Un triángulo queda determinado siempre que conozcamos 3 de sus 6 elementos, siempre que no sean sus 3 ángulos.

Para evitar que los errores se propaguen es recomendable utilizar los datos que nos dan inicialmente, y no los que hemos ido calculando.

No siempre un triángulo se puede resolver, es decir con los datos dados nos dan soluciones imposibles. También a veces con los datos dados tendremos dos soluciones. El caso más problemático es cuando se conocen dos lado y uno de los ángulos que no formen los dos lados.

Por lo general el teorema del coseno se utiliza cuando se conocen más lados que ángulos.

8.1. Conocido dos lados y uno de los dos ángulos que no forma estos lados.

Este es el problema más complejo, pues puede ocurrir tres cosas:

a) No tenga solución

b) Dos soluciones

c) Una solución (es triángulo rectángulo)

Ejemplo

1) a=15cm, b=20cm, $\hat{A}$=40º (dos soluciones)

Opción 1

Teorema del coseno ($a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\hat{A}$)→ $225=400+c^2-40\cdot c\cdot\cos(40)$

$c^2-30{,}64\cdot c+175=0$ → c= $\begin{cases} c_1=7{,}6cm \\ c_2=23{,}05cm \end{cases}$

a) Si $c=c_1=7.6$, apliquemos teorema del seno($\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{c}{sen\hat{C}}$)→ $\frac{15}{sen40}=\frac{7.6}{sen\hat{C}}$

$\hat{C}_1= arcsen\left(\frac{7.6\cdot sen40}{15}\right)=19º$ → $\hat{B}_1=121º$

b) Si $c=c_1=23.5$, apliquemos teorema del seno($\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{c}{sen\hat{C}}$)→ $\frac{15}{sen40}=\frac{23.5.}{sen\hat{C}}$

$\hat{C}_2= arcsen\left(\frac{23{,}05\cdot sen40}{15}\right)=81º$

Opción 2

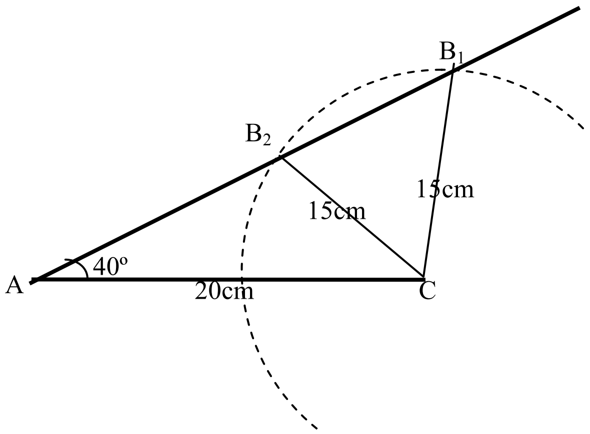
Teorema del seno ($\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}$)→ $\frac{15}{sen40}=\frac{20}{sen\hat{B}}$ → $\hat{B}=arcsen\left(\frac{20\cdot sen40}{15}\right)=\begin{cases} \hat{B}_1=59º \\ \hat{B}_2=121º \end{cases}$

Las dos son soluciones son posibles pues $\hat{A}+\hat{B}<180º$

a) Si $\hat{B}_1=59º$: $\hat{C}_1=81º$, y para calcular c aplicamos teorema del coseno:
$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos(\hat{C}_1)\rightarrow c_1=7{,}6cm$

b) Si $\hat{B}_2=121º$: $\hat{C}_2=19º$, y para calcular c aplicamos teorema del coseno:
$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos(\hat{C}_2)\rightarrow c_2=23.05cm$

Gráficamente



2) a=10cm, b=20cm, $\hat{A}$=75º (0 soluciones)

<u>Opción 1</u>

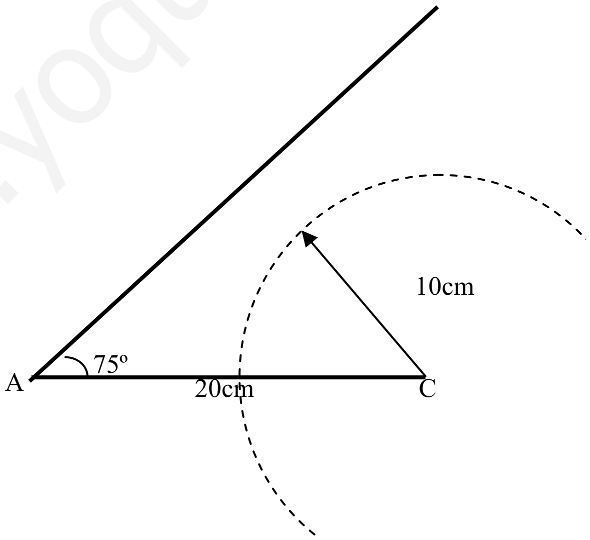
Teorema del coseno ($a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\hat{A}$) → $100=400+c^2-40\cdot c\cdot\cos(75º)$

$c^2-10{,}35\cdot c+300=0$ → c=no solución real

<u>Opción 2</u>

Teorema del seno ($\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}$)→ $\frac{10}{sen75}=\frac{20}{sen\hat{B}}$ → $\hat{B}=arcsen\left(\frac{20\cdot sen75}{10}\right)=no\,sol$

Gráficamente



3) a=10cm, b=20cm, $\hat{A}$=30º (1 solución)

<u>Opción 1</u>

Teorema del coseno ($a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\hat{A}$) → $100=400+c^2-40\cdot c\cdot\cos(30º)$

$c^2-20\sqrt{3}c+300=0$ → $c=10\sqrt{3}$ (doble)

Si $c=10\sqrt{3}$, apliquemos teorema del seno($\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}$) → $\frac{10}{sen30}=\frac{20}{sen\hat{B}}$

$$\hat{B}=arcsen\left(\frac{20\cdot sen(30)}{10}\right)=90º \rightarrow \hat{C}=60º$$

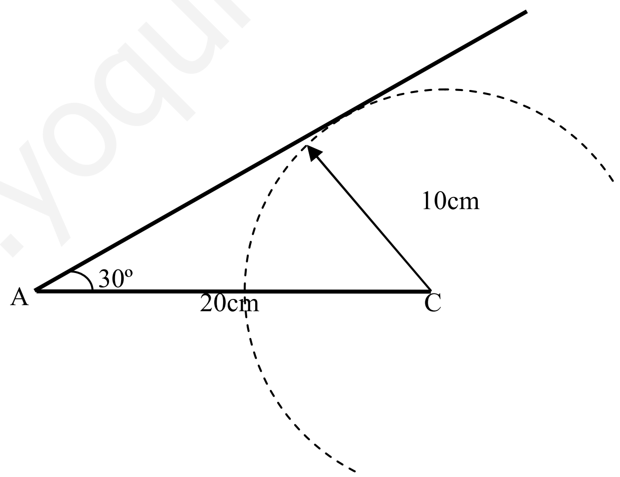
<u>Opción 2</u>

Teorema del seno ($\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}$) → $\frac{10}{sen30}=\frac{20}{sen\hat{B}}$ → $\hat{B}=arcsen\left(\frac{20\cdot sen30}{10}\right)=90º$

$\hat{C}=60º$.

Teorema del coseno para calcular c: $c^2=b^2+a^2-2ab\cdot\cos(\hat{C})$ → $c=10\sqrt{3}$

Gráficamente



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

8.2 Conocido los tres lados

Puede ocurrir:

1. Una única solución
2. Ninguna solución: esto ocurre cuando un lado es mayor o igual que la suma de los otros dos, o menor o igual que la resta de los otros dos.

Ejemplo 1: a=2cm,b=4cm, c=5cm.

Apliquemos el teorema del coseno para obtener alguno de los ángulos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$ → 4=16+25-40·cos($\hat{A}$) → $\cos(\hat{A}) = \frac{37}{40} \rightarrow \ \hat{A} = 22{,}3º$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$ → 16=4+25-20·cos($\hat{B}$) → $\cos(\hat{B}) = \frac{13}{20} \rightarrow \ \hat{B} = 49{,}6º$

$\hat{C} = 180° - \hat{B} - \hat{A} = 108{,}1°$

Ejemplo 2: a=2cm,b=4cm, c=7cm.

Apliquemos el teorema del coseno para obtener alguno de los ángulos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$ → 4=16+49-56·cos($\hat{A}$) → $\cos(\hat{A}) = \frac{61}{56} \rightarrow \ No\ solución$

8.3. Conocido dos lados y el ángulo que forman.

Siempre una solución

Ejemplo: $\hat{C} = 60^o$*, a=20cm, b=10cm*

Teorema del coseno → $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos(\hat{C})$ → $c^2=400+100-400\cdot\cos(60)$ → c=$\sqrt{300}$cm

Teorema del seno → $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \rightarrow \frac{20}{sen\hat{A}} = \frac{\sqrt{300}}{sen(60)} \rightarrow \hat{A}=90$ → $\hat{B} = 30º$

8.4. Conocidos dos ángulos y un lado

Siempre una única solución.

Ejemplo: $\hat{C} = 60^o$, $\hat{A} = 80^o$ *a=10m*

$\hat{B} = 180 - 60 - 80 = 40º$

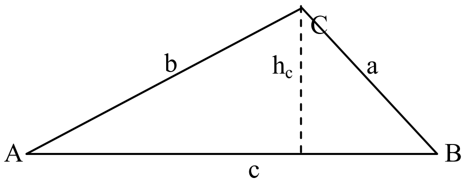
Teorema del seno: $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \rightarrow \frac{10}{sen80} = \frac{c}{sen(60)} \rightarrow c = 8{,}8m$

Teorema del seno: $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} \rightarrow \frac{10}{sen80} = \frac{b}{sen(60)} \rightarrow b = 6{,}5m$

9. Área de un triángulo

En este apartado vamos a poner el área de cualquier triángulo en función de los lados y los ángulos. Sabemos de cursos anteriores que el área es: $A_{triángulo}= \frac{base \cdot altura}{2}$

La idea es poner la altura en función de los lados y los ángulos, vemos como:



$A_{\text{triángulo}}= \frac{c\cdot h_c}{2} = \frac{1}{2}\cdot c \cdot b \cdot sen(\hat{A})$

De igual forma repitiendo el proceso para el resto de alturas tenemos que el área del triángulo es en función de los lados y los ángulos son:

$$A_{\text{triángulo}}= = \frac{1}{2}\cdot c\cdot b\cdot sen(\hat{A}) = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot sen(\hat{C}) = \frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot sen(\hat{B})$$

Ejercicios finales:

Relación entre las razones trigonométricas

1) Calcular sin hacer uso de la calculadora las demás razones trigonométricas

a. sen(α)=0.2 (cuadrante II)
b. cos(α)=-0.3 (cuadrante III)
c. tg(α)=2 (cuadrante I)

Solución

a. $sen^2(\alpha)+cos^2(\alpha)=1 \rightarrow 0.2^2+cos^2(\alpha)=1 \rightarrow cos^2(\alpha)=0.96 \rightarrow cos(\alpha)=\pm\sqrt{0.96}$

la solución es $cos(\alpha)=-\sqrt{0.96}$ al ser del cuadrante II

$tg(\alpha)=sen(\alpha)/cos(\alpha) \rightarrow tg(\alpha)=-0.2/\sqrt{0.96}$

b. $sen^2(\alpha)+cos^2(\alpha)=1 \rightarrow sen^2(\alpha)+(-0.3)^2=1 \rightarrow sen^2(\alpha)=0.91 \rightarrow sen(\alpha)=\pm\sqrt{0.91}$

la solución es $sen(\alpha)=-\sqrt{0.91}$ al ser del cuadrante III

$tg(\alpha)=sen(\alpha)/cos(\alpha) \rightarrow tg(\alpha)=\sqrt{0.91}/0.3$

c. $\left.\begin{array}{r} sen^2(\alpha)+cos^2(\alpha)=1 \\ tg(\alpha)=\dfrac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} sen^2(\alpha)+cos^2(\alpha)=1 \\ 2=\dfrac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} sen^2(\alpha)+cos^2(\alpha)=1 \\ 2cos(\alpha)=sen(\alpha) \end{array}\right\}$

Tenemos un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas fácilmente resoluble sustituyendo en la primera ecuación sen(α)=2cos(α):

$(2cos(\alpha))^2+cos^2(\alpha)=1 \rightarrow 5cos^2(\alpha)=1 \rightarrow cos^2(\alpha)=1/5 \rightarrow cos(\alpha)=\pm 1/\sqrt{5}$

la solución es $cos(\alpha)=1/\sqrt{5}$ ya que es del cuadrante I $\rightarrow sen(\alpha)=2/\sqrt{5}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

2) Comprueba que son ciertas las siguientes igualdades:

a. $\dfrac{1+tg^2(\alpha)}{1+\cot g^2(\alpha)}=tg^2(\alpha)$

Solución: $\dfrac{1+tg^2(\alpha)}{1+\cot g^2(\alpha)}=\dfrac{1+tg^2(\alpha)}{1+\dfrac{1}{tg^2(\alpha)}}=\dfrac{1+tg^2(\alpha)}{\dfrac{1+tg^2(\alpha)}{tg^2(\alpha)}}=tg^2(\alpha)$

b. $\dfrac{\cos^2(\alpha)}{1+sen(\alpha)}=1-sen(\alpha)$

Solución: $\dfrac{\cos^2(\alpha)}{1+sen(\alpha)}=\dfrac{1-sen^2(\alpha)}{1+sen(\alpha)}=\dfrac{(1-sen(\alpha))(1+sen(\alpha))}{(1+sen(\alpha))}=1-sen(\alpha)$

c. $\sec^2(x)+cosec^2(x)=\sec^2(x)\cdot cosec^2(x)$

Solución: $\sec^2(x)+cosec^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}+\dfrac{1}{sen^2(x)}=\dfrac{sen^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)\cdot sen^2(x)}=$

$=\dfrac{1}{\cos^2(x)\cdot sen^2(x)}=\left(\dfrac{1}{\cos(x)}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{sen(x)}\right)^2=\sec^2(x)\cdot\cos ec^2(x)$

3) Simplifica las siguientes expresiones

a. $(sen(x)+cos(x))^2+(sen(x)-cos(x))^2$

Solución: $(sen(x)+cos(x))^2+(sen(x)-cos(x))^2=$

$=sen^2(x)+cos^2(x)+2\cdot sen(x)\cdot cos(x)+sen^2(x)+cos^2(x)-2\cdot sen(x)\cdot cos(x)=$

$=2\cdot(sen^2(x)+cos^2(x))=2\cdot 1=2$

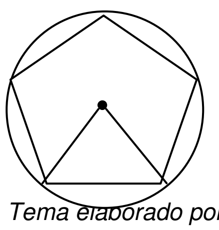
b. $\dfrac{sen^3(x)+sen(x)\cdot\cos^2(x)}{sen(x)}$

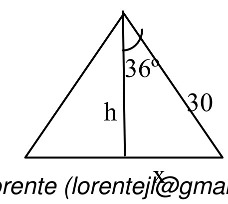
Solución: $\dfrac{sen^3(x)+sen(x)\cdot\cos^2(x)}{sen(x)}=\dfrac{sen(x)\cdot(sen^2(x)+\cos^2(x))}{sen(x)}=\dfrac{sen(x)}{sen(x)}=1$

Problemas de geometría

4) Calcular el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 30cm de radio. Calcular su área

Ángulo del pentágono → α=360º/5=72º





Tema elaborado por José Luis Lorente (lorenteji@gmail.com)

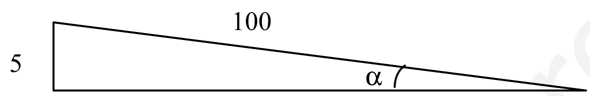
Lado pentágono=2x → sen(36º)=x/30 → x=30·sen(36º)=17.6cm

Perímetro=10·x=176cm

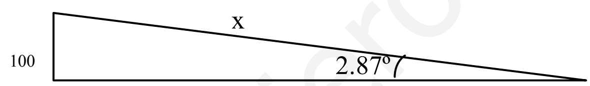
Apotema=h→ cos(36º)=x/30 → x=30·cos(36º)=24.3cm

área=$\frac{p \cdot ap}{2}=\frac{176 \cdot 24.3}{2}=2138.4 \cdot cm^2$

5) En un tramo de carretera la inclinación es del 5% (sube 5m en 100m). Calcular el ángulo que forma con la horizontal la carretera. Sabemos que hemos subido 100m, ¿Cuánto hemos andado por la carretera?

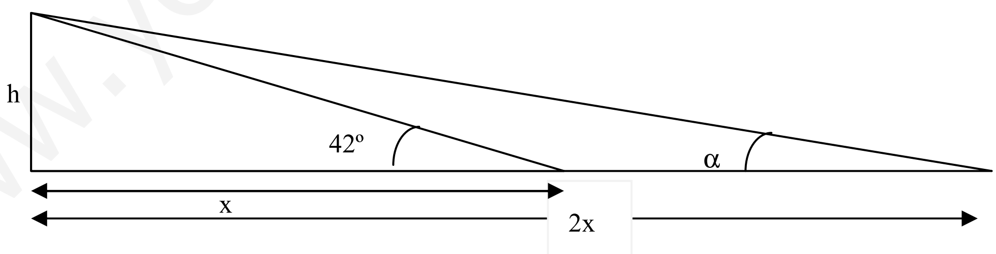


sen(α)=$\frac{5}{100}$ = 0.05→ α=arcsen(0.05)=2.87º



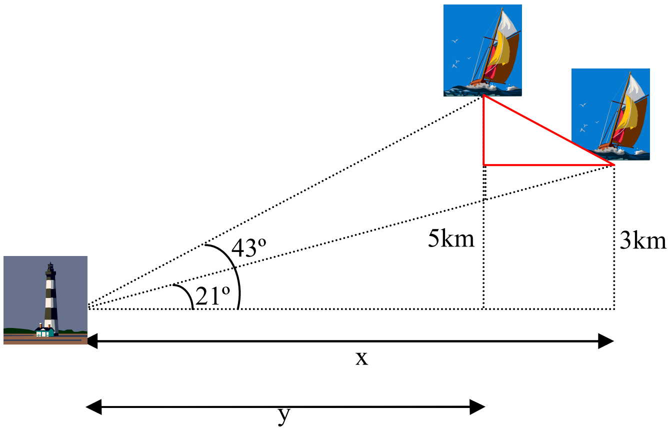
sen(α)=0.05=100/x → x=2000m

6) Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de 42º ¿bajo qué ángulo se ve colocándose al doble de distancia?



tg(42º)=0.9=h/x → tg(α)=h/2x=0.45 → α=arctg(0.45)=24,2º

7) Desde un faro F se ve un barco A con ángulo de 43º con la costa, y el barco B con 21º. El barco B está a 3km de la costa y el A a 5km. Calcular distancia entre los barcos.



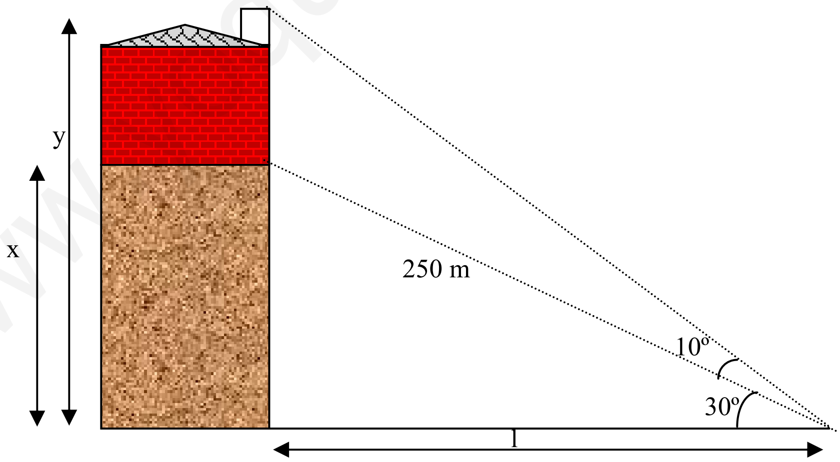
Podemos calcular la distancia si conocemos los catetos del triángulo rojo. Uno de los dos catetos mide 5km-3km=2km. El otro es y-x. Calculémoslo:

tg(21)=3/x → x=3/tg(21)=7.82km

tg(43º)=5/y → y=5/tg(43º)=5.4km

Así la distancia entre los dos barcos definida por la hipotenusa de un triángulo con catetos de 2km y de (x-y)=2.42km→ d=$\sqrt{2^2+(2.42)^2}=3.14km$

8) Calcular la altura del edificio:



sen(30º)=x/250 → x=250·sen(30º)=125m

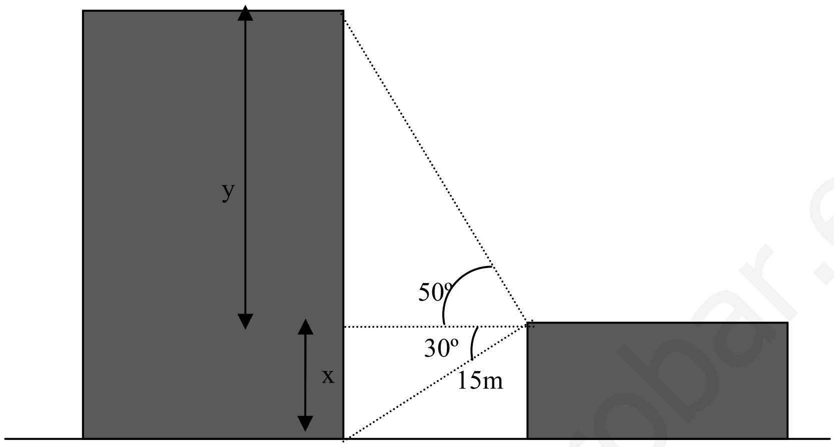
cos(30º)=l/250 → l= 250·cos(30º)=216.5m

tg(40º)=y/l → y=216.5m·tg(40º)=181.2m

h_{casa}=y-x=56.2m

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

9) Calcular la altura de la torre grande a partir del siguiente dibujo



$x=15\cdot sen(30º)=7.5m$

$l=15\cdot cos(30º)=13m$

$tg(50º)=y/l \rightarrow y=l\cdot tg(50º)=15.5m$

$altura=y+x=23m$

Ecuaciones.

10) Resolver las siguientes ecuaciones

a. $sen^2(x)-sen(x)=0$
b. $cos(x)+sen^2(x)=1$
c. $3tg^2(x)=sec^2(x)$
d. $sen(2x)=0.5$

Solución

a. $sen(x)=y \rightarrow y^2-y=0,\ y(y-1)=0 \rightarrow y=0, y=1.$

Si $y=0 \rightarrow sen(x)=0 \rightarrow x=arcsen(0)=\begin{cases} 0º+360k \\ 180º+360k \end{cases}$

Si $y=1 \rightarrow sen(x)=1 \rightarrow x=arcsen(1)=90º+360k$

b. Tenemos expresar la ecuación sólo en función del seno o del coseno, para esto utilizamos $sen^2(x)+cos^2(x)=1 \rightarrow sen^2(x)=1-cos^2(x)$

$cos(x)+sen^2(x)=1 \rightarrow cos(x)+1-cos^2(x)=1 \rightarrow cos(x)-cos^2(x)=0$

Llamando $y=cos(x)$ la ecuación será:

$y-y^2=0 \rightarrow y(y-1)=0\ y=0, y=1.$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Si y=0→ cos(x)=0 → x=arccos(0)=$\begin{cases} 90^{o}+360k \\ 270^{o}+360k \end{cases}$

Si y=1 →cos(x)=1 → x=arccos(1)=0º$+360k$

c. 3tg^2(x)=sec^2(x) →

$$3\cdot\frac{sen^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)} \rightarrow sen^2(x)=\frac{1}{3} \rightarrow sen(x)=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow$$

$$x = arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\begin{cases} 35{,}26^{o}+360k \\ 180^{o}-35{,}26^{o}=144.74^{o}+360k \end{cases}$$

$$x = arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\begin{cases} 360^{o}-35{,}26^{o}=324{,}74^{o}+360k \\ 180^{o}+35{,}26^{o}=215.26^{o}+360k \end{cases}$$

d. sen(2x)=0.5 → 2x=arcsen(0.5)=$\begin{cases} 30^{o}+360k \\ 150^{o}+360k \end{cases}$ →

Si 2·x=30º+360k→ x=$\begin{cases} k=0 \rightarrow 15^{o}+360k \\ k=1 \rightarrow 195^{o}+360k \end{cases}$

Si 2·x=150º+360k→ x=$\begin{cases} k=0 \rightarrow 75^{o}+360k \\ k=1 \rightarrow 255^{o}+360k \end{cases}$

Teorema del seno y del coseno. Resolución triángulos no rectángulos

11) Resolver los siguientes triángulos

a) $\hat{A}$=45º, b=50m, a=40m

b) $\hat{C}$=30º, a=5cm, b=3cm

c) $\hat{A}$=45º, $\hat{C}$=60º, b=20m

d) $\hat{C}$ = 45º, b=10m, c=6m

e) a=5cm, b=4cm, c=4cm

a) $\hat{A}$=45º, b=50m, a=40m

Este es el caso en el que puede haber dos soluciones. Veámoslo:

Teorema del seno:

$$\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}} \rightarrow \frac{40}{sen(45^{o})}=\frac{50}{sen(\hat{B})} \rightarrow sen(\hat{B})=0{,}884 \rightarrow \hat{B}=\begin{cases} \hat{B}_1=62{,}11^{o} \\ \hat{B}_2=117{,}89^{o} \end{cases}$$

Los dos ángulos son soluciones, pues la suma con $\hat{A}+\hat{B}<180^{o}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Solución 1 : $\hat{B}_1 = 62{,}11^o$ → $\hat{C}_1 = 72{,}89^o$

Calculemos c por el teorema del seno ($\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$)→ $\frac{40}{sen45} = \frac{c}{sen72.89^o}$ →c=54m

Solución 2 : $\hat{B}_2 = 117{,}89^o$ → $\hat{C}_2 = 17{,}11^o$

Calculemos c por el teorema del seno ($\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$)→ $\frac{40}{sen45} = \frac{c}{sen17{,}11^o}$ →c=16,6m

b) $\hat{C}$=30º, a=5cm, b=3cm

Este problema sólo puede tener una solución:

Apliquemos el teorema del coseno para calcular c:

$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos(\hat{C})=25+9-30\cdot\cos(30)=8{,}02cm^2$ → c=2,84cm

Teorema del seno para calcular $\hat{A}$: $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \to \frac{5}{sen\hat{A}} = \frac{2{,}84}{sen30} \to \hat{A} = \begin{cases} \hat{A}_1 = 62^o \\ \hat{A}_2 = 118^o \end{cases}$

Las dos soluciones parecen válidas, luego lo comprobaremos:

Solución 1:

$\hat{C}$=30º, $\hat{A}$=62º, $\hat{B}$=88º a=5cm, b=3cm, c=2,84cm.

Solución 2:

$\hat{C}$=30º, $\hat{A}$=118º, $\hat{B}$=32º a=5cm, b=3cm, c=2,84cm.

En este caso la solución 1 no es válida,pues cuanto mayor sea el lado mayor el ángulo. Y en la solución 1 vemos como a es el mayor lado y $\hat{A}$ no es el mayor ángulo.

c) $\hat{A}$=45º, $\hat{C}$=60º, b=20m

Podemos fácilmente calcular el otro ángulo $\hat{B} = 180 - 60 - 45$=75º

Utilicemos el teorema del seno para calcular los 2 lados que faltan:

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \to \begin{cases} \frac{a}{sen45} = \frac{20}{sen75} \to a = 14{,}6m \\ \frac{20}{sen75} = \frac{c}{sen60} \to c = 17.9m \end{cases}$$

d) $\hat{C} = 45$º, b=10m, c=6m

Utilicemos el teorema del seno para calcular el ángulo $\hat{B}$

$\frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \to \frac{10}{sen\hat{B}} = \frac{6}{sen45^o} \to sen\hat{B} = 1{,}17$ → No solución

e) a=5cm, b=4cm, c=4cm

Por el teorema del coseno obtendremos el ángulo deseado:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2{\cdot}b{\cdot}c{\cdot}\cos\hat{A} \;\rightarrow\; 25 = 16 + 16 - 32{\cdot}\cos(\hat{A}) \rightarrow \hat{A} = 77{,}36º$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2{\cdot}a{\cdot}c{\cdot}\cos\hat{B} \;\rightarrow\; 16 = 25 + 16 - 40{\cdot}\cos\hat{B} \rightarrow \hat{B} = 51{,}32º$

$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 51{,}32º$

Tema 6. Trigonometría (II)

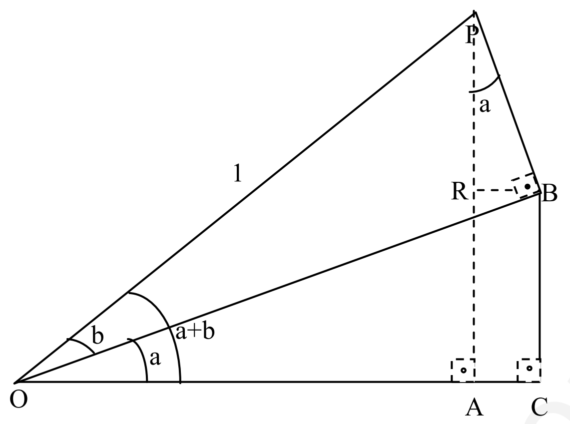
1. Teorema de adición

1.1. Razones trigonométricas de la suma de dos ángulos.

Muchas veces es de utilidad poder calcular las razones trigonométricas de una suma de ángulos a partir de conocer las razones trigonométricas de los ángulos independientes.

El objetivo del apartado es expresar las razones sen(a+b), cos(a+b)y tg(a+b) en función de sen(a), sen(b), cos(a), cos(b), tg(a), tg(b).

Para calcularlo utilizaremos la siguiente figura:



$$sen(a+b)=AP=AR+RP=CB+RP$$
$$\cos(a+b)=OA=OC-AC=OC-RB$$

Notas: Se cumple que el ángulo ∠COB=∠RPB al ser sus lados rectas perpendiculares.

$$sen(a)=\frac{CB}{OB}\to CB=OB\cdot sen(a)$$
$$sen(a)=\frac{RB}{PB}\to RB=PB\cdot sen(a)$$
$$\cos(a)=\frac{RP}{PB}\to RP=PB\cdot\cos(a)$$
$$\cos(a)=\frac{OC}{OB}\to OC=OB\cdot\cos(a)$$
$$sen(b)=\frac{PB}{1}\to PB=sen(b)$$
$$\cos(b)=\frac{OB}{1}\to OB=\cos(b)$$

Con estas igualdades fácilmente relacionaremos el seno y coseno de la suma de dos ángulos con las razones simples:

$$sen(a+b)=sen(a)\cdot\cos(b)+\cos(a)\cdot sen(b)$$
$$\cos(a+b)=\cos(a)\cdot\cos(b)-sen(a)\cdot sen(b)$$

Para calcular la tangente dividamos seno y coseno:

$$tg(a+b)=\frac{sen(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{sen(a)\cdot\cos(b)+\cos(a)\cdot sen(b)}{\cos(a)\cdot\cos(b)-sen(a)\cdot sen(b)}\underbrace{=}_{\substack{dividiendo\\ num\ y\ den\ por\\ \cos(a)\cos(b)}}\frac{\dfrac{sen(a)\cdot\cos(b)+\cos(a)\cdot sen(b)}{\cos(a)\cdot\cos(b)}}{\dfrac{\cos(a)\cdot\cos(b)-sen(a)\cdot sen(b)}{\cos(a)\cdot\cos(b)}}=$$

$$=\frac{tg(a)+tg(b)}{1-tg(a)\cdot tg(b)}$$

Reagrupando los resultados:

$$sen(a+b)=sen(a)\cdot\cos(b)+\cos(a)\cdot sen(b)$$
$$\cos(a+b)=\cos(a)\cdot\cos(b)-sen(a)\cdot sen(b)$$
$$tg(a+b)=\frac{tg(a)+tg(b)}{1-tg(a)\cdot tg(b)}$$

1.2. Razones trigonométricas de la diferencia de dos ángulos.

A partir de las razones trigonométricas de la suma es sencillo calcular las razones de la diferencia. Sólo hay que relacionar sen(-b) y cos(-b) con sen(b) y cos(b). Pero –b=360-b, y en el tema anterior vimos (hacer dibujo circunferencia goniométrica):

sen(-b)=sen(360-b)=-sen(b)

cos(-b)=cos(360-b)=cos(b)

tg(-b)=tg(360-b)=-tg(b)

De esta forma:

sen(a-b)=sen(a+(-b))=sen(a)·cos(-b)+cos(a)·sen(-b)=sen(a)·cos(b)-cos(a)·sen(b)

cos(a-b)=cos(a+(-b))=cos(a)·cos(-b)+sen(a)·sen(-b)=cos(a)cos(b)+sen(a)·sen(b)

$$tg(a-b)=tg(a+(-b))=\frac{tg(a)+tg(-b)}{1-tg(a)\cdot tg(-b)}=\frac{tg(a)-tg(b)}{1+tg(a)\cdot tg(b)}$$

Resumiendo:

$$sen(a-b)=sen(a)\cdot\cos(b)-\cos(a)\cdot sen(b)$$
$$\cos(a-b)=\cos(a)\cdot\cos(b)+sen(a)\cdot sen(b)$$
$$tg(a-b)=\frac{tg(a)-tg(b)}{1+tg(a)\cdot tg(b)}$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio1: calcular las razones trigonométricas de 75 º y 15º a partir de las razones de 30º, 60º y 45º. Comprueba los resultados calculando las razones trigonométricas de 90º a partir de las razones de 15º y 75º.

$$sen(75^{o}) = sen(45^{o}+30^{o}) = sen(45)\cdot\cos(30)+\cos(45)\cdot sen(30) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(75^{o}) = \cos(45^{o}+30^{o}) = \cos(45)\cdot\cos(30)-sen(45)\cdot sen(30) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$tg(75^{o}) = tg(45^{o}+30^{o}) = \frac{tg(45)+tg(30)}{1-tg(45)\cdot tg(30)} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)} = 2+\sqrt{3}$$

$$sen(15^{o}) = sen(45^{o}-30^{o}) = sen(45)\cdot\cos(30)-\cos(45)\cdot sen(30) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(15^{o}) = \cos(45^{o}-30^{o}) = \cos(45)\cdot\cos(30)+sen(45)\cdot sen(30) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$tg(15^{o}) = tg(45^{o}-30^{o}) = \frac{tg(45)-tg(30)}{1+tg(45)\cdot tg(30)} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = 2-\sqrt{3}$$

$$sen(90^{o}) = sen(75^{o}+15^{o}) = sen(75)\cdot\cos(15)+\cos(75)\cdot sen(15) = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^{2}+\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^{2} =$$

$$= \frac{6+2+2\sqrt{12}+6+2-2\sqrt{12}}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

$$\cos(90^{o}) = \cos(75^{o}+15^{o}) = \cos(75)\cdot\cos(15)-sen(75)\cdot sen(15) = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)-$$

$$-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = 0$$

$$tg(90^{o}) = tg(75^{o}+15^{o}) = \frac{tg(75)+tg(15)}{1-tg(75)\cdot tg(15)} = \frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{1-(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{4}{0} = \infty$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

2. Razones trigonométricas del ángulo doble y mitad.

2.1. Razones trigonométrica del ángulo doble

En este apartado buscamos expresar las razones trigonométricas del ángulo doble, 2a, en función de el ángulo a.

Para calcularlo utilizamos las razones trigonométricas de la suma:

$$sen(2a) = sen(a+a) = sen(a)\cdot\cos(a) + \cos(a)\cdot sen(a) = 2\cdot sen(a)\cdot\cos(a)$$

$$\cos(2a) = \cos(a)\cdot\cos(a) - sen(a)\cdot sen(a) = \cos^2(a) - sen^2(a)$$

$$tg(2a) = \frac{tg(a)+tg(a)}{1-tg(a)\cdot tg(a)} = \frac{2\cdot tg(a)}{1-tg^2(a)}$$

Resumiendo:

$$sen(2a) = 2\cdot sen(a)\cdot\cos(a)$$
$$\cos(2a) = \cos^2(a) - sen^2(a)$$
$$tg(2a) = \frac{2\cdot tg(a)}{1-tg^2(a)}$$

2.2. Razones trigonométrica del ángulo mitad

En este apartado buscamos expresar las razones trigonométricas del ángulo mitad, a/2, en función de el ángulo a.

Para calcularlo utilizaremos la razón trigonométrica del coseno del ángulo doble:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - sen^2(x) = 1 - sen^2(x) - sen^2(x) = 1 - 2sen^2(x) \;\rightarrow\; sen(x) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(2x)}{2}}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - sen^2(x) = \cos^2(x) - \left(1-\cos^2(x)\right) = 2\cos^2(x) - 1 \;\rightarrow\; \cos(x) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(2x)}{2}}$$

Llamando 2x=a → x=a/2

$$sen\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{2}}$$
$$\cos\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(a)}{2}}$$
$$tg\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{1+\cos(a)}}$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio 2: calcular las razones trigonométricas de 120º a partir de las razones trigonométricas de 60º.

$$sen(120) = sen(2\cdot 60) = 2\cdot sen(60)\cdot\cos(60) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(120) = \cos(2\cdot 60) = \cos^2(60) - sen^2(60) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$tg(120) = tg(2\cdot 60) = \frac{2\cdot tg(60)}{1-tg^2(60)} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$$

Ejercicio 3: calcular las razones trigonométricas de 22.5º a partir de las razones trigonométricas de 45º.

$$sen(22.5) = sen(45/2) = \sqrt{\frac{1-\cos 45}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos(22.5) = \cos(45/2) = \sqrt{\frac{1+\cos 45}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$tg(22.5) = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$$

Nota: hemos cogido las soluciones positivas al pertenece 22.5º al primer cuadrante, y por tanto ser sus razones trigonométricas positvas.

Ejercicio 4:

a) poner sen(3a) en función de sen(a)

$$sen(3a) = sen(2a+a) = sen(2a)\cdot\cos(a) + \cos(2a)\cdot sen(a) =$$
$$= 2\cdot sen(a)\cdot\cos(a)\cdot\cos(a) + \left(\cos^2(a) - sen^2(a)\right)sen(a) =$$
$$= 2\cdot sen(a)\cdot\cos^2(a) + \cos^2(a)\cdot sen(a) - sen^3(a) = 3\cdot\cos^2(a)\cdot sen(a) - sen^3(a)$$
$$= 3\cdot(1-sen^2(a))\cdot sen(a) - sen^3(a) = 3\cdot sen(a) - 4\cdot sen^4(a)$$

b) poner cos(3a) en función de cos(a)

$$\cos(3a) = \cos(2a+a) = \cos(2a)\cdot\cos(a) - sen(2a)\cdot sen(a) =$$
$$= \left(\cos^2 a - sen^2 a\right)\cos(a) - 2\cdot sen(a)\cdot\cos(a)\cdot sen(a) =$$
$$= \cos^3 a - 3sen^2(a)\cdot\cos(a) = \cos^3 a - 3\cdot(1-\cos^2(a))\cdot\cos(a) =$$
$$= -3\cos(a) + 4\cos^3(a)$$

c) poner sen(4a) en función de sen(a)

$$sen(4a) = sen(2\cdot 2a) = 2\cdot sen(2a)\cdot\cos(2a) = 2\cdot(2sen(a)\cdot\cos(a))\cdot(\cos^2(a) - sen^2(a)) =$$
$$= 4sen(a)\cdot\cos(a)(1-2\cdot sen^2(a)) = 4\cdot sen(a)\cdot\sqrt{1-sen^2(a)}(1-2\cdot sen^2(a))$$

3. Transformaciones de sumas de dos razones trigonométricas en productos.

En este apartado vamos a ver como trasformar la suma o diferencia de dos razones trigonométricas en un producto de 2 razones trigonométricas. Para este objetivo partimos de las ya conocidas razones trigonométricas del seno y coseno de la suma y diferencia:

(1) $sen(a+b) = sen(a)\cdot\cos(b) + \cos(a)\cdot sen(b)$

(2) $sen(a-b) = sen(a)\cdot\cos(b) - \cos(a)\cdot sen(b)$

(1)+(2) → $sen(a+b) + sen(a-b) = 2\cdot sen(a)\cdot\cos(b)$

(1)-(2) → $sen(a+b) - sen(a-b) = 2\cdot\cos(a)\cdot sen(b)$

Como el objetivo es que sean los argumentos de las razones trigonométricas sumadas conocidos se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\begin{cases} a+b = A \\ a-b = B \end{cases} \rightarrow \left.\begin{matrix} a = \dfrac{A+B}{2} \\ b = \dfrac{A-B}{2} \end{matrix}\right\}$$

De esta forma:

$$\boxed{\begin{aligned} sen(A) + sen(B) &= 2\cdot sen\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \\ sen(A) - sen(B) &= 2\cdot\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{A-B}{2}\right) \end{aligned}}$$

Vamos a ver la suma y diferencia de cosenos:

(1) $\cos(a+b) = \cos(a)\cdot\cos(b) - sen(a)\cdot sen(b)$

(2) $\cos(a-b) = \cos s(a)\cdot\cos(b) + sen(a)\cdot sen(b)$

(1)+(2) → $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cdot\cos(a)\cdot\cos(b)$

(1)-(2) → $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\cdot sen(a)\cdot sen(b)$

Haciendo el cambio de variable:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(A) + \cos(B) &= 2\cdot\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \\ \cos(A) - \cos(B) &= -2\cdot sen\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{A-B}{2}\right) \end{aligned}}$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorenteijl@gmail.com)

Ejercicio5: Calcular sin calculadora sen(75º)+sen(15º), sen(75º)-sen(15º), cos(75)+cos(15), cos(75)-cos(15)

$$sen(75)+sen(15)=2\cdot sen\left(\frac{75+15}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{75-15}{2}\right)=2\cdot sen(45)\cdot\cos(30)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$sen(75)-sen(15)=2\cdot\cos\left(\frac{75+15}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{75-15}{2}\right)=2\cdot sen(30)\cdot\cos(45)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(75)+\cos(15)=2\cdot\cos\left(\frac{75+15}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{75-15}{2}\right)=2\cdot\cos(45)\cdot\cos(30)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\cos(75)-\cos(15)=-2\cdot sen\left(\frac{75+15}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{75-15}{2}\right)=-2\cdot sen(45)\cdot sen(30)=-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejercicio 6: Calcular sen(45+a)+sen(45-a), cos(120+a)+cos(60+a), cos(270-a)-cos(90-a):

$$sen(45+a)+sen(45-a)=2\cdot sen(45)\cdot\cos(a)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos(a)=\sqrt{2}\cos(a)$$

$$\cos(120+a)+\cos(60+a)=2\cdot\cos(90+a)\cdot\cos(30)=2\cdot\cos(90+a)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\cos(90+a)=-\sqrt{3}sen(a)$$

$$\cos(270-a)-\cos(90-a)=-2\cdot sen(180-a)\cdot sen(90)=-2\cdot sen(180-a)=-2\cdot sen(a)$$

Ejercicio 7: Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\frac{sen(5a)-sen(3a)}{cos(5a)+cos(3a)}$

$$\frac{sen(5a)-sen(3a)}{\cos(5a)+\cos(3a)}=\frac{2\cdot\cos(4a)\cdot sen(a)}{2\cdot\cos(4a)\cdot\cos(a)}=tg(a)$$

b) $\frac{sen(9a)+sen(a)}{cos(9a)-cos(a)}$

$$\frac{sen(9a)+sen(a)}{\cos(9a)-\cos(a)}=\frac{2\cdot sen(5a)\cdot\cos(4a)}{-2\cdot sen(5a)\cdot sen(4a)}=-\cot g(4a)$$

c) $\frac{cos(x-y)-cos(x+y)}{sen(x+y)+sen(x-y)}$

$$\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{sen(x+y)+sen(x-y)}=\frac{-2\cdot sen(x)\cdot sen(-y)}{2\cdot sen(x)\cdot\cos(y)}=tg(y)$$

4. Ecuaciones trigonométricas

En el tema anterior hemos resulto ecuaciones trigonométricas en los que los argumentos que aparecían en todas la razones eran el mismo. En este tema resolveremos las ecuaciones cuando aparece en las razones diferentes argumentos. Los objetivos para resolver las ecuaciones son los siguientes:

1. Tendremos que buscar factorizar las razones trigonométricas igualadas a cero. Para esto se utiliza el teorema de la suma o diferencia, y especialmente el teorema de la adicción
2. A partir de los teoremas del ángulo doble o mitad y las ecuación $sen^2(x)+cos^2(x)=1$ poner todas las razones en función de un única razón trigonométrica con mismo argumento.

Ejemplos:

a) sen(2x)+cos(x)=0.

No podemos aplicar el teorema de adicción, pues no hay para la suma de seno y coseno. Pongamos sen(2x) con razones trigonométricas de argumento x:

2·sen(x)·cos(x)+cos(x)=0

Como está la ecuación igualdad a cero podemos factorizar:

$\cos(x)\cdot(2sen(x)+1)=0 \rightarrow \begin{cases} \cos(x)=0 \\ 2\cdot sen(x)+1=0 \end{cases}$

1) $\cos(x)=0 \rightarrow x=\begin{cases} 90+360k \\ 270+360k \end{cases}$

2) $2\cdot sen(x)+1=0 \rightarrow sen(x)=-1/2 \rightarrow x=\begin{cases} -30=330+360k \\ 210+360k \end{cases}$

b) sen(4x)-sen(2x)=0.

Ahora si podemos aplicar el teorema de adicción, además como está igualado a cero será fácil resolver la ecuación.

$sen(4x)-sen(2x)=0 \rightarrow 2\cdot\cos(3x)\cdot.sen(x)=0 \rightarrow \begin{cases} \cos(3x)=0 \\ sen(x)=0 \end{cases}$

1) $\cos(3x)=0 \rightarrow 3x=\begin{cases} 90+360k \\ 270+360k \end{cases} \rightarrow x=\begin{cases} 30+120k \\ 90+120k \end{cases} = \begin{cases} 30^o+360^o k \\ 150^o+360^o k \\ 270^o+360^o k \\ 90^o+360^o k \\ 210^o+360^o k \\ 330^o+360^o k \end{cases}$

2) $sen(x)=0 \rightarrow x=\begin{cases} 0+360k \\ 180+360k \end{cases}$

c) $\cos(2x)-\text{sen}(x)=\text{sen}^2(x)$

Tenemos que buscar tener el mismo argumento, de forma que pondremos cos(2x) como razones trigonométricas de argumento x:

$\cos(2x)-\text{sen}(x)=\text{sen}^2(x)\rightarrow\cos^2(x)-\text{sen}^2(x)-\text{sen}(x)=\text{sen}^2(x)\rightarrow\cos^2(x)-2\text{sen}^2(x)-\text{sen}(x)=0$

Para que la ecuación esté en función de una misma razón trigonométrica podremos $\cos^2 x$ en función del seno: $\cos^2(x)=1-\text{sen}^2(x)$

$1-\text{sen}^2(x)-2\text{sen}^2(x)-\text{sen}(x)=0 \rightarrow -3\cdot\text{sen}^2x-\text{sen}(x)+1=0 \rightarrow \text{sen}(x)=\begin{cases}0{,}43\\-0{,}77\end{cases}$

1) $sen(x)=0{,}43 \rightarrow x=\begin{cases}25{,}7+360k\\154{,}3+360k\end{cases}$

2) $\text{sen}(x)=-0.77 \rightarrow x=\begin{cases}-50{,}1=309.9+360k\\230{,}1+360k\end{cases}$

d) $\text{sen}(x)+\cos(x)=1$

Pongamos sen(x) en función de cos(x) (o al revés)$\rightarrow sen(x)=\sqrt{1-cos^2x}$

$\sqrt{1-cos^2x}+\cos(x)=1 \rightarrow$cambio variable $\cos(x)=y \rightarrow \sqrt{1-y^2}+y=1 \rightarrow$ $\sqrt{1-y^2}=1-y \rightarrow$ (elevando al cuadrado) $1-y^2=1-2y+y^2 \rightarrow 2y^2-2y=0 \rightarrow y=\begin{cases}0\\1\end{cases}$,

1) $\cos(x)=0 \rightarrow x=\begin{cases}90+360k\\270+360k\end{cases}$

2) $\cos(x)=1 \rightarrow x=0+360k$

Tenemos que comprobar que solución es válida (al elevar al cuadrado):

- x=90 → sen(90)+cos(90)=1 **válida**
- x=270 → sen(270)+cos(270)=-1, no válida
- x=0 → sen(0)+cos(0)=1, **válida**

5. Sistemas de ecuaciones trigonométricas

Un sistema de ecuaciones trigonométricas cuando al menos en una de las ecuaciones que la forman es una ecuación trigonométrica.

Para resolver los sistemas trigonométricos no siempre sencillo, veamos los tipos de sistemas más frecuentes:

Nota: en las funciones trigonométricas donde aparezcan las incógnitas en ecuaciones no trigonométricas se suponen que están expresadas en radianes.

5.1. Sistemas resolubles por los cambio de variable o por reducción.

Son sistemas donde aparecen dos razones trigonométricas, tal que podemos hacer el cambio de variable y obtener un sistema de ecuaciones no trigonométricas. ***Ejemplos:***

1) $\begin{cases} sen(2x)+\cos(3y)=1 \\ 2\cdot sen(2x)+4\cdot\cos(3y)=3 \end{cases}$ → X=sen(2x),Y=cos(3y) → $\begin{cases} X+Y=1 \\ 2\cdot X+4\cdot Y=3 \end{cases}$ → X=1/2, Y=1/2.

X=1/2 → sen(2x)=1/2 → x=15º+360ºk, x=75º+360ºk, x=195º+360ºk, x=255º+360ºk

Y=1/2 → cos(3Y)=1/2 → y=100º+360ºk, y=220º+360ºk, y=340º+360ºk, y=20º+360ºk, y=140º+360ºk, y=260º+360ºk

2) $\begin{cases} (1)\ \ y+\cos^2(x)=1 \\ (2)\ \ 2\cdot y+2\cdot sen^2(x)=0 \end{cases}$

2·(1)-(2) → $2\cdot\cos^2(x)-2\cdot sen^2(x)=2$ → $1-sen^2(x)-sen^2(x)=1$ → sen(x)=0 → x=$\begin{cases} 0º+360k \\ 180º+360k \end{cases}$

$y=1-\cos^2(x)=0rad=0º$

5.2. Sistemas donde una ecuación del sistema es resoluble.

3*)* $\begin{cases} sen(x)+\cos(y)=1 \\ x+y=\pi/2 \end{cases}$ → x=π/2-y

sen(π/2-y)+cos(y)=1 →cos(y)+cos(y)=1 → cos(y)=1/2 → y=$\begin{cases} 60º+360º\cdot k=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k \\ 300º+360º\cdot k=\dfrac{5\pi}{3}+2\pi k \end{cases}$

x=$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\right)=\dfrac{\pi}{6}-2\pi k \\ \dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{5\pi}{3}+2\pi k\right)=\dfrac{-7\pi}{6}-2\pi k \end{cases}$

Soluciones, si x=$\dfrac{\pi}{6}-2\pi k$ → y=$\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$; si x=$\dfrac{-7\pi}{6}-2\pi k$ → y=$\dfrac{5\pi}{3}+2\pi k$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

4) $\begin{cases} sen(x-y)=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ sen(x+y)=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x-y=\begin{cases} 45º+360º\,k \\ 135º+360º\,k \end{cases} \\ x+y=\begin{cases} 60º+360º\,k \\ 120º+360º\,k \end{cases} \end{array}$.

Tenemos 4 posibles sistemas:

a)
$$\begin{cases} x-y=45º+360º\,k \\ x+y=60º+360º\,k \end{cases} \rightarrow 2x=105º+360º\,k \rightarrow \begin{cases} x=52{,}5º+360º\,k \rightarrow y=7{,}5º+360º\,k \\ x=232{,}5º+360º\,k \rightarrow y=187{,}5º+360º\,k \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x-y=45º+360º\,k \\ x+y=120º+360º\,k \end{cases} \rightarrow 2x=165º+360º\,k \rightarrow \begin{cases} x=82{,}5º+360º\,k \rightarrow y=37{,}5º+360º\,k \\ x=262{,}5º+360º\,k \rightarrow y=217{,}5º+360º\,k \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x-y=135º+360º\,k \\ x+y=60º+360º\,k \end{cases} \rightarrow 2x=195º+360º\,k \rightarrow \begin{cases} x=97{,}5º+360º\,k \rightarrow y=322{,}5º+360º\,k \\ x=277{,}5º+360º\,k \rightarrow y=142{,}5º+360º\,k \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x-y=135º+360º\,k \\ x+y=120º+360º\,k \end{cases} \rightarrow 2x=255º+360º\,k \rightarrow \begin{cases} x=127{,}5º+360º\,k \rightarrow y=352{,}5º+360º\,k \\ x=307{,}5º+360º\,k \rightarrow y=172{,}5º+360º\,k \end{cases}$$

PROBLEMAS

SISTEMAS

1. Resolver los siguientes sistemas

a)

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ x+sen^2 y=2 \\ (2)\ x+\cos^2 y=1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{(1)-(2)} \rightarrow sen^2 y-\cos^2 y=1 \rightarrow 1-\cos^2 y-\cos^2 y=1 \rightarrow$$

$$\cos y=0 \rightarrow y=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}+2\pi k \rightarrow x=1-\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1 \\ \dfrac{3\pi}{2}+2\pi k \rightarrow x=1-\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=1 \end{cases}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ sen(x)\cdot\cos(y)=\dfrac{3}{4} \\ (2)\ \cos(x)\cdot sen(y)=\dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \rightarrow \text{(1)+(2)} \rightarrow sen(x)\cdot\cos(y)+\cos(x)\cdot sen(y)=1 \rightarrow sen(x+y)=1$$

$$(x+y)=90º \rightarrow x=90º-y$$

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ sen(90-y)\cdot\cos(y)=\dfrac{3}{4}\\(2)\ \cos(90-y)\cdot sen(y)=\dfrac{1}{4}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}(1)\ \cos(y)\cdot\cos(y)=\dfrac{3}{4}\\(2)\ sen(y)\cdot sen(y)=\dfrac{1}{4}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}(1)\ \cos^2(y)=\dfrac{3}{4}\\(2)\ sen^2(y)=\dfrac{1}{4}\end{array}\right\}\rightarrow\cos(y)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(y)=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow y=\begin{cases}30º+360º\,k\rightarrow x=60º+360º\,k\\330º+360º\,k\rightarrow x=-240º+360º\,k=120º+360º\,k\end{cases}$$

$$\cos(y)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow y=\begin{cases}150º+360º\,k\rightarrow x=-60º+360º\,k=300º+360º\,k\\210º+360º\,k\rightarrow x=-120º+360º\,k=240º+360º\,k\end{cases}$$

c)

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \cos(x)+\cos(y)=1\\(2)\ \cos(x+y)=1\end{array}\right\}\rightarrow x+y=0\rightarrow y=-x\rightarrow\cos(x)+\cos(-x)=1\rightarrow 2\cdot\cos(x)=1\rightarrow\cos(x)=\frac{1}{2}$$

$$x=\begin{cases}60º+360º\,k\rightarrow y=-60º+360º\,k=300º+360º\,k\\300º+360º\,k\rightarrow y=-300º+360º\,k=60º+360º\,k\end{cases}$$

d)

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ x+y=\dfrac{\pi}{2}\\(2)\ sen(x)+sen(y)=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\end{array}\right\}\rightarrow\ y=\frac{\pi}{2}-x\rightarrow\ sen(x)+sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}\rightarrow$$

$$sen(x)+\cos(x)=\frac{\sqrt{6}}{2}\rightarrow sen(x)+\sqrt{1-sen^2(x)}=\frac{\sqrt{6}}{2}\xrightarrow{sen(x)=X}\sqrt{1-X^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}-X$$

$$1-X^2=\frac{6}{4}-\sqrt{6}X+X^2\rightarrow 2X^2-\sqrt{6}X+\frac{1}{2}=0\rightarrow X=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{array}\right.$$

$$x=arcsen\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)=\left\langle\begin{array}{l}15º+360k\ \rightarrow y=75º+360º\,k\\165º+360k\rightarrow y=-75º+360º\,k=285º+360º\,k\end{array}\right.$$

$$x=arcsen\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)=\left\langle\begin{array}{l}75º+360k\ \rightarrow y=15º+360º\,k\\105º+360k\rightarrow y=-15º+360º\,k=345º+360º\,k\end{array}\right.$$

Haciendo las comprobaciones (al elevar al cuadrado hay que comprobar) sólo son ciertas:

- x=75º+360ºk, y=15º +360ºk
- x=15º+360ºk, y=75º+360ºk

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

ECUACIONES

2. Resolver las siguientes ecuaciones

a)

$$sen\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow\frac{\pi}{4}+2x=\begin{cases}\frac{\pi}{3}+2\pi k\\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k\end{cases}\rightarrow 2x=\begin{cases}\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}+2\pi k\\ \frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}+2\pi k\end{cases}$$

$$x=\begin{cases}\frac{\pi}{24}+2\pi k\\ \frac{25\pi}{24}+2\pi k\\ \frac{5\pi}{24}+2\pi k\\ \frac{29\pi}{24}+2\pi k\end{cases}$$

b)

$$sen(3x)-sen(30^{o})=0\rightarrow sen(3x)=sen(30^{o})\rightarrow sen(3x)=\frac{1}{2}\rightarrow 3x=\begin{cases}30^{o}+360^{o}k\\ 150^{o}+360^{o}k\end{cases}$$

$$x=\begin{cases}10^{o}+120^{o}k\\ 50^{o}+120^{o}k\end{cases}=\begin{cases}10^{o}+360^{o}k\\ 130^{o}++360^{o}k\\ 250^{o}+360^{o}k\\ 50^{o}+360^{o}k\\ 170^{o}+360^{o}k\\ 290^{o}+360^{o}k\end{cases}$$

c)

$$sen(2x)=2\cdot\cos(x)\rightarrow 2\cdot sen(x)\cdot\cos(x)-2\cdot\cos(x)=0\rightarrow 2\cdot\cos(x)\cdot\left(sen(x)-1\right)=0$$

$$\cos(x)=0\rightarrow x=\begin{cases}90^{o}+360^{o}k\\ 270^{o}+360^{o}k\end{cases}$$

$$sen(x)=1\rightarrow x=90^{o}+360^{o}k$$

d)

$$sen(x)+sen(3x)=\cos(x)\rightarrow 2\cdot sen(2x)\cdot\cos(x)=\cos(x)\rightarrow \cos(x)(2\cdot sen(2x)-1)=0$$

$$\cos(x)=0\rightarrow x=\begin{cases}90º+360º\,k\\270º+360º\,k\end{cases}$$

$$sen(2x)=\frac{1}{2}\rightarrow 2x=\begin{cases}30º+360º\,k\\150º+360º\,k\end{cases}\rightarrow x=\begin{cases}15º+180º\,k\\75º+180º\,k\end{cases}=\begin{cases}15º+360º\,k\\195º+360º\,k\\75º+360º\,k\\255º+360º\,k\end{cases}$$

e)

$$6\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos(x)=1\rightarrow 6\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-sen^2\left(\frac{x}{2}\right)=1\rightarrow 8\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=2$$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{4}\rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\frac{1}{2}\rightarrow\left(\frac{x}{2}\right)=\begin{cases}60º+360º\,k\\300º+360+360º\,k\\120º+360º\,k\\240º+360º\,k\end{cases}\rightarrow x=\begin{cases}120º+720k\\600º+720º\,k\\240º+720º\,k\\480º+720k\end{cases}\rightarrow x=\begin{cases}120º+720k\\240º+720k\end{cases}$$

f)

$$sen(x)+\sqrt{3}\cdot\cos(x)=2\rightarrow\sqrt{3}\cdot\cos(x)=2-sen(x)\rightarrow 3\cdot\cos^2 x=4-4sen(x)+sen^2(x)$$

$$3-3sen^2(x)=4-4sen(x)+sen^2(x)\rightarrow 4sen^2(x)-4sen(x)+1=0\rightarrow sen(x)=\frac{1}{2}\rightarrow x=\begin{cases}30º+360k\\150º+360º\,k\end{cases}$$

Como hemos elevado al cuadrado tenemos que comprobar las soluciones:

x= 30º → $sen(30)+\sqrt{3}\cdot\cos(30)=2\rightarrow\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2$ Solución

x= 150º → $sen(150)+\sqrt{3}\cdot\cos(150)=2\rightarrow\frac{1}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-1$ No solución

Otra forma (idea feliz):

$$sen(x)+\sqrt{3}\cdot\cos(x)=2\rightarrow\frac{1}{2}sen(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos(x)=1\rightarrow\cos(60º)\cdot sen(x)+sen(60º)\cdot\cos(x)=1$$

$$sen(x+60º)=1\rightarrow x+60º=90º+360º\,k\rightarrow x=30º+360º\,k$$

SIMPLIFICACIONES

3. Simplifica las siguientes expresiones:

a)

$$\frac{sen(2a)\cdot\cos(a)}{sen(a)\cdot(1+\cos 2a)}=\frac{2\cdot sen(a)\cdot\cos(a)\cdot\cos(a)}{sen(a)\cdot(1+\cos^2 a-sen^2 a)}=\frac{2\cdot sen(a)\cdot\cos^2(a)}{sen(a)\cdot(1+\cos^2 a-1+\cos^2 a)}=$$

$$=\frac{2\cdot sen(a)\cdot\cos^2(a)}{2\cdot sen(a)\cdot\cos^2(a)}=1$$

b)

$$\frac{tg(a)}{tg(2a)-tg(a)}=\frac{tg(a)}{\frac{2tg(a)}{1-tg^2(a)}-tg(a)}=\frac{tg(a)\cdot(1-tg^2(a))}{tg(a)+tg^3(a)}=\frac{1-tg^2a}{1+tg^2a}=\frac{\frac{\cos^2 a-sen^2a}{\cos^2 a}}{\frac{\cos^2 a+sen^2a}{\cos^2 a}}=$$

$$=\frac{\cos^2 a-sen^2a}{sen^2a+\cos^2 a}=\frac{\cos^2 a-sen^2a}{1}=\cos^2 a-sen^2a=\cos(2a)$$

c)

$$\frac{sen(x-y)-sen(x+y)}{\cos(x+y)-\cos(x-y)}=\frac{2\cdot\cos(x)\cdot sen(-y)}{-2sen(x)\cdot sen(y)}=-\cot g(x)\frac{sen(-y)}{sen(y)}=-\cot g(x)\frac{-sen(y)}{sen(y)}=\cot g(x)$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Tema 7. Geometría en plano. Vectores y rectas

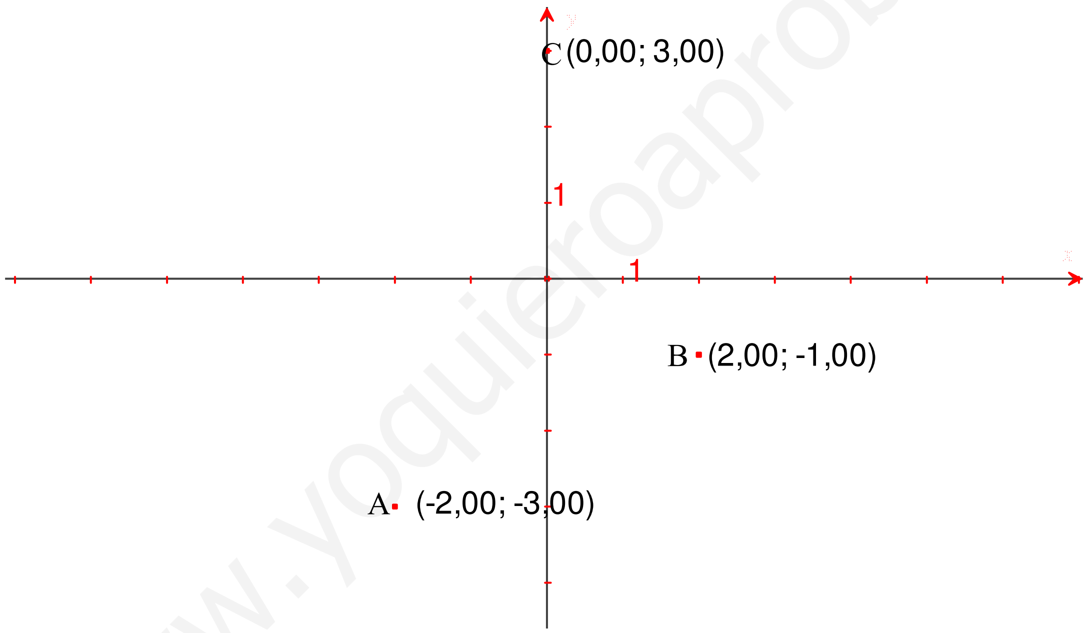
1. Vectores y puntos en el plano. Coordenadas

El sistema de coordenadas cartesianas es la manera más habitual de ordenar la posición de los elementos en el plano y en el espacio. En este tema nos centraremos en los sistemas en el plano (2 dimensiones)

Definición: sistema de coordenadas cartesianas en el plano está formado por dos rectas perpendiculares (eje vertical OY, eje horizontal OX) que se cortan en un punto denominado origen. Cada uno de los dos ejes está escalado de forma que la distancia entre dos naturales consecutivos es la misma. La parte derecha (respecto al origen) del eje OX es el semieje positivo siendo la izquierda el negativo. En el eje OY la parte positiva es la de arriba del origen siendo la negativa la inferior

Definición: un punto P en el plano nos describe una posición, viene definido por dos coordenadas P(x,y), siendo las proyecciones del punto en los ejes OX y OY. Los puntos se escriben con mayúsculas y las coordenadas se escriben a continuación de la letra sin escribir el símbolo igual entre ambas.

Ejemplos: A(-2,-3), B(2,-1), C(0,3)

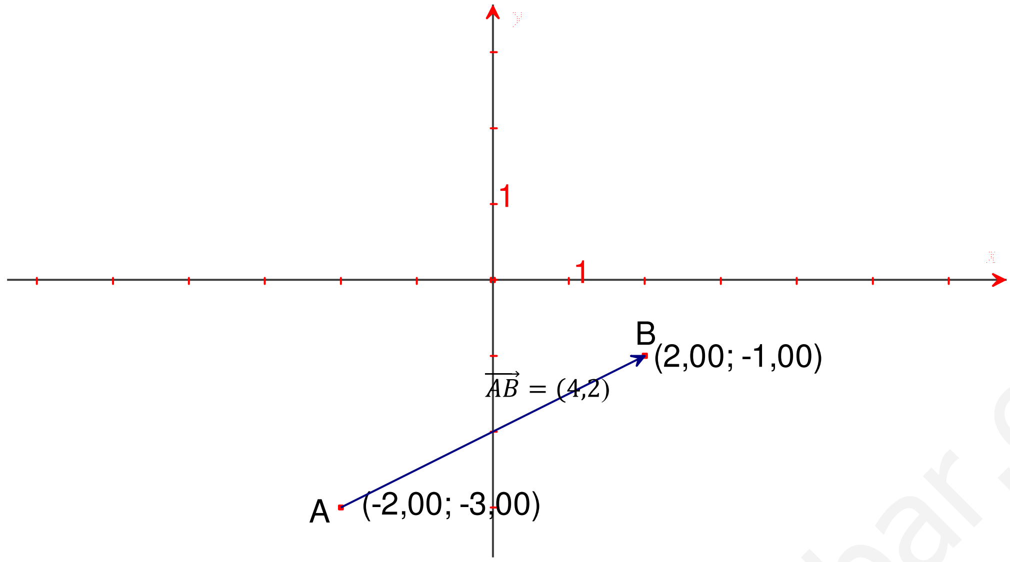


Definición: vector fijo $\overline{AB}$ entre dos puntos A (origen) y B (extremo) es un segmento orientado caracterizado por:

- Dirección o recta que le contiene o cualquiera paralela
- Sentido u orientación del vector de A a B
- Módulo o longitud del segmento
- Origen (el punto A)

Coordenadas del vector fijo: el vector $\overline{AB}$ caracterizado por dos coordenadas $\overline{AB}$=(x,y), donde x indica las unidades que avanza en el eje horizontal e y las unidades de avanza en el eje vertical. Las coordenadas se obtienen restando las coordenadas del extremo menos la del origen, si $A(x_a,y_a)$ y $B(x_b,y_b)$ → $\overline{AB}=(x_b-x_a,y_b-y_a)$.

Ejemplo: veamos gráficamente el vector $\overrightarrow{AB}$:



Vemos en este ejemplo $\overrightarrow{AB}=(4,2)$, vemos que avanza 4 unidades a la derecha y 2 hacia arriba.

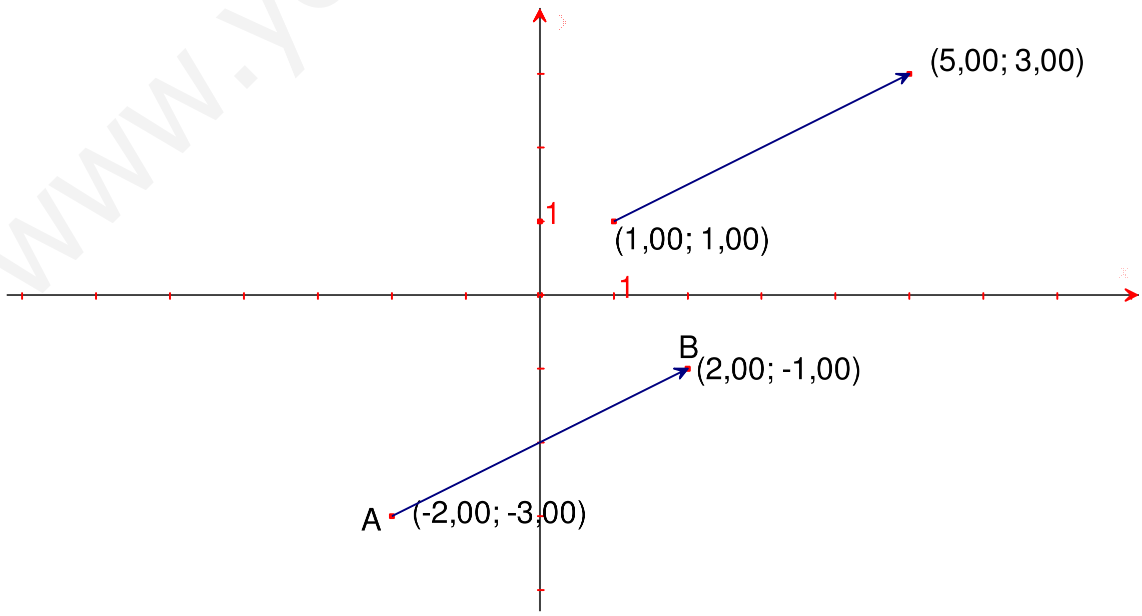
El módulo del vector se denota como $|\overrightarrow{AB}|$. Para calcular el módulo de un vector $\overrightarrow{AB}$=(x,y)=(x_b-x_a,y_b-y_a) aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2}$$

Nota: $\overrightarrow{AB}$=$-\overrightarrow{BA}$, es decir mismo módulo dirección, pero sentido opuesto.

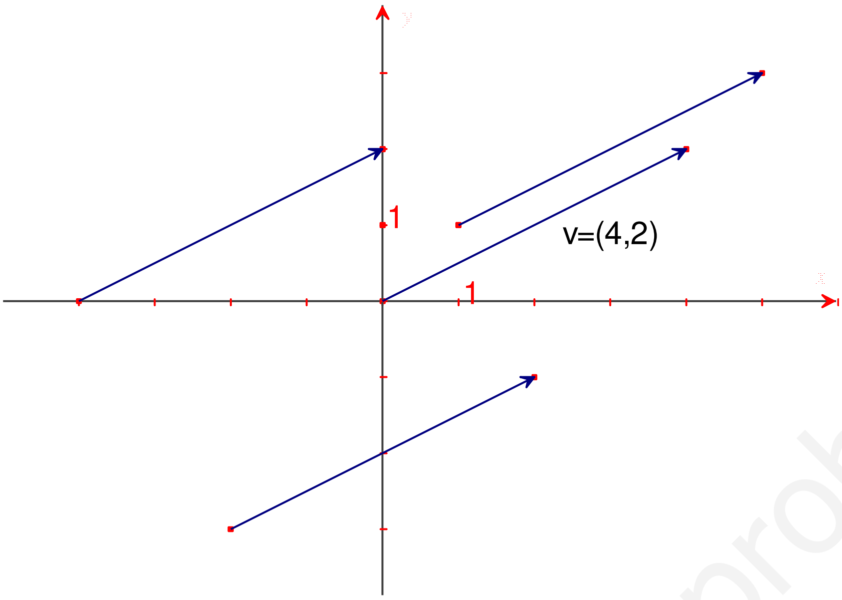
Definición: vectores equipolentes son los que tienen misma dirección, sentido y módulo, lo único que cambia es el origen del vector. Las coordenadas son las mismas en todos los vectores equipolentes.

Ejemplo: A(-2,-3), B(2,-1), C(1,1), D(5,3) $\overrightarrow{AB}=(4,2)$, $\overrightarrow{CD}=(4,2)$



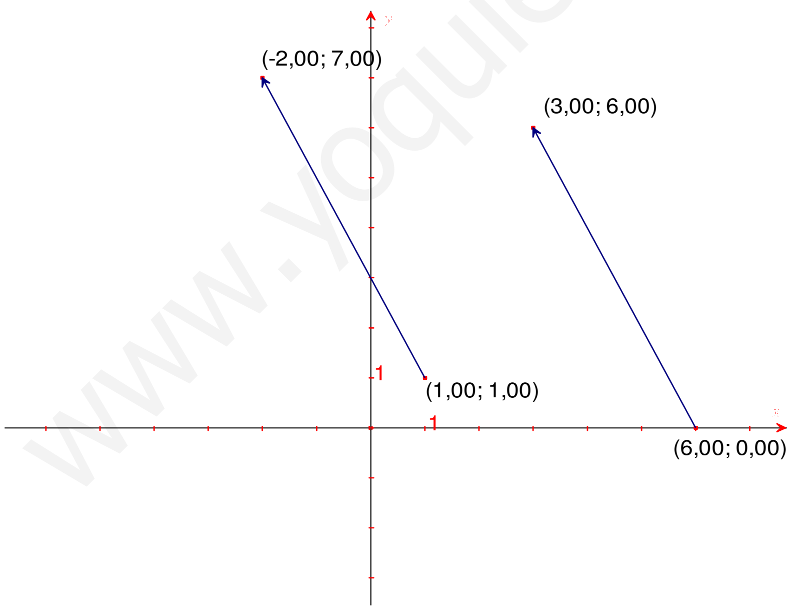
***Definición*:** vector libre es el conjunto de todos los vectores equipolentes, se suelen denotar con una letra minúscula con vector arriba. A la hora de representarlos se suele tomar el vector cuyo origen está en el origen de coordenadas.

Ejemplo $\vec{v} = (4{,}2)$



Ejercicios

Ejercicio 1. Representar los vectores $\overrightarrow{AB}$ **y** $\overrightarrow{CD}$ siendo A(1,1), B(-2,7), C(6,0), D(3,6) y observa que son equipolentes. Calcula las coordenadas y el módulo.



$\overrightarrow{AB}$=$\overrightarrow{CD}$=(-3,6)

$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{9+36}=$
$=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

Ejercicio 2. Dados los puntos A(3,-1), B(4,6) y C(0,0) hallar el punto D para que los vectores $\overrightarrow{AB}$ **y** $\overrightarrow{CD}$ sean equipolentes.

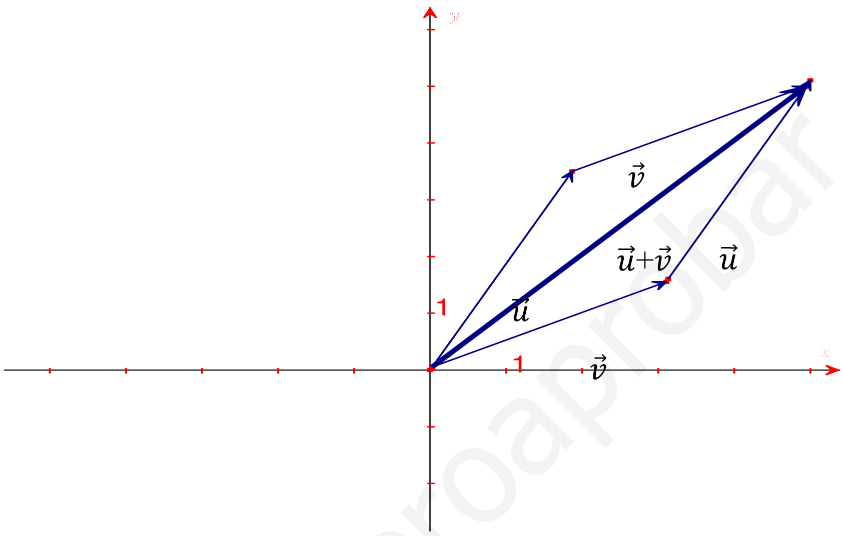
D(x,y), $\overrightarrow{AB}=(4-3{,}6+1)=(1{,}7)$ $\overrightarrow{CD}=(x-0, y-0)$. Como son equipolentes se cumple $\overrightarrow{AB}$=$\overrightarrow{CD}$ → x=1, y=7→ D(1,7)

2. Operaciones con vectores

2.1. Suma y resta de vectores

La suma de dos vectores $\vec{u}$=(x_1,y_1) y $\vec{v}$=(x_2,y_2) es otro vector libre que se denota como $\vec{u}+\vec{v}$ =(x_1+x_2,y_1+y_2). Gráficamente el vector suma es que se obtiene de la siguiente forma:

- Se sitúan los dos vectores con mismo origen
- A partir de los dos vectores se genera un paralelogramo
- El vector suma $\vec{u}+\vec{v}$ es la diagonal del paralelogramo

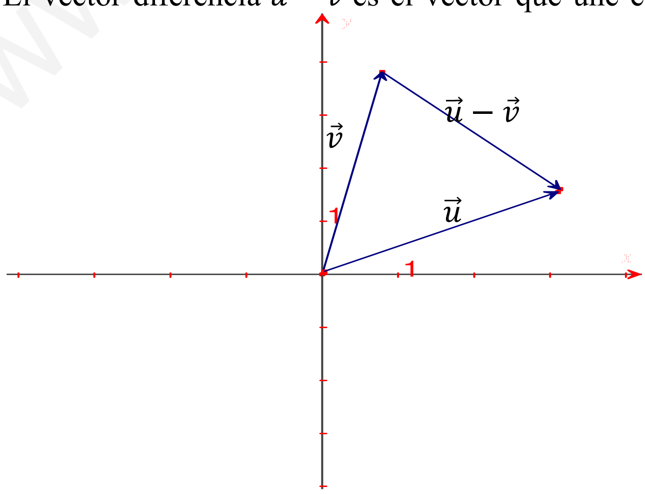


Propiedades:

- Conmutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- Asociativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

La diferencia de dos vectores $\vec{u}$=(x_1,y_1) y $\vec{v}$=(x_2,y_2) es otro vector libre que se denota como $\vec{u}-\vec{v}$ =(x_1-x_2,y_1-y_2). Gráficamente el vector diferencia es que se obtiene de la siguiente forma:

- Se sitúan los dos vectores con mismo origen
- El vector diferencia $\vec{u}-\vec{v}$ es el vector que une el extremo de $\vec{v}$ con el de $\vec{u}$

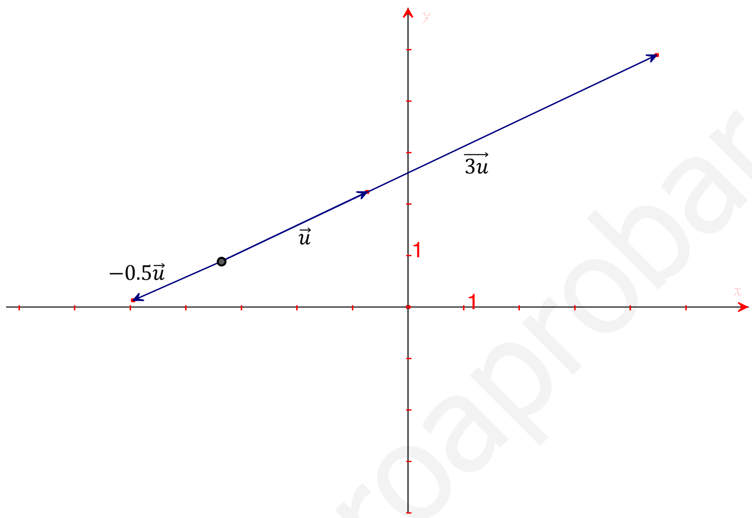


2.2. Producto de un número real por un vector.

El producto de un vector libre $\vec{u}$=(x,y) por un número real λ es otro vector libre λ·$\vec{u}$ = (λx, λy) tal que se cumple:

- Misma dirección
- El módulo: $|\lambda\cdot\overrightarrow{u}|=|\lambda|\cdot|\vec{u}|$
- El sentido es tal que si λ>0 mismo sentido y si λ<0 sentido contrario

Ejemplo gráfico:

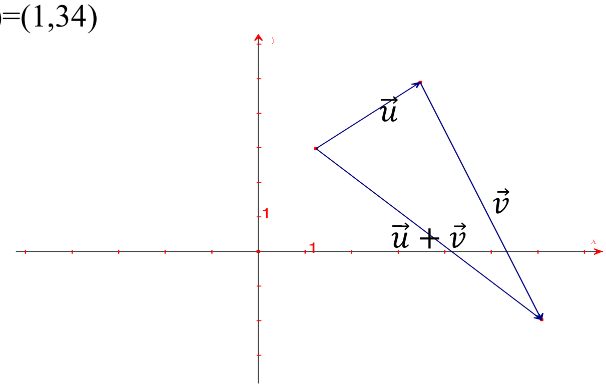


Ejemplo analítico: $\vec{u}=(3,4)$, 2· $\vec{u}=(6,8)$ → módulo $|\ \vec{u}\ |=\sqrt{9+16}=5$, $|2\vec{u}|=\sqrt{36+64}=2\cdot 5=10$

Ejercicio 3.

a) Representar los vectores $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ y $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$ siendo A(1,3), B(4,5)y C(6,-2). Halla sus coordenadas
b) Representar $\vec{u}$+$\vec{v}$ y obtén las coordenadas
c) Representar 3$\vec{u}$, -2$\vec{u}$, 0$\vec{v}$ y hallar sus coordenadas
d) Representa y halla las coordenadas de 3$\vec{u}$-4$\vec{v}$

a) $\overrightarrow{AB}=(3,2),\overrightarrow{BC}=(2,-7)$
b) $\vec{u}$+$\vec{v}$=(5,-5)
c) $3\vec{u}=(9,6),-2\vec{u}=(-6,-4),\ 0\vec{v}=(0,0)$
d) 3$\vec{u}$-4$\vec{v}$=(9,6)-(8,-28)=(1,34)

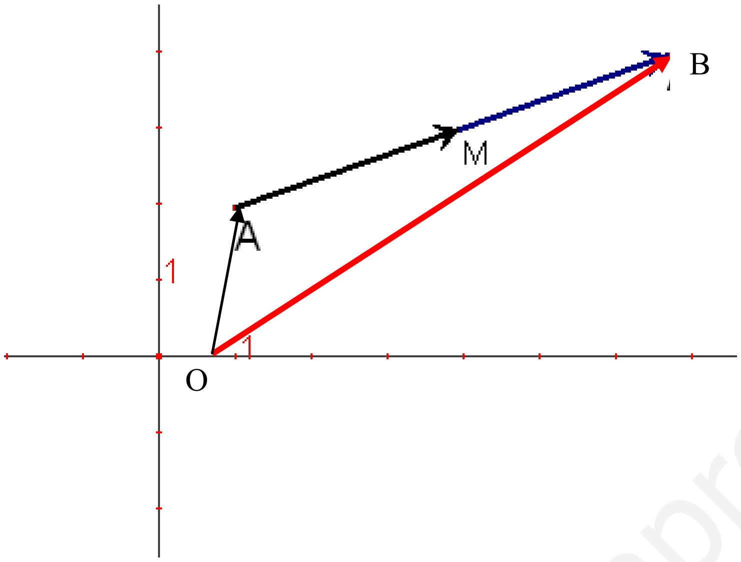


Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

2.3. Punto medio de dos puntos

En este apartado seremos capaces de calcular el punto medio un segmento a partir de la suma de vectores.

Consideramos el segmento con extremos $A(x_a,y_a)$ y $B(x_b,y_b)$ y vamos a determinar el punto medio $M(x_m,y_m)$. Observa la figura:



$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{AM} \rightarrow \overrightarrow{AB}=2\cdot\overrightarrow{AM}$

Expresando los vectores en coordenadas:

$(x_b-x_a,y_b-y_a)=2\cdot(x_m-x_a,y_a-y_m) \rightarrow \begin{cases} x_b = x_a + 2(x_m - x_a) \\ y_b = y_a + 2(y_m - y_a) \end{cases}$

De donde despejando obtenemos las coordenadas de M:

$$\boxed{x_m = \frac{x_a + x_b}{2} \qquad y_m = \frac{y_a + y_b}{2}}$$

Ejercicio 4: Hallar el punto medio del segmento de vértices A(1,3), B(2,-1). Dividir el segmento anterior en tres partes

a) $M(\frac{1+2}{2},\frac{3-1}{2}) \rightarrow M(1.5,1)$

b) Llamemos $M_1(x,y)$ y $M_2(x',y')$ a los puntos que dividen el segmento AB en tres partes, se cumple:

$\overrightarrow{AB}=3\cdot\overrightarrow{AM_1} \rightarrow (1,-4)=3(x-1,y-3) \rightarrow \begin{array}{l} 1 = 3x-3 \rightarrow x=\frac{4}{3} \\ -4 = 3y-9 \rightarrow y=\frac{5}{3} \end{array}$

$2\cdot\overrightarrow{AM}_1=\overrightarrow{AM}_2 \rightarrow 2\cdot(\frac{4}{3}-1,\frac{5}{3}-3)=(x'-1,y'-3) \rightarrow \begin{array}{l} \frac{2}{3} = x-1 \rightarrow x=\frac{5}{3} \\ -\frac{8}{3} = y-3 \rightarrow y=\frac{1}{3} \end{array}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

3. Producto escalar de dos vectores

El producto escalar de dos vectores libres $\vec{u}$ =(u_x,u_y) y $\vec{v}$=(v_x,v_y) es un número cumple:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$ Siendo $\widehat{\vec{u},\vec{v}}$ el ángulo que forman los dos vectores.

Se puede calcular de forma analítica de la siguiente forma:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y$$

Si dos vectores son perpendiculares se cumple que $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=0$ y por tanto su producto escalar es nulo: $\vec{u}\perp\vec{v}\ \rightarrow\ \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

Las dos definiciones del producto escalar nos permiten calcular el ángulo que forma los dos vectores, simplemente despejando $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ de las dos ecuaciones:

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y}{\sqrt{u_x{}^2+u_y{}^2}\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2}}$$

Ejercicio 5: calcular el producto escalar de $\vec{u}=(-2,5)$ y $\vec{v}=(1,3)$ así como el ángulo que forman los dos vectores.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y=-2\cdot1+5\cdot3=13$

$|\vec{u}|=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$

$|\vec{v}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{13}{\sqrt{29}\sqrt{10}}=\frac{13}{\sqrt{290}}\rightarrow\widehat{\vec{u},\vec{v}}=\arccos(\frac{13}{\sqrt{290}})=40{,}23^{o}$

Ejercicio 6: Calcular el valor de a para que el vector $\vec{u}$=(a,1) forme un ángulo de 30º con el vector $\vec{v}$=(2,3):

$\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}=2a+3$

$|\vec{\boldsymbol{u}}|=\sqrt{a^2+1}$

$|\vec{\boldsymbol{v}}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{2a+3}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{13}}=\cos(30)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$4a+6=\sqrt{3}\sqrt{13}\sqrt{a^2+1}$

$(4a+6)^2=3\cdot13(a^2+1)$

$$16a^2+36+48a=39a^2+39\rightarrow 23a^2-48a+3=0\rightarrow a=\frac{48\pm\sqrt{2028}}{46}=\begin{cases}\frac{24}{23}+\frac{13\sqrt{3}}{23}\\ \frac{24}{23}-\frac{13\sqrt{3}}{23}\end{cases}$$

Comprobando sólo válida la primera solución $\rightarrow a=\frac{24}{23}+\frac{13\sqrt{3}}{23}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

4. Combinación lineal de vectores

Un vector $\vec{w}$ es combinación lineal de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si existen dos números reales que llamaremos λ y μ tal que $\vec{w}=\lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{v}$

Ejemplo:

(3,-2)=3·(1,0)-2·(0,1)

(7,2)=2·(2,1)+3·(1,0)

Ejercicio 7: Calcular λ y μ:

a) (6,1)= λ·(2,1)+ μ·(1,-2)
b) (1,-6)= λ·(1,0)+ μ(1,-3)
c) (3,-2)= λ(1,1)+μ(2,2)

a) $\left.\begin{array}{l} 6=2\lambda+\mu \\ 1=\lambda-2\mu \end{array}\right\} \rightarrow$ λ=13/5, μ=4/5

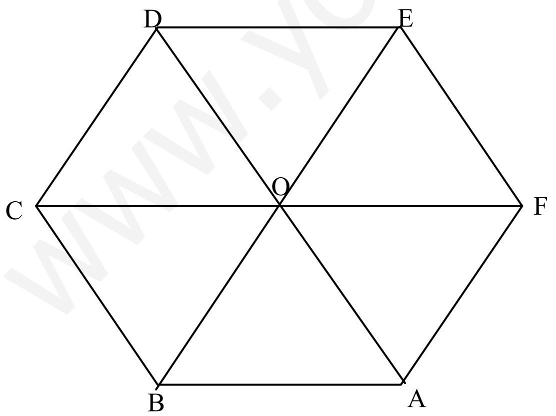
b) $\left.\begin{array}{l} 1=\lambda+\mu \\ -6=-3\mu \end{array}\right\} \rightarrow$ λ=-1, μ=2

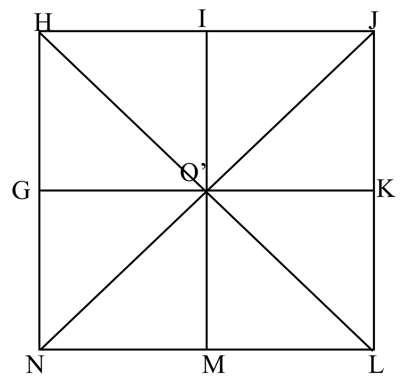
c) $\left.\begin{array}{l} 3=\lambda+2\mu \\ -2=\lambda+2\mu \end{array}\right\}$ Incompatible.

Si los dos vectores no son proporcionales todo vector se puede poner como combinación lineal de éstos (**linealmente independientes**).

Si son proporcionales esto no ocurre, ver ejemplo c). Se llaman **linealmente dependientes**

Ejercicio 8: rellenar los cuadrados con números:





1) $\overrightarrow{AF}=\ \overrightarrow{OB}+\ \overrightarrow{CO}$
2) $\overrightarrow{CF}=\ \overrightarrow{DO}+\ \overrightarrow{BO}$
3) $\overrightarrow{BE}=\ \overrightarrow{CO}+\ \overrightarrow{OD}$
4) $\overrightarrow{DE}=\ \overrightarrow{OB}+\ \overrightarrow{FE}$
5) $\overrightarrow{BE}=\ \overrightarrow{OB}+\ \overrightarrow{CO}$

1) $\overrightarrow{GO'}=\ \overrightarrow{NO'}+\ \overrightarrow{HO'}$
2) $\overrightarrow{IO'}=\ \overrightarrow{IJ}+\ \overrightarrow{JO'}$
3) $\overrightarrow{NJ}=\ \overrightarrow{JO'}+\ \overrightarrow{GO'}$
4) $\overrightarrow{O'L}=\ \overrightarrow{O'M}+\ \overrightarrow{LM}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Solución

1) $\overrightarrow{AF}$=-1·$\overrightarrow{OB}$+0·$\overrightarrow{CO}$
2) $\overrightarrow{CF}$=2·$\overrightarrow{DO}$+2·$\overrightarrow{BO}$
3) $\overrightarrow{BE}$=2·$\overrightarrow{CO}$+2·$\overrightarrow{OD}$
4) $\overrightarrow{DE}$=-1·$\overrightarrow{OB}$-1·$\overrightarrow{FE}$
5) $\overrightarrow{BE}$=-2·$\overrightarrow{OB}$+0·$\overrightarrow{CO}$

1) $\overrightarrow{GO'}$=0.5·$\overrightarrow{NO'}$+0.5·$\overrightarrow{HO'}$
2) $\overrightarrow{IO'}$=1·$\overrightarrow{IJ}$+1·$\overrightarrow{JO'}$
3) $\overrightarrow{NJ}$=-2·$\overrightarrow{JO'}$+0·$\overrightarrow{GO'}$
4) $\overrightarrow{O'L}$=1·$\overrightarrow{O'M}$-1·$\overrightarrow{LM}$

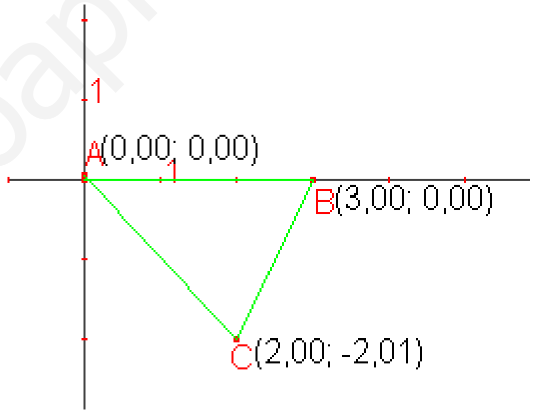
5. Distancia entre dos puntos

La distancia de dos puntos A y B, d(A,B), coincide con el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$, ya que recordemos que el módulo media el tamaño del vector, es decir la distancia entre el origen A y el extremo B del vector:

d(A,B)=| $\overrightarrow{AB}$|=$\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2}$

Ejercicio 9: Sea el triángulo de vértices A(0,0), B(3,0), C(2,-2). 1) Determinar si el triángulo es isósceles, equilátero o escaleno. 2) calcular los ángulos y ver si es acutángulo, rectángulo o obtusángulo

Viendo la distancia entre los vértices obtendremos el tamaño de los lados, y así podremos discernir si es equilátero, isósceles o escaleno.



1) c=d(A,B)=|$\overrightarrow{AB}$|=|(3,0)|=3

b=d(A,C)=| $\overrightarrow{AC}$|=|(2,-2)|=$\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$

a=d(B,C)= | $\overrightarrow{BC}$|=|(-1,-2)|=$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

Los tres lados son distintos, luego es **escaleno**.

2) Veamos los ángulos:

$$\cos(\hat{A})=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|}=\frac{6}{3\sqrt{8}}=\frac{2}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{8}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow\hat{A}=45^{\circ}$$

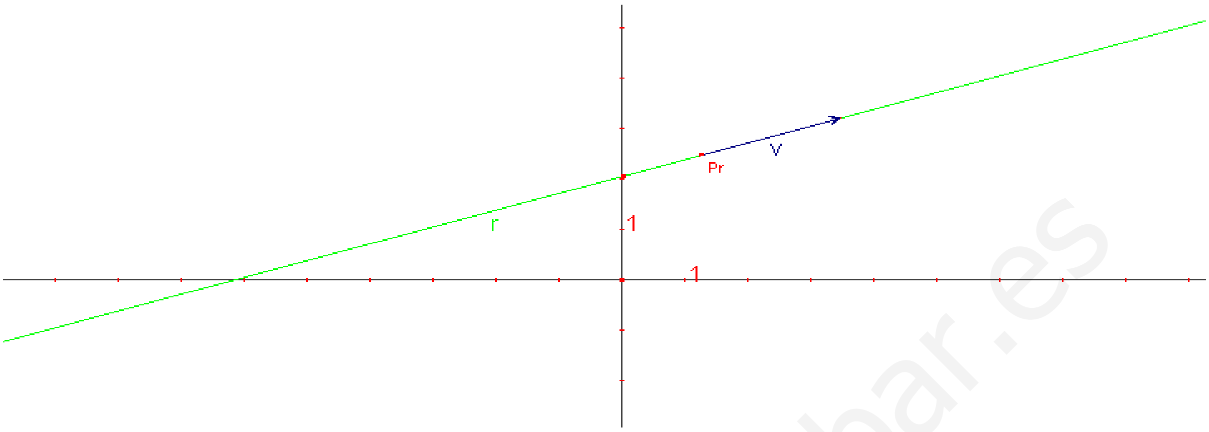
$$\cos(\hat{B})=\frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|}=\frac{3}{3\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\rightarrow\hat{B}=63{,}4^{\circ}$$

$$\cos(\hat{C})=\frac{\overline{CB}\cdot\overline{CA}}{|\overline{CB}|\cdot|\overline{CA}|}=\frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{8}}=\frac{2}{\sqrt{40}}=\frac{2}{2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}\rightarrow\hat{C}=71{,}6^{\circ}$$

Acutángulo

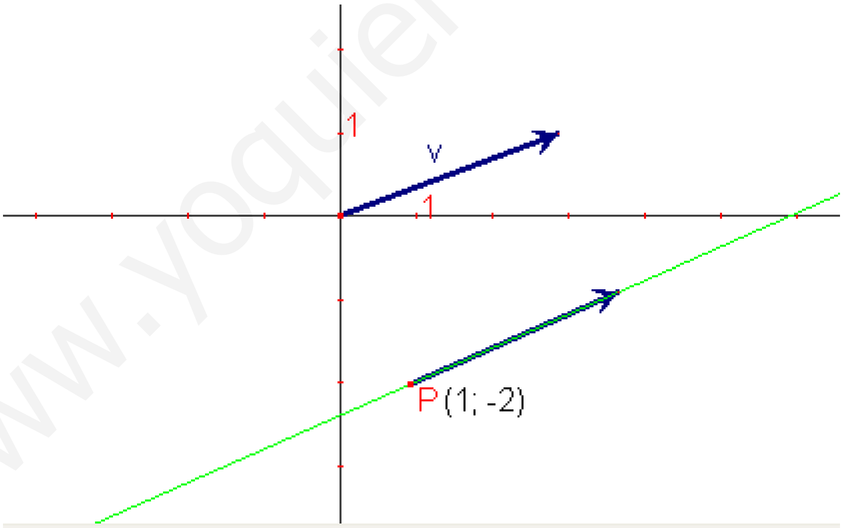
6. Ecuación de la recta

Una recta en el plano, que llamaremos r, está caracterizada por un punto $P_r(x_0,y_0)$ por donde pasa la recta y un vector director $\overrightarrow{v_r}=(v_x,v_y)$ que nos marca la dirección de la recta. Veámoslo gráficamente:



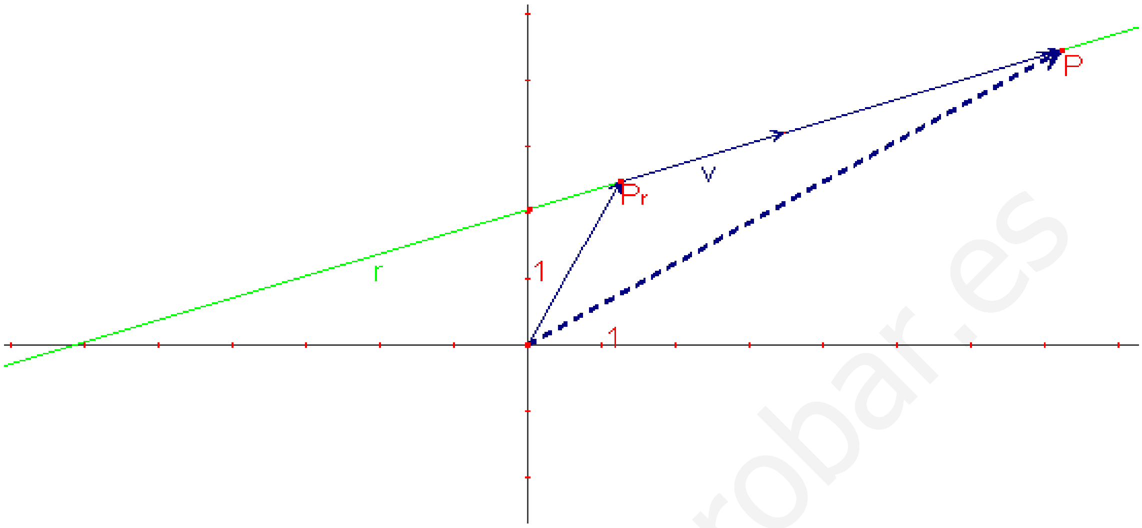
También queda definida con dos puntos, P_r y P_r', ya que estos dos puntos definen el vector director de la recta $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{P_rP'_r}$.

Ejercicio 10: Representar la recta que cumple: pasa por P(1,-2) y $\overrightarrow{v_r}=(3,1)$



6.1. Vectorial y paramétrica

Todo punto P(x,y) de la recta tiene mismas coordenadas que el vector $\overrightarrow{OP}=(x,y)$. El vector $\overrightarrow{OP}$ se puede expresar como suma del vector $\overrightarrow{OP}_r$, con P_r punto de la recta, y de un número de veces el vector director $\overrightarrow{v_r}$. Veamos un ejemplo:



De esta forma todo punto P(x,y) de la recta se podrá expresar como

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP}_r+t\cdot\overrightarrow{v_r}$. Con t un número real.

Expresándolo en coordenadas tenemos la ecuación vectorial de la recta:

$$\boxed{\mathbf{r: (x,y)=(x_0,y_0)+(t\cdot v_x,\ t\cdot v_y)}}$$ **Ecuación vectorial**

La ecuación en paramétricas se obtiene separando las dos coordenadas:

$$\boxed{r:\begin{cases} x = x_0 + t\cdot v_x \\ y = y_0 + t\cdot v_y \end{cases}}$$ **Ecuación en paramétricas**

Ejemplo: expresar la recta que pasa por los puntos A(1,2) y B(3,5) en forma vectorial y paramétrica. Obtener dos puntos más de la recta:

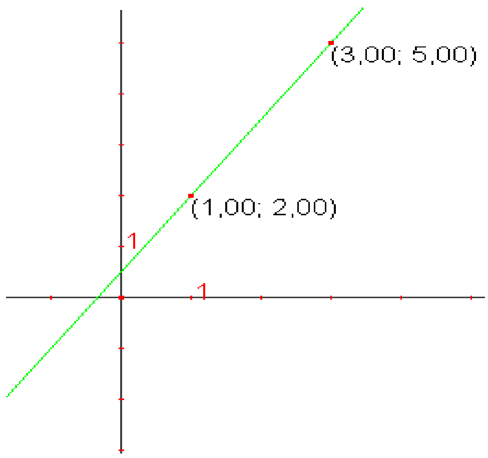
1) Tomemos uno de los puntos como punto de la recta, por ejemplo A: $P_r(1,2)$
2) El vector director es el vector que forman los puntos A y B→ $\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{AB}$=(2,3)

Vectorial → r:(x,y)=(1,2)+t(2,3)

Paramétricas r: $\begin{cases} x = 1 + 2\cdot t \\ y = 2 + 3\cdot t \end{cases}$

Puntos de la recta dando valores a t:

- t=0 → (x,y)=(1,2) que es A
- t=1 → (x,y)=(3,5) que es B
- t=0.5 → (x,y)=(2,3.5)
- t=-1 →(x,y)=(-1,-1)



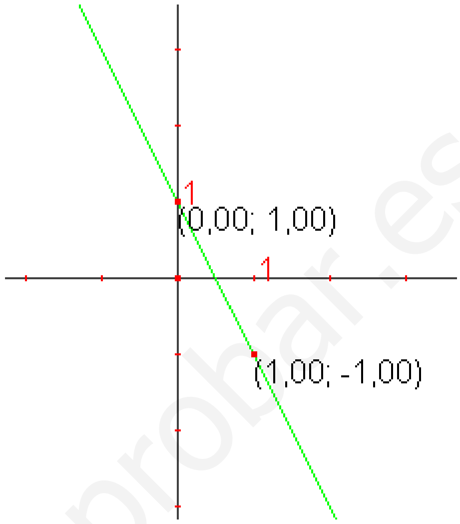
Ejercicio 11: calcular la ecuación vectorial y paramétrica de una recta que pasa por los puntos A(0,1) y B(1,-1). Obtener dos puntos más de la recta:

Tomemos uno de los puntos como punto de la recta, por ejemplo A: $P_r(0,1)$

El vector director es el vector que forman los puntos A y B→ $\vec{v_r}=\overrightarrow{AB}=(1,-2)$

Vectorial → r:(x,y)=(0,1)+t(1,-2)

Paramétricas→ r: $\begin{cases} x = 0 + 1\cdot t \\ y = 1 - 2\cdot t \end{cases}$



Puntos de la recta dando valores a t:

- t=0 → (x,y)=(0,1) que es A
- t=1 → (x,y)=(1,-1) que es B
- t=0.5 → (x,y)=(0.5,0)
- t=-1 →(x,y)=(-1,3)

6.2. Ecuaciones de la recta continua y general

Ecuación continua:

En las dos ecuaciones paramétricas de r lo que vamos a hacer es eliminar la t del sistema y relacionar "y" con "x" como si fuera una función.

Despejando t de la ecuación en paramétricas tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{x - x_0}{v_x} \\ t = \dfrac{x - y_0}{v_y} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y}$$

La ecuación de la recta r que pasa por el punto $P(x_0,y_0)$ y con vector director $\vec{v_r}=(v_x,v_y)$, siempre que $v_x\neq 0$ y $v_y\neq 0$ viene dada por la expresión:

$$\boxed{r: \frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y}}$$

Ecuación continua de la recta

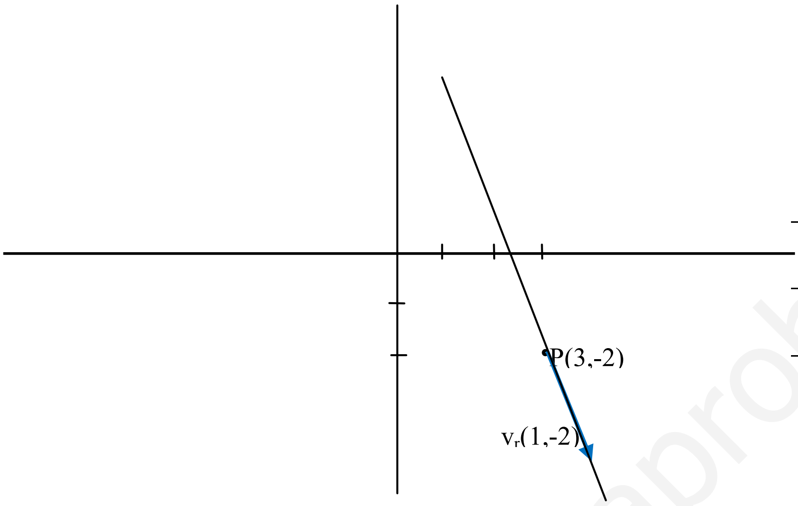
> *Nota:*
>
> Si $v_x=0$ entonces es una recta paralela al eje OY → r: $x=x_0$
>
> Si $v_y=0$ entones es una recta paralela al eje OX → r: $y=y_0$

Ejemplos:

1) la recta que pasa por $P_r(3,-2)$ y $\overrightarrow{v_r}=(1,-2)$ tiene la ecuación continua:

$$r: \frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-2}$$

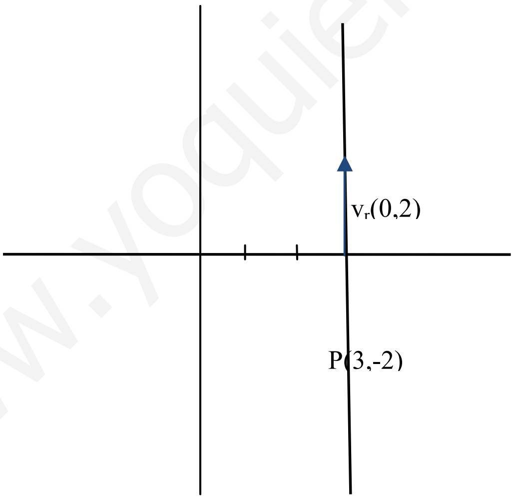
Para hallar otros puntos de la recta hacemos la tabla de valores



x	y
3	-2
0	4
-1	6

2) La recta que pasa por $P_r(3,-2)$ y $\overrightarrow{v_r}=(0,2)$ tiene la ecuación continua:

r: x=3



x	y
3	2
3	1
3	0

<u>Ecuación general</u>: consiste en multiplicar en cruz en la ecuación continua, y ordenar todos los términos en el mismo lado de la igualdad, obteniendo la siguiente expresión:

$v_y(x-x_0)=v_x(y-y_0)$ →operando:

Ax+By+C=0	**Ecuación general**

Nota: como veremos en el apartado 6.5 el vector $\vec{n}=(A,B)$ es normal a la recta.

Ejemplo 1: la recta que pasa por $P_r(3,-2)$ y $\overrightarrow{v_r}=(1,-2)$ tiene la ecuación continua:

r: $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-2}$ → -2x+6=y+2

r: 2x+y-4=0

6.3. Ecuación punto pendiente y explícita de la recta

Ecuación punto pendiente: se llama así porque se obtiene fácilmente a partir de conocer un punto de la recta $P(x_0,y_0)$ y la pendiente m.

La pendiente $m=\frac{v_y}{v_x}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ y nos indica el crecimiento o decrecimiento de la recta:

m>0 crece

m<0 decrece

m=0 no crece ni decrece (paralela al eje OX)

$m=\frac{v_y}{0}=\infty$ crece infinito (paralela eje OY)

Se puede obtener la ecuación a partir de la continua:

$\frac{x-x_0}{v_x}=\frac{y-y_0}{v_y}$ → $(y-y_0)=v_y/v_x(x-x_0)$:

$\boxed{(y-y_0)=m\cdot(x-x_0)}$ **Ecuación punto pendiente**

Si en vez de conocer $\overrightarrow{v_r}$ conocemos dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_0(x_0,y_0)$ la pendiente será (recordemos que $\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{P_1P_0}$):

$m=\frac{v_y}{v_x}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$

Ecuación explícita de la recta: se obtiene despejando la y de la ecuación general, de la ecuación punto pendiente o de la continua:

$\boxed{y=m\cdot x+n}$ **Ecuación explícita**

El valor de n se llama ordenada en el origen pues el valor de y cuando x=0. Así la recta r pasará por el punto (0,n).

Ejercicio 12: calcular la ecuación de la recta en forma punto pendiente, explícita, general, vectorial y paramétrica sabiendo que pasa por el punto $P_1(1,3)$ y $P_0(0,-2)$.

Calculemos el vector director: $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{P_1P_0}$=(-1,-5)

$$m=\frac{-5}{-1}=5$$

- Ecuación punto pendiente: r: (y+2)=5·(x-0)
- Ecuación explícita: r: y=5x-2
- Ecuación general r:y-5x+2=0
- Ecuación vectorial r:(x,y)=(0,-2)+t(-1,-5)
- Ecuación paramétrica r: $\begin{cases} x = 0 - t \\ y = -2 - 5t \end{cases}$

6.4 Rectas paralelas y perpendiculares

Paralelas: dos rectas paralelas serán las que tengan los vectores directores proporcionales, de tal forma que estos tengan misma dirección. Veamos como por tanto tienen misma pendiente:

$r_1 \rightarrow \overrightarrow{v_1} = (v_{1x}, v_{1y})$

$r_2 \rightarrow \overrightarrow{v_2} = (v_{2x}, v_{2y}) = k \cdot (v_{1x}, v_{1y}) = (k \cdot v_{1x}, k \cdot v_{1y})$

$m_2 = \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = \frac{k \cdot v_{1y}}{k \cdot v_{1x}} = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = m_1$

Perpendiculares: dos rectas son perpendiculares si sus vectores directores son perpendiculares, y por tanto su producto escalar es cero. Una forma de conseguir un vector perpendicular a uno dado, $\overrightarrow{v_1} = (v_{1x}, v_{1y})$, es cambiar las coordenadas x por y, y un signo de una de las dos coordenadas$\rightarrow \overrightarrow{v_2} = (v_{1y}, -v_{1x})$. Veámoslo y relacionemos sus pendientes:

$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = (v_{1x}, v_{1y}) \cdot (v_{1y}, -v_{1x}) = -v_{1x} \cdot v_{1y} - v_{1x} \cdot v_{1y} = 0 \rightarrow \overrightarrow{v_1} \perp \overrightarrow{v_2}$

$m_2 = \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = -\frac{v_{1x}}{v_{1y}} = -\frac{1}{m_1}$.

Ejemplo $y=\frac{2}{3}x+1$ es perpendicular a $y=-\frac{3}{2}x-3$.

Conclusión:
r‖r ‘→ m=m’
r⊥r’ →m=-1/m’

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio 14: dada la recta r: 2y=-3x+4, calcular:

a) La recta paralela a esta que pasa por P(1,-2) en general y continua

b) La recta perpendicular que pasa por P(0,1) en continua

a) Primero calculemos la pendiente de r despejando y → y=$-\frac{3}{2}$x+2, m=$-\frac{3}{2}$

r' : y+2=$-\frac{3}{2}$(x-1)→ r: y=$-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$.

Para pasarla a continua calculemos un vector director, dos métodos

i) Calculamos otro punto P_2(5, -8) →$\overrightarrow{v_r}$=$\overrightarrow{PP_2}$=(4,-6)

ii) A partir de la pendiente m=$-\frac{3}{2}$ → $\overrightarrow{v_r}$= (2,-3)

r': $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}$

b) m'=-1/m=2/3 → r: y-1=2/3(x-0) →r': y=2/3x+1

r': $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{2}$

6.5. Vector normal a la recta

Llamamos vector normal a la recta, a todo vector que sea perpendicular a la recta, y por tanto perpendicular al vector director de la misma $\vec{v}_r=(v_x,v_y)$. Recordemos que dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es cero, luego una forma sencilla de calcular un vector normal es cambiar las coordenadas de orden y a una de ellas cambiarla de signo: $\vec{n}=(-v_y,v_x)$.

Comprobémoslo: $\vec{v}_r\cdot\vec{n}=\left(-v_x\cdot v_y+v_y\cdot v_x\right)=0$

Por otro lado cuando calculábamos la ecuación general de la recta r, los valores de A y B de la ecuación (r:Ax+By+C=0) eran A=v_y y B=-v_x por tanto un vector normal de la recta es $\vec{n}=(A,B)$ con A y B coeficientes de x e y en la ecuación general de la recta.

Ejemplo: un vector normal a la recta r: 3x-y+4=0 es $\vec{n}=(3,-1)$

Ejercicio 14: calcular la recta que tiene como vector normal $\vec{n}$=(5,3) y pasa por P(2,-4).

Varias formas:

1) A partir de la ecuación general → A=5, B=3, r: 5x+3y+C=0. Como P∈r cumple 5·2+3·(-4)+C=0 → C=2. Por tanto la ecuación de la recta es r: 5x+3y+2=0

2) A partir de la ecuación punto pendiente m_{perp}=3/5 → m=-5/3. r: y+4=-5/3(x-2)

3) Ecuación vectorial o continua $\vec{v}_r=(-3,5)$ → r:(x,y)=(2,-4)+t(-3,5) ó $r:\frac{x-2}{-3}=\frac{y+4}{5}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

7. Posición relativas de dos rectas

En este apartado veremos las posiciones relativas entre dos rectas, que pueden ser:

- **Secantes**: se cortan en un punto
- **Paralelas**: si no tienen ningún punto en común (misma pendiente, o vector director)
- **Coincidente**: son la misma recta (dos puntos en común).

La posición relativa la hemos estudiado indirectamente cuando veíamos las soluciones de un sistema, ya que:

- si dos rectas son paralelas no se cortan y no tienen solución. Sistema incompatible
- si son secantes se cortan en un punto y por tanto una solución. Sistema compatible determinado
- si son coincidentes son la misma recta e infinitas soluciones. Sistema compatible indeterminado.

Si expresamos las dos rectas en forma general, tenemos

$$\begin{cases} r: Ax + By + C = 0 \\ r': A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

a) Secantes si $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ (distinta pendiente)

b) Paralelas si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$(misma pendiente, pero no mismos puntos)

c) Coincidentes si $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} = \frac{C}{C'}$ (misma pendiente y punto en común)

8. Ángulo entre dos rectas

En este apartado vamos a ver la forma de obtener el ángulo que forman dos rectas entre sí. De los dos ángulos que forman tomaremos el menor de ellos. En el caso de que sean paralelas o coincidentes el ángulo será de 0º.

Es fácil calcular el ángulo entre dos rectas si nos damos cuenta que es el mismo que forman sus dos vectores directores. Calculamos así el ángulo de las rectas a partir del ángulo que forman sus vectores directores.

Sean así dos rectas r y r' con vectores directores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_{r'}}$, el ángulo que forman es la siguiente:

$$\angle(r, r') = \angle(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_{r'}}) = \arccos \frac{\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_{r'}}}{|\overrightarrow{v_r}| \cdot |\overrightarrow{v_{r'}}|}$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio 15: calcular el ángulo que forman estas dos rectas:

$$r: 2x-3y+1=0$$
$$r': -5x+2y+2=0$$

Primero calculemos sus vectores directores, haremos cada uno de ellos por métodos diferentes.

$\overrightarrow{v_r}$ → calculamos dos puntos $P_1(0,1/3)$, $P_2(-1/2,0)$ $\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{P_1P_2}$ =(-1/2,-1/3). Podemos usar uno proporcional más sencillo → $\overrightarrow{v_r}$=-6·(-1/2,-1/3)=(3,2)

$\overrightarrow{v_{r'}}$ → calculamos la pendiente de r despejando la y→ y=5/2x-1 , luego m=5/2 y entonces $\overrightarrow{v_{r'}}$ =(2,5). Otra opción es a partir de $\vec{n}=(-5,2)\rightarrow \overrightarrow{v_{r'}}$=(2,5)

$$\angle(r, r')=\angle(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_{r'}})=\arccos\left(\frac{\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_{r'}}}{|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\overrightarrow{v_{r'}}|}\right)=\arccos\left(\frac{(3,2)\cdot(2,5)}{\sqrt{13}\sqrt{29}}\right)=\arccos\left(\frac{16}{\sqrt{377}}\right)=34{,}5^{\circ}$$

9. Distancia entre puntos y rectas

En este apartado queremos calcular la distancia entre una recta (con vector director $\vec{v}_r=(v_x,v_y)$ y punto de la recta $P(x_p,y_p)$) y un punto arbitrario $Q(x_q,y_q)$.

Gráficamente la forma de realizarlo se realiza de la siguiente forma:

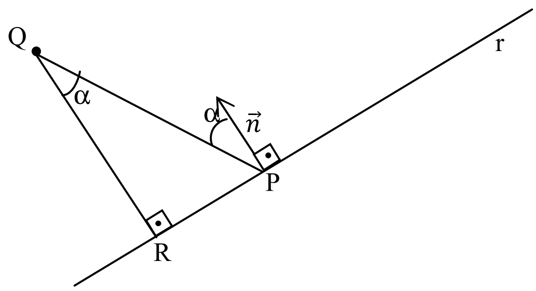
1. Recta perpendicular, s, a la recta r ($\vec{v}_s=(-v_y,v_x)$ por el punto Q: s:(x,y)= (x_q,y_q)+t·$(-v_y,v_x)$
2. Calcular el punto de intersección de r y s, que llamaremos R.
3. La distancia entre r y Q es la distancia entre R y Q.

Analíticamente podemos hacerlo también así (R será la solución al sistema formado por las ecuaciones de r y s), aunque veremos una fórmula que nos simplifica el cálculo:

Sea la recta r con ecuación general r:Ax+By+C=0 (con lo que el vector normal a r es $\vec{n}=(A,B)$) y el punto Q con coordenadas $Q(Q_x,Q_y)$:

$$d(r,Q)=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{n}|}=\frac{|A\cdot x_q+B\cdot y_q+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Demostración: Dibujemos la recta r, con sus parámetros, y el punto Q:



Los ángulos $\widehat{RQP}$ y el formado por el vector normal, $\vec{n}$, y el segmento PQ son iguales al estar formado por lados perpendiculares. Le denotaremos como ángulo α.

$$d(Q,r)=d(Q,R)=|\overrightarrow{QR}|$$

$$(1)\ \cos(\alpha)=\frac{|\overrightarrow{QR}|}{|\overrightarrow{PQ}|}\rightarrow |\overrightarrow{QR}|=|\overrightarrow{PQ}|\cdot\cos(\alpha)$$

$$(2)\ \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}=|\overrightarrow{PQ}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos(\alpha)\rightarrow\cos(\alpha)=\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{PQ}|\cdot|\vec{n}|}$$

$$d(Q,R)=|\overrightarrow{QR}|\underset{(1)\,y\,(2)}{=}|\overrightarrow{PQ}|\cdot\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{PQ}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\overbrace{|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}|}^{valor\ abs\,(d>0)}}{|\vec{n}|}=\frac{|(x_q-x_p,y_q-y_p)\cdot(A,B)|}{\sqrt{A^2+B^2}}=$$

$$=\frac{|A\cdot x_q+B\cdot x_q-(A\cdot x_p+B\cdot x_p)|}{\sqrt{A^2+B^2}}\underset{el\ punto\ Q\ cumple\ Ax+By+C=0}{=}\frac{|A\cdot x_q+B\cdot x_q-(-C)|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|A\cdot x_q+B\cdot x_q+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Ejercicio 16. Calcular la distancia entre el punto P(1,-3) y la recta r: 5x+2y-9=0.

$$d(r,Q)=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{n}|}=\frac{|A\cdot x_q+B\cdot y_q+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|5\cdot 1+2\cdot(-3)-9|}{\sqrt{5^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{29}}=\frac{10\sqrt{29}}{29}u$$

Ejercicio 17.Sean las rectas r: 5x+2y-9=0, s: -10x-4y-4=0, t: 15x+6y-27=0 y u:x+y=0

Calcular la distancia entre:

a) r y s

b) r y t

c) r y u

Solución: Antes de calcular las distancias tenemos que ver las posiciones relativas entre las dos rectas:

a) r y s → $\frac{-10}{5}=\frac{-4}{2}\neq\frac{-4}{-9}$ (S. I. Paralelas). Para calcular la distancia vemos la distancia de un punto arbitrario de s a la recta r.

s: -10x-4y-4=0 → Si x=0, y=-1. Q(0,-1)

d(r,s)=d(Q,r)=$\frac{|5\cdot 0+2(-1)-9|}{\sqrt{5^2+2^2}}=\frac{11}{\sqrt{29}}=\frac{11\cdot\sqrt{29}}{29}\ u$

b) r y t→ $\frac{15}{5}=\frac{6}{2}=\frac{-27}{-9}$ (S.C.I. coincidente). Como son la misma recta su distancia es cero→ d(r,t)=0

c) r y u → $\frac{1}{5}\neq\frac{1}{2}$(S.C.D. se cortan). Como se cortan la distancia entre ellas es cero d(r,u)=0

10. Bisectrices de dos rectas. Incentro de un triangulo

Antes de calcular las bisectrices veamos una definición:

Definición: Vector unitario a otro dado $\vec{v}$ es un vector con misma dirección, sentido pero módulo unidad. Para obtenerlo bastará con dividir $\vec{v}$ por su módulo.

$$\overrightarrow{u_v}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}\,|}$$

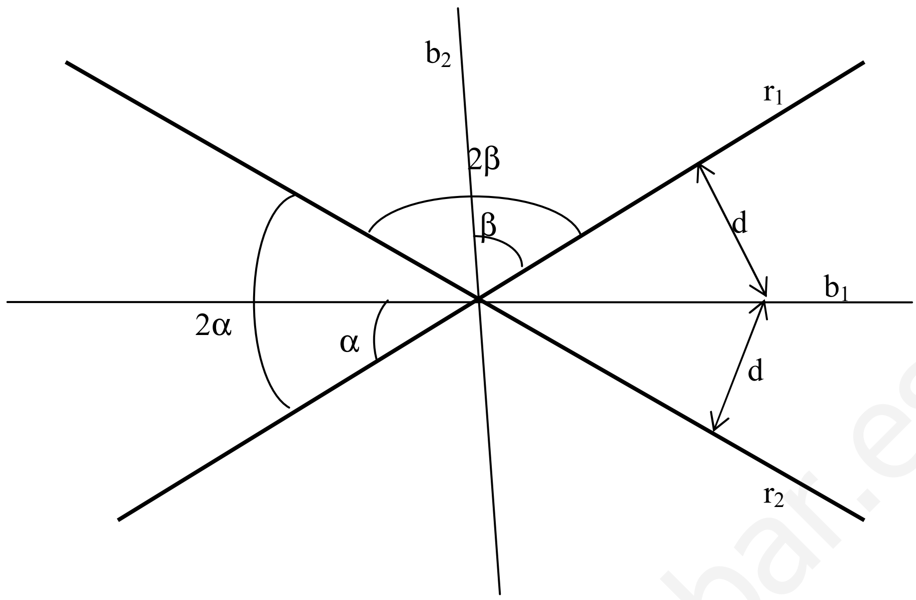
Ejemplo: $\vec{v}=(2,-3)$ calcular su vector unitario

$\overrightarrow{u_v}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}\,|}=\frac{(2,-3)}{\sqrt{13}}=(\frac{2\sqrt{13}}{13},-\frac{3\sqrt{13}}{13})$. Comprobemos que el módulo es 1.

$$\overrightarrow{|u_v|}=\sqrt{\frac{4}{13}+\frac{9}{13}}=1$$

10.1. Bisectriz

Definición: la bisectrices de dos rectas r_1 y r_2 son otras dos rectas tal que los ángulos que forman con r_1 y r_2 son la mitad que el ángulo que forman r_1 y r_2. Se cumple también que la distancia de cualquier punto de las bisectrices a las dos rectas es la misma.



Métodos para el cálculo de bisectrices:

Método 1: Calculando en punto de corte de las dos rectas (punto de la bisectiz) y el vector director de la misma.

- El punto: será el de corte de las dos rectas r_1 y r_2 (resolver el sistema)
- El vector director, cada una de las dos bisectrices tendrá un vector director diferente y que obtenemos sumando o restando los vectores directores de r_1 y r_2 unitarios.

Método 2: a partir de la definición de bisectriz de lugar geométrico de los puntos a igual distancia de r_1 y r_2. Si los puntos de la bisectriz son Q(x,y) buscamos aquellos que cumple $d(r_1,Q)= d(r_2,Q)$. Hay dos soluciones, que son las dos bisectices.

Ejemplo: calcular las bisectrices de las rectas r_1: y=3x-2, r_2: y=-2x+3.

Método 1:

1) calculemos el punto de corte de las dos rectas, que obtenemos resolviendo el sistema

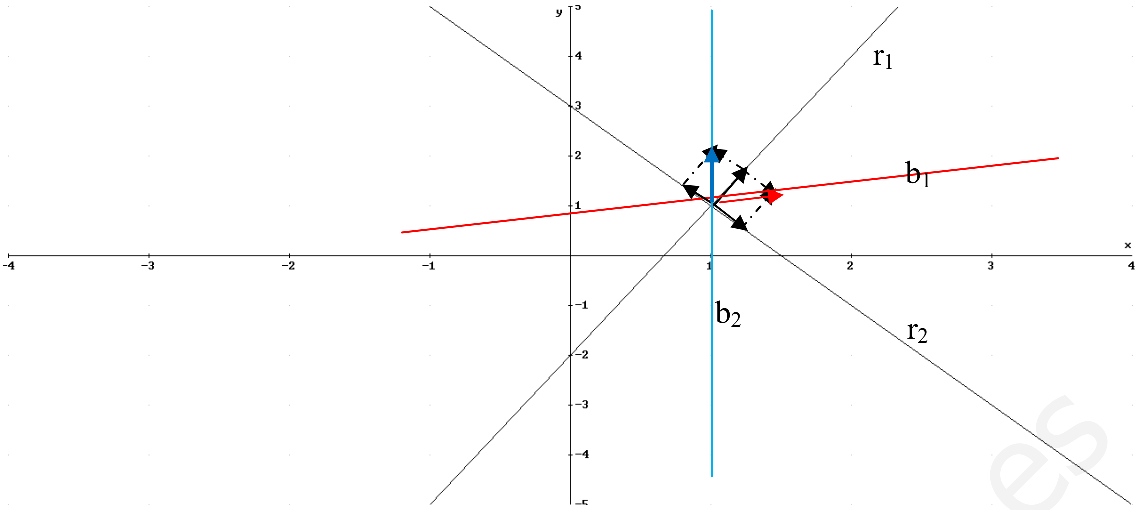
$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = -2x + 3 \end{cases} \rightarrow P(1,\ 1)$$

2) vectores directores

$m_1=3 \rightarrow v_1=(1,3) \rightarrow \overrightarrow{u_{v1}} = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$

$m_2=-2 \rightarrow v_2=(1,-2) \rightarrow \overrightarrow{u_{v2}} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)



Bisectriz b_1: P(1,1)

$\vec{v} = \overrightarrow{u_{v1}}+\overrightarrow{u_{v2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$=(0.76,0.05)

$b_1 : \frac{x-1}{0.76} = \frac{y-1}{0.05} \rightarrow b_1 : -0,05x + 0,76y - 0,71 = 0$

Bisectriz b_2:

P(1,1)

$\vec{v} = \overrightarrow{u_{v1}}-\overrightarrow{u_{v2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{13}{\sqrt{10}}+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$=(-0.13, 1.84)

$b_2 : -\frac{x-1}{0.13} = \frac{y-1}{1.84} \rightarrow$ b_2: $1.84x + 0.13y - 1.95 = 0$

Método 2: r_1: 3x-y-2=0, r_2:2x+y-3=0

Q(x,y)

d(Q,r_1)= $\frac{|A\cdot x + B\cdot x + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|3x-y-2|}{\sqrt{10}}$

d(Q,r_2)= $\frac{|A\cdot x + B\cdot x + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|2x+y-3|}{\sqrt{5}}$

d(Q,r_1)= d(Q,r_2) $\rightarrow$ $\frac{|3x-y-2|}{\sqrt{10}} = \frac{|2x+y-3|}{\sqrt{5}}$

$b_1 \rightarrow$ $\sqrt{5}(3x-y-2) = \sqrt{10}(2x+y-3) \rightarrow$ b_1: -0,38x+5.4y+5,01=0

$b_2 \rightarrow$ $\sqrt{5}(3x-y-2) = -\sqrt{10}(2x+y-3) \rightarrow$ b_2:13,03x+0.93·y-13.95=0

Comprobación que son iguales las bisectrices calculadas:

$b_1 \rightarrow \frac{-0.38}{-0.05} = \frac{5.4}{0,76} = \frac{-5.01}{-0.71}$ $\quad$ $b_2 \rightarrow \frac{13.03}{1.84} = \frac{0.93}{0.13} = \frac{-13.95}{-1.95}$

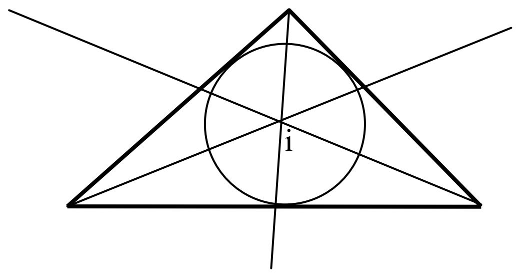
 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio18: Calcular la bisectrices de las siguientes dos rectas: r_1: y=-2x+1 y r_2:3y+2x+1=0

Lo haremos

10.2. Incentro

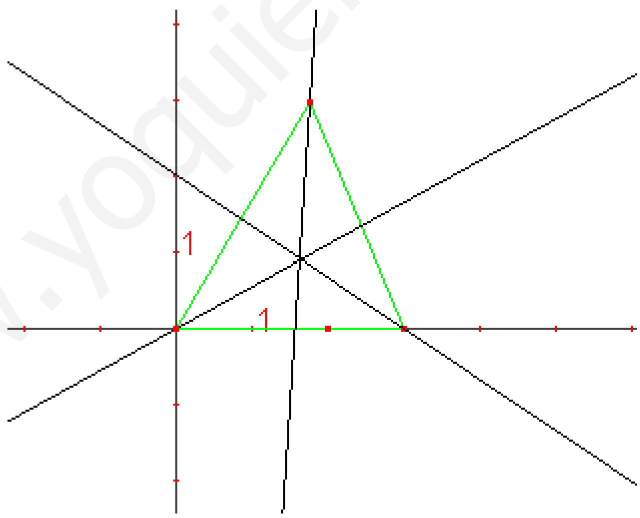
Definición: el incentro de un triángulo es el lugar donde corta las 3 bisectrices internas del mismo. Se cumple que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.



Pasos para calcular el incentro:

1. Calcular las bisectrices internas de dos vértices.
2. Calcular el punto de corte de estas dos bisectrices (resolver el sistema)

Ejemplo: Calcular el incentro y las rectas de la aristas del triángulo cuyos vértices son A(0,0), B(3,0), C(2,3). Calcula el radio de la circunferencia inscrita



Calculo de las rectas de las aristas

Recta que pasa por A(0,0) y B(3,0): $m=\dfrac{0-0}{3-0}=0$ → r_1: y=0

Recta que pasa por A(0,0) y C(2,3): $m=\dfrac{3-0}{2-0}=\dfrac{3}{2}$ → r_2: y= $\dfrac{3}{2}$x

Recta que pasa por B(3,0) y C(2,3): $m=\dfrac{3-0}{2-3}=-3$ → r_3:y=-3(x-3)

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

1. Calculemos la bisectriz de A y de B:

- La bisectriz de A, b_A: dos vectores $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{AB} = (3{,}0)$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{AC} = (2{,}3)$. Calculemos los unitarios: $\overrightarrow{u_{v1}} = \frac{(3,0)}{3} = (1{,}0)$, $\overrightarrow{u_{v2}} = \frac{(2,3)}{\sqrt{13}} = (0.55{,}0.83)$
- El vector director de b_A→ $\overrightarrow{v_{bA}} = (1{,}0) + (0.55{,}0.83) = (1.55{,}0.83)$ → m=$\frac{0.83}{1.55} = 0.54$.

Luego b_A sabemos m=0.54 y pasa por A(0,0) → b_A: y=0.54x

La bisectriz de B, b_B: dos vectores $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{BA} = (-3{,}0)$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{BC} = (-1{,}3)$. Calculemos los unitarios: $\overrightarrow{u_{v1}} = \frac{(-3,0)}{3} = (-1{,}0)$, $\overrightarrow{u_{v2}} = \frac{(-1,3)}{\sqrt{10}} = (-0.32{,}0.95)$

El vector director de b_B→ $\overrightarrow{v_{bB}} = (-1{,}0) + (-0.32{,}0.95) = (-1.32{,}0.95)$ → m=$-\frac{0.95}{1.32} = -0.72$

Luego b_B tiene m=-0,72 y pasa por B(3,0)→ b_B : y=-0.72(x-3)

2. Incentro:

$$\left.\begin{array}{l} b_A : y = 0.54x \\ b_B : y = -0{,}72x + 2{,}16 \end{array}\right\} \rightarrow 0.54x = -0{,}72x + 2{,}16 \rightarrow x = 1.71, y = 0.93$$

I(1.71, 0.93)

3. Calculo del radio de la circunferencia inscrita: se calcula viendo la distancia entre el incentro y una de los lados (recta que contiene dicho lado)

Veamos la distancia con la recta r_1: y=0 (que contiene a los vértices A y B) e I(1.71,0.93)

$$d(r_1, I) = \frac{|0.93|}{\sqrt{1}} = 0.93u$$

Ejercicio 19: Calcular el incentro y las rectas de la aristas del triángulo cuyos vértices son A(1,0), B(4,0), C(3,3).

Solución I(2.72, 0.92)

11.Mediatriz de un segmento. Circuncentro de un triángulo

11.1. Mediatriz de un segmento

Definición: La mediatriz de un segmento AB es una recta que cumple:

- Es la perpendicular a la recta AB que pasa por el punto medio
- El lugar geométrico de los puntos que equidistan de A y B.

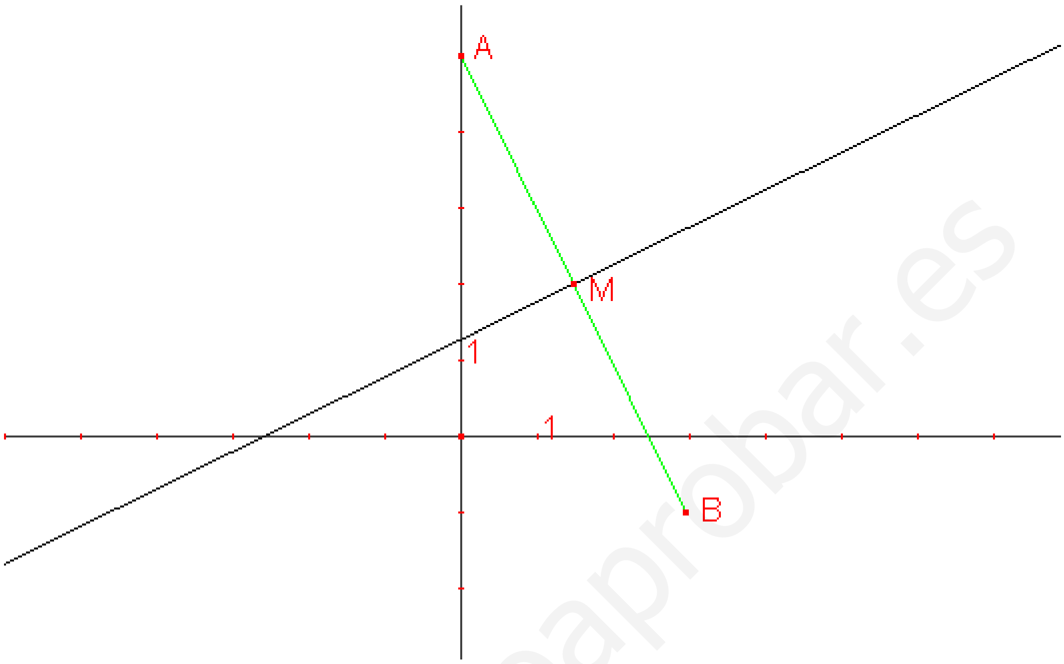
Para calcular la mediatriz no tenemos más que aplicar la definición, así tenemos dos métodos.

Método1: A partir de la primera definición

1) Calculamos el punto medio de AB, que llamaremos M

2) Calculamos la pendiente de la recta que pasa por A B, y luego coma la recta es perpendicular m'=-1/m

Ejemplo: calcular la mediatriz del segmento AB, con A(0,5) y B(3,-1)



1) El punto Medio M=$\left(\frac{3+0}{2},\frac{-1+5}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},2\right)$

2) $\overrightarrow{AB}$ =(3,-6) → m=-6/3=-2 →Luego la mediatriz tiene como pendiente m=1/2

Mediatriz: pasa por M$\left(\frac{3}{2},2\right)$y m=1/2 → r: y-2=1/2(x-3/2)→ r: y=1/2x+5/4

<u>Método 2</u>: a partir de la segunda definición.

1) Calculamos la distancia de un punto arbitrario P(x,y) de la mediatriz al punto A y al punto B
2) Igualamos las distancias y obtendremos la recta

Ejemplo: calcular la mediatriz del segmento AB, con A(0,5) y B(3,-1)

1) d(P,A)=$\sqrt{(x-0)^2+(y-5)^2}$

   d(P,B)=$\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}$

2) d(P,A)=d(P,B) → $\sqrt{(x-0)^2+(y-5)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}$ →

$x^2+(y-5)^2=(x-3)^2+(y+1)^2$→4y-2x-5=0 → r: y=1/2x+5/4

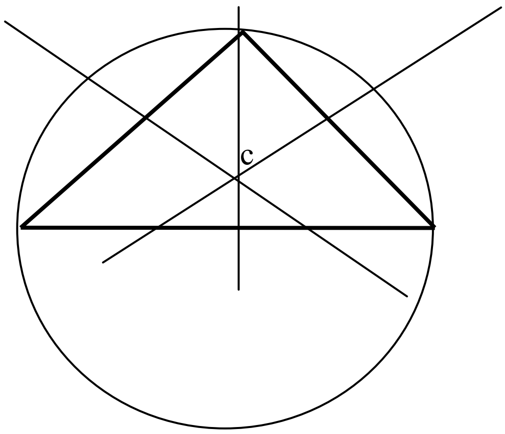
Ejercicio 20: calcular la mediatriz de los puntos A(2,1) y B(-1-2)

Solución:

r: 4x-3y+20=0

11.2. Circuncentro

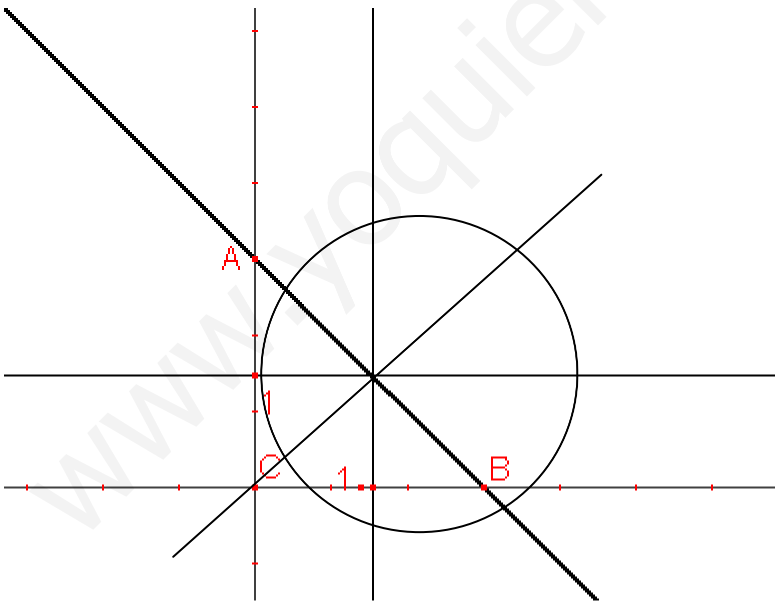
Definición: el circuncentro de un triángulo es el punto que se obtiene de la intersección de las 3 mediatrices. Se cumple que es el centro de la circunferencia que circunscribe el triángulo, ya que el punto donde se cortan las mediatrices equidista de los tres vértices.



Cálculo del circuncentro, dos pasos:

1. Calcular las mediatrices de dos de los tres lados.
2. Calcular la intersección de estas dos mediatrices.

Ejemplo: calcular las mediatrices del triángulo que forma la recta y=-x+3 con los semiejes coordenados positivos. Calcular el circuncentro, el radio de la circunferencia y el área del triángulo



Calculemos primero los puntos de corte de la recta con los ejes coordenados. Son claramente A(0,3), ya que n=3 es la ordenada en el origen y B(3,0).

1) Mediatrices:
   a. Del lado AC → M(0,1.5), y es una recta paralela al eje OX → y=1.5
   b. Del lado CB → M(1.5,0), es una recta paralela al eje OY → x=1.5
   c. Del lado AB→ M(1.5,1.5), $\overrightarrow{AB}=(3,-3)$→ m'=-1, luego m=1→ y-1.5=(x-1.5)→y=x

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

2) Circuncentro, sólo necesitamos dos de las tres mediatrices:

$$\begin{cases} x = 1.5 \\ y = 1.5 \end{cases} \rightarrow C(1.5,1.5)$$

3) Radio circunferencia circunscrita es d(c,A)=d(c,B)=d(c,C)=$\sqrt{1.5^2+1.5^2}=2.12u$

Ejercicio 21: Calcular el circuncentro del triángulo con vértices A(1,0), B(0,1), C(0,0)

Solución: C($\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}$)

12. Medianas y alturas de un triángulo. Baricentro y ortocentro

12.1. Medianas y alturas

Definición: La mediana de un triángulo es cada una de las rectas que pasa por la mitad de un lado del triángulo y por su vértice opuesto.

Metodología para el cálculo de la mediana de un triángulo:

1. Calculamos el punto medio del lado
2. Calculamos la recta que pasa por este punto medio y el vértice opuesto.

Ejemplo: dado el triangulo ABC con A(2,0), B(3,-1) y C(1,3), calcular la mediana del vértice A.

1. Calculamos el punto medio del lado BC → M=(2,1)
2. La recta buscada pasa por el punto M(2,1) y A(2,0) → m=$\frac{0-1}{2-2}$, no se puede dividir por cero, luego es una recta paralela al eje OY → x=2.

Definición: la altura de un triángulo es cada una de las rectas que pasa por el vértice del triángulo y que es perpendicular al lado opuesto del vértice.

Metodología para el cálculo de la altura.

1. Calculamos la pendiente de la altura sabiendo que es perpendicular al lado opuesto
2. Conocemos la pendiente y un punto de la recta (vértice), luego por la ecuación punto pendiente calculamos la recta pedida.

Ejemplo: dado el triangulo ABC con A(2,0), B(3,-1) y C(1,3), calcular la altura del vértice A.

1. $\overrightarrow{BC}=(-2,4) \rightarrow m_{BC}=\frac{4}{-2}=-2$. Luego la pendiente de la altura de A es la inversa con signo cambiado $\rightarrow m_{h_A}=\frac{1}{2}$
2. h_A: y-0=$\frac{1}{2}(x-2)$

12.2. Baricentro y ortocentro

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Definición: el baricentro de un triángulo es el punto donde se cortan las tres medianas. Para calcularlo basta con calcular dos medianas y calcular el punto de corte entre ambas.

Ejemplo: dado el triangulo ABC con A(2,0), B(3,-1) y C(1,3), calcular el baricentro.

La mediana del vértice A ya la habíamos calculado → x=2

La mediana vértice B → M_{AC}=(3/2, 3/2). $\overrightarrow{MB}$=(3/2, -5/2) m=$\frac{-5/2}{3/2}=-\frac{5}{3}$. Luego la mediana es (y+1)= $-\frac{5}{3}$(x-3)→ 3y+5x-12=0

Luego el baricentro es $\begin{cases} x=2 \\ 3y+5x-12=0 \end{cases}$ → x=2, y=2/3

Definición: el ortocentro de un triángulo es el punto donde se cortan las tres alturas. Para calcularlo basta con calcular dos alturas y ver el punto de corte entre ambas.

Ejemplo: dado el triangulo ABC con A(2,0), B(3,-1) y C(1,3), calcular el ortocentro.

La altura del vértice A ya calculada → h_A: y-0=$\frac{1}{2}(x-2)$, → h_A: y=0.5x-1

La altura del vértice B → $\overrightarrow{AC}$=(-1,3) → m'=$\frac{3}{-1}=-3$. Luego como la altura es perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ su pendiente es m=$\frac{1}{3}$

h_B: m=$\frac{1}{3}$ y pasa por B(3,-1) → h_B: (y+1)= $\frac{1}{3}$ (x-3)→ h_B: 3y-x+6=0

Luego el ortocentro es $\begin{cases} 3y-x+6=0 \\ y=0.5x-1 \end{cases}$ → y=-4, x=-6

Ejercicios Finales

Ejercicio 22. Hallar el vector $\vec{b}$ tal que $\vec{c} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, siendo $\vec{a}$=(-1,3) y $\vec{c}$=(7,-2).

Podemos hacerlo a partir de un sistema igualando una a una cada coordenada, o de forma más sencilla despejando el vector $\vec{b}$:

$\vec{c} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} \rightarrow \frac{1}{2}\vec{b} = 3\vec{a} - \vec{c} \rightarrow \vec{b} = 6\vec{a} - 2\vec{c}$=(-6,18)-(14,-4)=(-20,22)

Ejercicio 23. Dados los vectores $\vec{a} = (3,-2)$, $\vec{b}$ =(-1,2) y $\vec{c}$=(0,-5) poner el vector $\vec{c}$ como combinación linear de los otros dos:

$\vec{c} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} \rightarrow$(0,-5)=m·(3,-2)+n·(-1,2).

$$\begin{cases} 0 = 3m - n \\ -5 = -2m + 2n \end{cases}$$

Resolviendo el sistema m=$-\frac{5}{4}$ y n=$-\frac{15}{4}$ → (0,-5)=· $-\frac{5}{4}$(3,-2) $-\frac{15}{4}$·(-1,2).

Ejercicio 24. Dada las rectas r y s de ecuaciones r:2x-y+2=0 y s:x+y-3=0, hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de estas dos recta y por el punto P(5,3)

Calculemos la intersección:

$$\begin{cases} r: 2x - y + 2 = 0 \\ s: x + y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow x=\frac{1}{3},\ y=\frac{8}{3} \rightarrow Q\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

Vector director $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{3} - 5, \frac{8}{3} - 3\right) = \left(-\frac{14}{3}, -\frac{1}{3}\right) \rightarrow$ m=1/14

r': y-3=$\frac{1}{14}$(x-5)

Ejercicio 25. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(-3,8) y que determina con el sentido positivo de los ejes coordenados un triángulo cuya área es de 6 unidades cuadradas.

De la recta buscada sabemos que pasa por el punto P, nos falta por saber su pendiente m. Que determinaremos a partir de saber el área que forma con los ejes coordenados.

y-8=m(x+3)

Veamos los puntos de corte con los ejes en función de m:

Eje OX (y=0) → x=$-\frac{8}{m} - 3$

Eje OY (x=0)→ y=3m+8

Area=$\frac{(-\frac{8}{m} - 3)\cdot(3m+8)}{2} = 6 \rightarrow \quad (-\frac{8}{m} - 3)\cdot(3m+8) = 12 \rightarrow$-24m-64-9m^2-24m=12m

-9m^2-60m-64=0 m=$\begin{cases} -\frac{16}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{cases}$. Veamos cual de las dos pendientes es la que hace que los puntos de corte con los ejes sean positivas:

a) m=$-\frac{16}{3}$ → x=-3/2<0, y=-8 →No válido

b) m=$-\frac{4}{3}$ →x=3, y=4 Válido

Luego la recta buscada es r: y-8=$-\frac{4}{3}(x+3)$

Ejercicio 26. Calcular los parámetros m y n para que las rectas r:2x+3y-2=0 y s:x+my+n=0 sean

a) Paralelas

b) Perpendiculares

c) Misma recta

Pondremos la recta r en forma explícita r: y=$\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x$, donde la pendiente es m=$-\frac{2}{3}$ y la ordenada del origen es n=$\frac{2}{3}$

Ponemos ahora la recta s en forma explícita s: y=$-\frac{n}{m}-\frac{1}{m}x$, cuya pendiente es $-\frac{1}{m}$ y su ordenada en el origen es $-\frac{n}{m}$

a) Paralelas, mismas pendientes $-\frac{2}{3}=-\frac{1}{m}$ → m=$\frac{3}{2}$. Se cumple también que tienen distinta ordenada en el origen → $-\frac{2}{3}\neq-\frac{n}{m}=-\frac{n}{3/2}$→n≠-1

b) Perpendiculares, cuando son perpendiculares se cumple que las pendientes cumplen m'=-1/m: $\frac{2}{3}$=$-\frac{1}{-1/m}$ → m=-2/3

c) Coincidentes cuando tienen misma pendiente y ordenada en el origen es decir según vimos en a) → m=$\frac{3}{2}$ y n=1.

Ejercicio 27. Dados los puntos A(3,-1), B(6,2) y C(2,6) hallar el ángulo formado por las semirrectas AB y AC:

Para ver el ángulo de las dos rectas sólo tenemos que ver el ángulo que forman sus dos vectores directores: $\overrightarrow{AB}=(3,3)$ $\overrightarrow{AC}=(-1,7)$

$$\angle(r_{AB},s_{AC})=\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}\right)=\arccos\left(\frac{-3+21}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{50}}\right)=\arccos\left(\frac{18}{\sqrt{900}}\right)=$$

=53º7'48''

Ejercicio 28. Calcular m para que las rectas r: y=-3x+1 s: mx+2y-3=0 sean rectas perpendiculares:

Si son perpendiculares se cumple que pendientes inversas con distinto signo. Calculemos las pendientes despejando y de ambas ecuaciones:

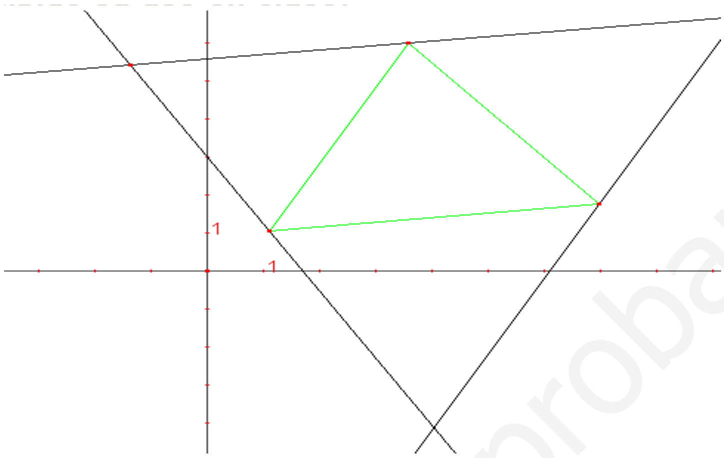
r: y=-3x+1 →m=-3

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

s:y=$-\frac{m}{2}x+\frac{3}{2}$ → m'=$-\frac{m}{2}$

Luego $-\frac{m}{2}=\frac{1}{3}$ → m=$-\frac{2}{3}$

Ejercicio 29. Sea el triángulo de vértices A(1,1), B(4,6) y C(7,2). Las rectas paralelas por cada vértice al lado opuesto determinan un triángulo A'B'C'. Calcular las coordenadas de estos vértices. Calcular que son semejantes calculado los ángulos de ambos triángulos.



Calculemos los lados que pasan por cada vértice sabiendo que son paralelas a los lados opuestos del triángulo ABC:

Por el vértice A(1,1): $\overrightarrow{BC}=(3,-4)\ m=-\frac{4}{3}$ → r: y-1=$-\frac{4}{3}$(x-1)

Por el vértice B(4,6): $\overrightarrow{AC}=(6,1)$; m=1/6 → s: y-6=1/6(x-4)

Por el vértice C(7,2): $\overrightarrow{AB}=(3,5)$; m=$\frac{5}{3}$ → t: y-2=$\frac{5}{3}(x-7)$

Los vértices son los puntos de corte de estas rectas:

A': $\begin{cases} y-6=\frac{1}{6}(x-4) \\ y-2=\frac{5}{3}(x-7) \end{cases} \rightarrow x=10,\ y=7\ \ A'(10,7)$

B' $\begin{cases} y-1=-\frac{4}{3}(x-1) \\ y-2=\frac{5}{3}(x-7) \end{cases} \rightarrow x=4,\ y=-3\ \ B'(4,-3)$

C' $\begin{cases} y-6=\frac{1}{6}(x-4) \\ y-1=-\frac{4}{3}(x-1) \end{cases} \rightarrow x=-2,\ y=5\ \ C'(-2,5)$

Ejercicio 30. La recta que pasa por M(2,3) y es paralela a la recta r: y=3x+1 determina con los ejes coordenados un triángulo. Halla su área

Calculemos la recta sabiendo que pasa por M(2,3) y su pendiente es la misma que de r (ya que son paralelas)→ m=3→ s:y-3=3(x-2).

Puntos de corte con los ejes:

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Eje OX(y=0): -3=3(x-2), x=1

Eje OY(x=0): y-3=3(0-2), y=-3

Área=$\frac{1\cdot|-3|}{2}=1{,}5u^2$

Ejercicio 31. Comprueba si los siguientes puntos A(-1,3), B(-5/2,1/2), C(-4,-2) están alineados.

Para ver si están alineados calculamos la recta que pasa por dos de los tres puntos y comprobamos que el tercero pertenezca a la recta, es decir que cumpla la ecuación de la recta.

1) Calculamos la recta que pasa por A y C→ m=$\frac{-2-3}{-4+1}=\frac{5}{3}$ → r: y-3=$\frac{5}{3}$(x+1)

2) Comprobamos si B$\in$r, es decir si cumple la ecuación de r sustituyendo x=-5/2 y=1/2: $\frac{1}{2}-3=\frac{5}{3}(-\frac{5}{2}+1)$ → $-\frac{5}{2}=\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{2}$ Se cumple la igualdad luego están alineados

Ejercicio 32. Calcular el valor de m para que los puntos R(5,-2), S(-1,1) y T(2,m) estén alineados.

Calculemos la recta que pasa por R y S → m=$\frac{1+2}{-1-5}=-\frac{1}{2}$ → r:y-1=$-\frac{1}{2}$(x+1). Si están alineados entonces T$\in$r, es decir sustituyendo x=2, y=m en la ecuación calculamos m → m-1=$-\frac{1}{2}$(2+1) → m=$-\frac{1}{2}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Tema 8. Cónicas

1. Conceptos previos. Traslación gráficas en los ejes de coordenadas

En este apartado veremos una proposición, que nos permite obtener la ecuación de una función o de una figura cuando desplazamos sus gráficas en los ejes coordenados.

Desplazamiento gráfica en el eje OX: Si desplazamos una gráfica x_0 en el eje OX entonces la ecuación de nuestra nueva gráfica se obtiene sustituyendo x de la ecuación original por $(x-x_0)$.

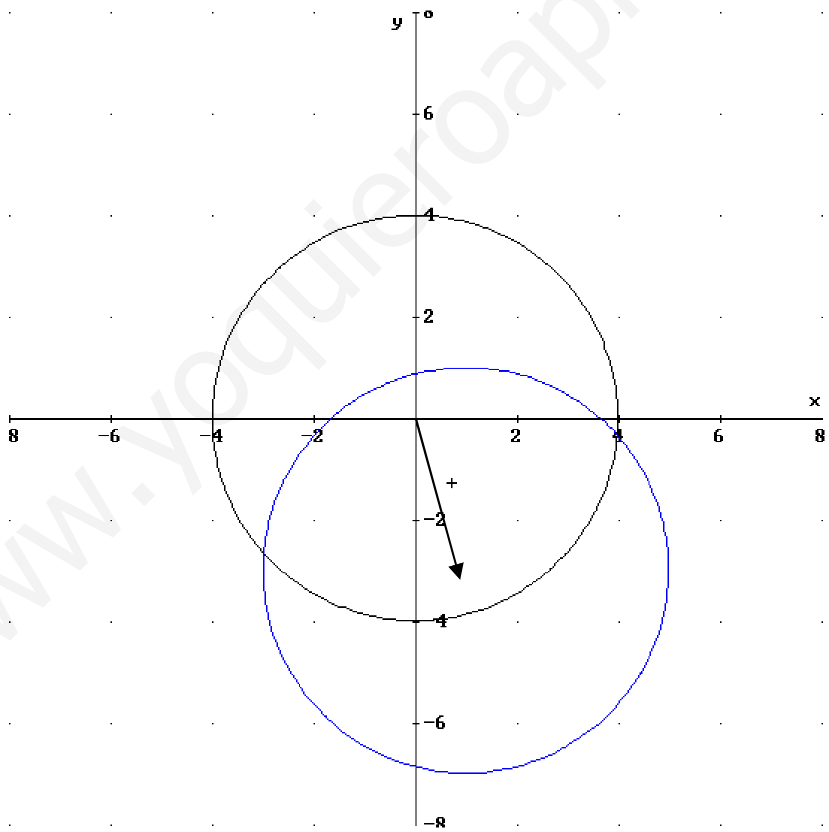
Desplazamiento gráfica en el eje OY: Si desplazamos una gráfica y_0 en el eje OY entonces la ecuación de nuestra nueva gráfica se obtiene sustituyendo y de la ecuación original por $(y-y_0)$

Ejemplos:

1) Si la ecuación de la circunferencia en el origen es $x^2+y^2=r^2$, con r el radio de la misma, encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en O(1,-3) y de radio 4.

Hemos desplazado la circunferencia $x^2+y^2=16$ en los ejes, tal que $x_0=1$, e $y_0=-3$. De esta forma la ecuación de la circunferencia será:

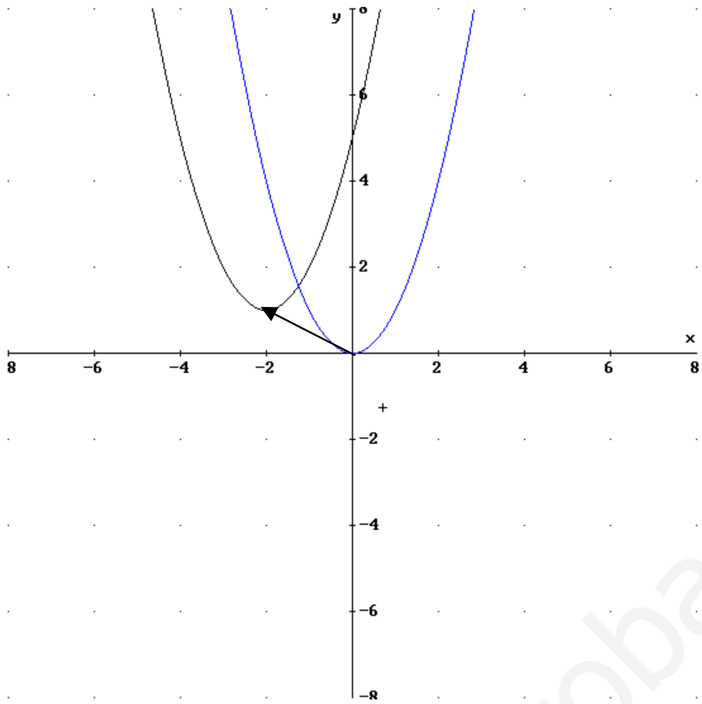
c: $(x-1)^2+(y+3)^2=16 \rightarrow x^2+y^2-2x+6y-6=0$



2) Sea la gráfica $y=f(x)=x^2$, la de una parábola con vértice en el origen. Calcular la ecuación de la parábola con vértice en V(-2,1)

Hemos desplazado la parábola $x_0=-2$, e $y_0=1$. Luego la nueva parábola será:

$y-1=(x+2)^2 \rightarrow y=x^2+4x+5$



2. La circunferencia

2.1. Definición y ecuación de la circunferencia

Definición: la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que distan la misma distancia de otro punto denominado centro de la circunferencia. La distancia de la que distan al centro se llama radio de la circunferencia, r.

Ecuación circunferencia con centro en el origen O(0,0) y radio r: a partir de la definición la ecuación de la circunferencia con centro en el origen es el conjunto de puntos que dista r unidades de O. Es decir, si llamamos P(x,y) a los puntos que forman la circunferencia, estos han de cumplir:

d(c,O)=r → $|\overrightarrow{PO}|$=r → $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=r$ → elevando al cuadrado obtenemos la relación entre x e y de los puntos de la circunferencia:

$$\boxed{c:\ x^2+y^2=r^2}$$

Ecuación circunferencia con centro en el O(x_0,y_0) y radio r:A partir de las proposición vistas en el apartado anterior, la ecuación con centro en O(x_0,y_0) y radio r es:

$$\boxed{c:\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2}$$

Date cuenta que esta es la ecuación de todo punto P(x,y) cuya distancia a O(x_0,y_0) es igual a r.

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejemplo: encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en O(1,-3) y de radio 4. Dibujar la circunferencia y encontrar 6 puntos de la misma.

c: $(x-1)^2+(y+3)^2=16 \rightarrow x^2+y^2-2x+6y-6=0$

Los puntos A,B,C,D situados en los "extremos de la circunferencia" se calculan de forma sencilla sin más que sumar o restar el radio a la coordenada x o a la y del centro:

A(1+4,-3) → A(5,-3)

B(1-4,-3) → B(-3,-3)

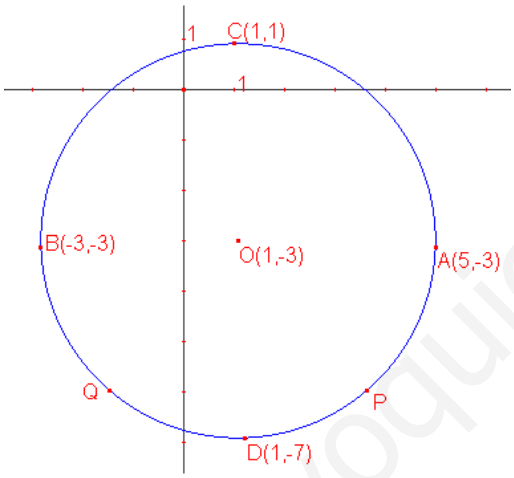
C(1,-3+4) → C(1,1)

D(1,-3-4)→D(1,-7)

Para calcular cualquier otro punto de la circunferencia, basta con dar un valor a la x o a la y (valores comprendidos entre los máximos y mínimos de x e y respectivamente) y despejar la otra coordenada.

Calculemos P y Q con y=-6:

$y=-6 \rightarrow (x-1)^2+9=16 \rightarrow (x-1)^2=7$



$x=1\pm\sqrt{7}$

$P(1+\sqrt{7},-6)$, $Q(1-\sqrt{7},-6)$

Ecuación general de la circunferencia: esta se obtiene desarrollando los cuadrados de la ecuación vista antes. Haciendo esto la ecuación viene dada por la siguiente expresión:

c: $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

Identifiquemos los valores de esta ecuación con el centro $O(x_0,y_0)$ y el radio de la circunferencia:

c: $x^2-(2x_0)\cdot x+y^2-(2y_0)\cdot y+(x_0^2+y_0^2-r^2)=0$

$A=-2x_0 \rightarrow x_0=-A/2$

$B=-2y_0 \rightarrow y_0=-B/2$

$C= x_0^2+y_0^2-r^2 \rightarrow r=\sqrt{(x_0^2+y_0^2-C)}$

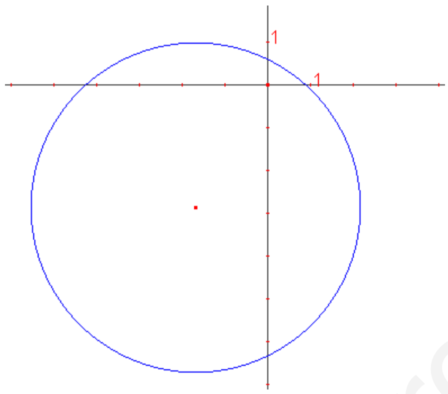
Nota: luego la ecuación de la circunferencia se distingue porque los coeficientes de x^2 e y^2 son los mismos y con mismo signo (sino son 1 dividimos la ecuación por ese valor para que así sean 1). También se tiene que cumplir que $(x_0^2+y_0^2-C)>0$

Ejemplo: dibujar la circunferencia con la ecuación $-2x^2-2y^2-8x-12y+6=0$

Los coeficientes de x^2 e y^2 son los mismo pero no son 1, sino -2. Dividimos la ecuación por -2 y tenemos:

c: $x^2+y^2+4x+6y-3=0$

$x_0=-(4/2)=-2$; $y_0=-6/2=-3$; $r=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+3}=\sqrt{16}=4$



Ejercicio 1: *dibujar las siguientes circunferencias y obtener 6 puntos de las mismas.*

a) $x^2+y^2-4x+2y+4=0$

b) $2x^2+2y^2+ 4x-12y+12=0$

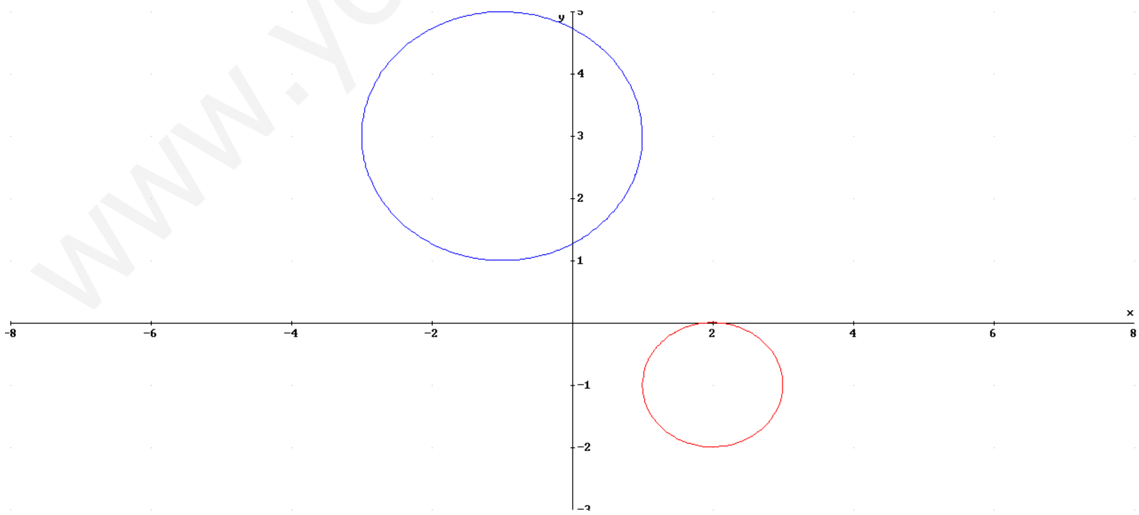
c) $x^2+y^2+2x-6y+14=0$

Solución

a) $(x-2)^2+(y+1)^2=1$

b) $(x+1)^2+(y-3)^2=4$

c) No es una circunferencia, $(x_0^2+y_0^2-C)<0$. Ecuación imposible: $(x-1)^2+(y+3)^2=-4$



Ejercicio 2: calcular la ecuación de la circunferencia concéntrica a c: $x^2+y^2+6x-4y-3=0$ que pase por el punto P(3,-6).

Si es concéntrica es que tiene mismo centro: $x_0=-6/2=-3$, $y_0=4/2=2$.

Para calcular el radio vemos la distancia del centro O(-3,2) al punto P(3,-6):

$r=d(O,P)=\sqrt{(3+3)^2+(-6-2)^2}=10$

c: $(x+3)^2+(y-2)^2=100 \rightarrow$ c: $x^2+y^2+6x-4y-87=0$

Ejercicio 3: calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(-1,3), B(4,8), C(7,-1).

Dos métodos:

1) Calculando el circuncentro del triángulo ABC. Hecho en el tema anterior

2) A partir de obtener A,B,C de la ecuación de la circunferencia: $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, le obligamos a pasar por los tres puntos y obtendremos un sistema con 3 ecuaciones y 3 incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} A(-1,3)\rightarrow 1+9-A+3B+C=0 \\ B(4,8)\rightarrow 16+64+4A+8B+C=0 \\ C(7,-1)\rightarrow 49+1+7A-B+C=0 \end{array}\right\} \rightarrow A=-8,\ B=-6,\ C=0$$

c: $x^2+y^2-8x-6y=0 \rightarrow$ c: $(x-4)^2+(y-3)^2=5^2$

2.2. Ecuación de la rectas tangentes y normales a la circunferencia.

Definición: la recta tangente a una circunferencia a un punto $P(P_x,P_y)$ es toda recta que sólo toca a la circunferencia en este punto.

Proposición: la recta tangente a la circunferencia es perpendicular la recta que une el centro de la misma con dicho punto. Esta recta se llama recta normal.

Calculo de la recta normal: simplemente hay que calcular la recta que pasa por el punto dado y por el centro de la circunferencia.

Cálculo de la recta tangente: calculamos la pendiente a partir de la pendiente de la recta normal. Conocida la pendiente y el punto de tangencia calculamos la recta.

Ejemplo: calcular la recta tangente y normal en el punto de la circunferencia con x=0 a la circunferencia dada por la siguiente ecuación c: $x^2+y^2-2x+2y+1=0$

Primero calculemos el centro y el radio:

$x_0=1$; $y_0=-1$; r=1. O(1,-1).

Si x=0 $\rightarrow$ $y^2+2y+1=0$ $\rightarrow$ y=-1. Luego el punto de tangencia es P(0,-1)

<u>Normal:</u> $m=\dfrac{-1+1}{0-1}=0 \rightarrow$ r: y=-1

<u>Tangente:</u> $m=\infty \rightarrow$ como pasa por P(0,-1) $\rightarrow$ x=0

Ejercicio 4: Obtener la ecuación de la circunferencia con centro en el origen sabiendo que una de sus rectas tangentes es r: $y=-x+\sqrt{2}$.

Podemos calcular el punto de tangencia si calculamos la intersección de r con la recta normal. Sabemos de la recta normal que pasa por el centro O(0,0) y su pendiente es m=1 (perpendicular a r). Luego es y=x.

La intersección de ambas es $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

El radio será la distancia entre P y O→ r=d(P,O)=1 →c: $x^2+y^2=1$

Ejercicio 5: calcular las rectas tangentes a la circunferencia con radio 3 y centrada en O(1,-3), sabiendo que la coordenada x de los puntos de tangencia es x=0.

Calculemos primero los puntos de tangencia, para ello necesitamos la ecuación de la circunferencia:

c: $(x-1)^2+(y+3)^2=9$. Si x=0 → $y=-3\pm\sqrt{8}$ → $P(0,-3+\sqrt{8})$, $P'(0,-3-\sqrt{8})$

<u>Recta tangente en $P(0,-3+\sqrt{8})$:</u>

Calculemos la pendiente de la recta normal (que une P con el centro)→ $m=\frac{-3-(-3+\sqrt{8})}{1-0}=-\sqrt{8}$ → Luego como la tangente es perpendicular $m=\frac{1}{\sqrt{8}}$

r: $(y+3-\sqrt{8})=\frac{1}{\sqrt{8}}(x-0)$

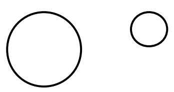
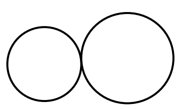
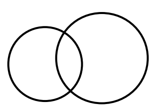
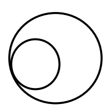
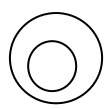
<u>Recta tangente en $P'(0,-3-\sqrt{8})$:</u>

Calculemos la pendiente de la recta normal (que une P con el origen)→ $m=\frac{-3-(-3-\sqrt{8})}{1-0}=\sqrt{8}$ → Luego como la tangente es perpendicular $m=-\frac{1}{\sqrt{8}}$

r: $(y+3+\sqrt{8})=-\frac{1}{\sqrt{8}}(x-0)$

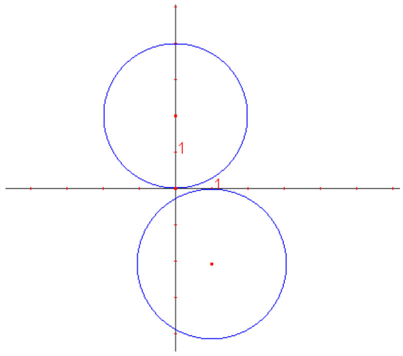
2.3 Posiciones relativas de dos circunferencias

La posición relativa de dos circunferencias pueden ser las siguientes(D es la distancia entre los dos centros).

				
Exteriores	Tangentes exter	Secantes	Tangente int	Interiores
$D>(r_1+r_2)$	$D=r_1+r_2$	$\lvert r_1-r_2\rvert<D<r_1+r_2$	$D=\lvert r_1-r_2\rvert$	$D<\lvert r_1-r_2\rvert$
Ninguna solución	Una solución	Dos soluciones	Una solución	Ninguna solución

Ejemplo: Calcular la posición relativa entre las siguientes circunferencias:

1) c_1: $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ c_2: $x^2+(y-2)^2=1$



$c_1 \rightarrow O_1(1,-2)$, $r_1=2$

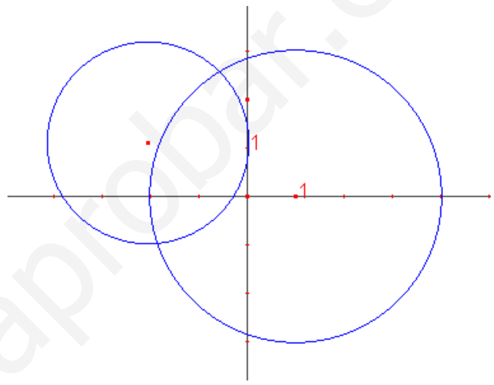
$c_2 \rightarrow O_2(0,2)$, $r_2=1$

$D=d(O_1, O_2)=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$

$\overrightarrow{O_1O_2}=(-1,4)$

$r_1+r_2=3<\sqrt{17} \rightarrow$ exterior

2) c_1:$(x-1)^2+y^2=9$, c_2:$(x+2)^2+(y-1)^2=4$



$c_1 \rightarrow O_1(1,0)$, $r_1=3$

$c_2 \rightarrow O_2(-2,1)$, $r_2=2$

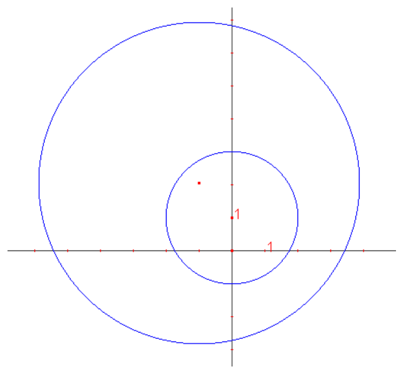
$D=d(O_1, O_2)=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

$\overrightarrow{O_1O_2}=(-3,1)$

$r_1+r_2=5$; $|r_1-r_2|=1$

$5>\sqrt{10}>1 \rightarrow$ secantes

3) c_1:$(x+1)^2+(y-2)^2=25$; c_2: $x^2+(y-1)^2=4$



$c_1 \rightarrow O_1(-1,2)$, $r_1=5$

$c_2 \rightarrow O_2(0,1)$, $r_2=2$

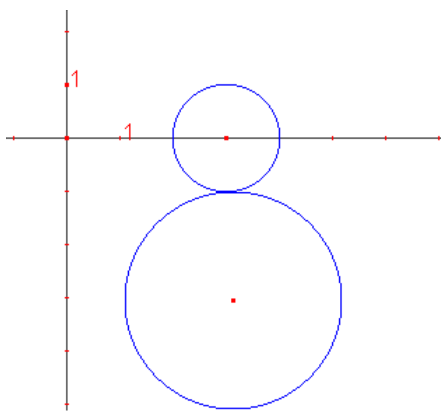
$D=d(O_1, O_2)=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\overrightarrow{O_1O_2}=(1,-1)$

$r_1+r_2=7$; $|r_1-r_2|=3$

$3>\sqrt{2} \rightarrow$ Interior

4) c_1:$(x-3)^2+y^2=1$, c_2:$(x-3)^2+(y+3)^2=4$



$c_1 \rightarrow O_1(3,0)$, $r_1=1$

$c_2 \rightarrow O_2(3,-3)$, $r_2=2$

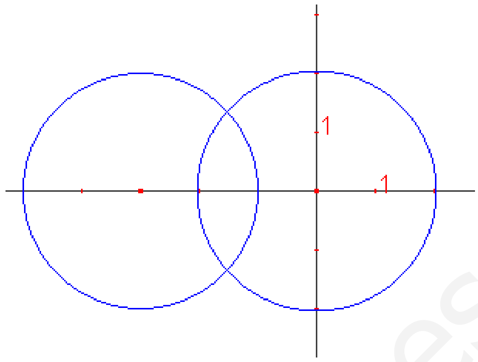
$D=d(O_1, O_2)=\sqrt{0+(-3)^2}=3$

$\overrightarrow{O_1O_2}=(0,-3)$

$r_1+r_2=3=D \rightarrow$ Tangente.

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio 6: calcular los puntos de intersección de las siguientes circunferencias c_1:$x^2+y^2=4$, c_2: $(x+3)^2+y^2=4$



$c_1 \rightarrow O_1(0,0)$, $r_1=2$

$c_2 \rightarrow O_2(-3,0)$, $r_2=2$

$D=d(O_1, O_2)=\sqrt{3^2+0^2}=3$

$\overrightarrow{O_1O_2}=(-3,0)$

$r_1+r_2=4$; $|r_1-r_2|=0$

$4>3>0 \rightarrow$ se cortan

c_1:$x^2+y^2=4$

c_2: $(x+3)^2+y^2=4$

$y^2=4-x^2 \rightarrow (x+3)^2+4-x^2=4 \rightarrow x^2+6x+9+4-x^2-4=0 \rightarrow 6x=-9 \rightarrow x=-3/2$

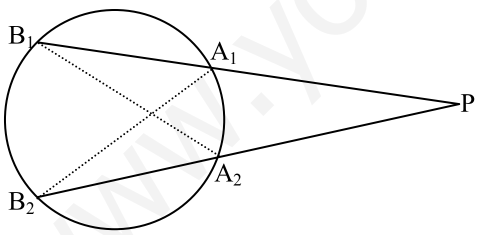
$y^2=4-(9/4) \rightarrow y^2=7/4 \rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{7}}{2} \rightarrow P(-3/2,\frac{\sqrt{7}}{2})$; $P'(-3/2,-\frac{\sqrt{7}}{2})$

2.4. Potencia de una circunferencia. Eje y centro radical

Definición: sea un punto P del plano y una circunferencia c. La potencia de este punto respecto de la circunferencia se denota $Pot_c(P)$ es el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{PA}$, y $\overrightarrow{PB}$, siendo A y B los puntos de corte de cualquier recta que pase por P y corte a la circunferencia.

$$\boxed{Pot_c(P)=\overline{PA}\cdot\overline{PB}}$$

Demostración de la independencia de la potencia con la recta elegida:



Los ángulos $\widehat{B_1}$ y $\widehat{B_2}$ son iguales, pues están inscritos y abarcan el mismo arco $\widehat{A_1A_2}$. Luego los triángulos $\widehat{PB_1A_2}$ y $\widehat{PB_2A_1}$ son semejantes al tener dos ángulos iguales $\widehat{B_1}=\widehat{B_2}$ y $\hat{P}$ es común a ambos. Al ser semejantes sus lados proporcionales:

$$\frac{PB_1}{PB_2}=\frac{PA_2}{PA_1} \rightarrow \overline{PB_1}\cdot\overline{PA_1}=\overline{PB_2}\cdot\overline{PA_2}$$

Calculo de la potencia: existe un método más sencillo de calcular la potencia, consistente en sustituir la x y la y del punto $P(P_x,P_y)$ en la ecuación de la circunferencia

$$\boxed{Pot_c(P)=(P_x-x_0)^2+(P_y-y_0)^2-r^2=A\cdot P_x+B\cdot P_y+C}$$

Casos:

a) $Pot_c(P)>0$ punto exterior a la circunferencia

b) $Pot_c(P)=0$ punto de la circunferencia

c) $Pot_c(P)<0$ punto interior a la circunferencia

Ejercicio 7: sea la circunferencia c: $x^2+y^2+2x-2y-2=0$, calcular la potencia del punto P(0,0) a partir de los dos métodos y comprobar que el resultado es el mismo. (Nota usa la recta que pasa por P r: y=x). ¿Cuál es la posición relativa de P respecto a c?

a) A partir de la definición de potencia, calculemos los puntos de corte de r con la circunferencia:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x-2y-2=0 \\ y=x \end{cases} \rightarrow A(1,1),\ B(-1,-1)$$

$\overline{PA}$=(1-0,1-0)=(1,1)

$\overline{PB}$=(-1-0,-1-0)=(-1,-1)

$Pot_c(P)=\ \overline{PA}\cdot\overline{PB}=-2$

A partir de sustituir en la ecuación de la circunferencia:

$Pot_c(P)=0^2+0^2+2\cdot0-2\cdot0-2=-2$

b) Como $Pot_c(P)<0$ el punto dentro de la circunferencia

Definición: eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos que tienen igual potencia respecto de ambas circunferencias. Es una recta.

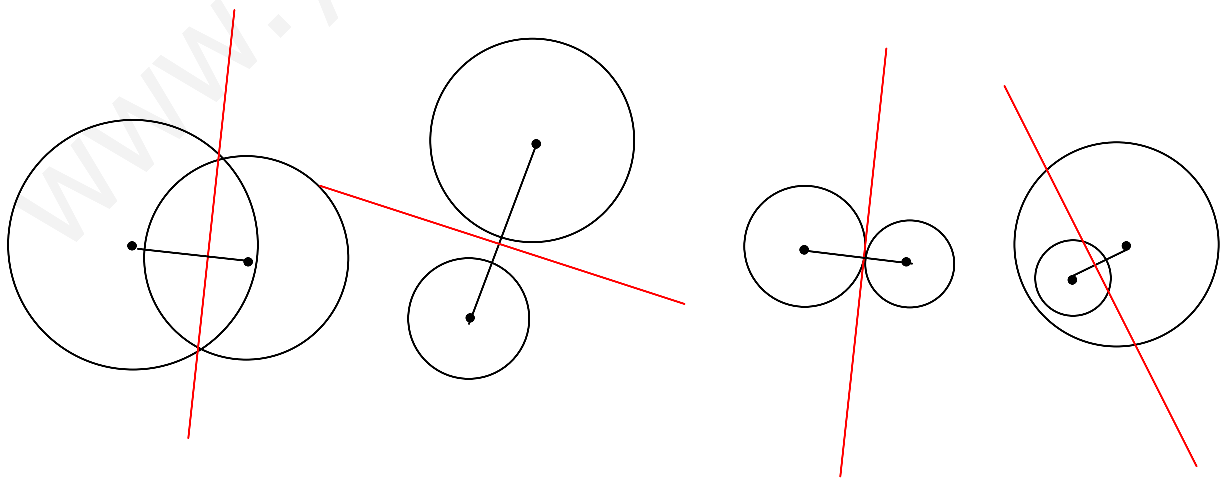
Cálculo de la potencia de dos circunferencias c y c': simplemente aplicando la definición, si los puntos del eje radical tienen de coordenadas r(x,y), entonces cumplen:

c: $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

c': $x^2+y^2+A'x+B'y+C'=0$

r: $Pot_c(x,y)=Pot_{c'}(x,y) \rightarrow x^2+y^2+Ax+By+C=x^2+y^2+A'x+B'y+C' \rightarrow$

$$\boxed{\text{eje radical } r: (A-A')x+(B-B')y+(C-C')=0}$$



***Nota**:* El eje radical es un recta perpendicular al segmento que une los centros de las dos circunferencias. Si las circunferencias son concéntricas no tienen eje radical.

***Ejercicio 8**: calcular el eje radical de las circunferencias con ecuaciones c:$(x-1)^2+y^2=4$ c':$(x+2)^2+(y-1)^2=9$. Calcular la mediatriz de sus centros y comprobar que es paralela al eje radical*

c: $x^2+y^2-2x-3=0$

c': $x^2+y^2+4x-2y-4=0$

Eje radical → $x^2+y^2-2x-3= x^2+y^2+4x-2y-4$ → r: $6x-2y-1=0$

$O_1(1,0)$, $O_2(-2,1)$. Mediatriz M(-0.5, 0.5), $\vec{n}=\overrightarrow{O_1O_2}=(-3,1)$: $-3x+y+C=0$

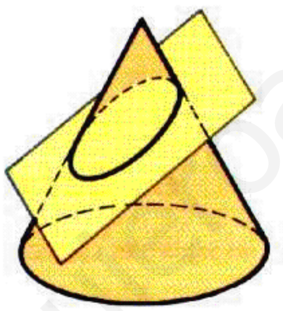
$-3\cdot(-0.5)+0.5+C=0$ → $C=-2$ m:$-3x+y-2=0$

Son paralelas con pendiente m=3

3. Elipse

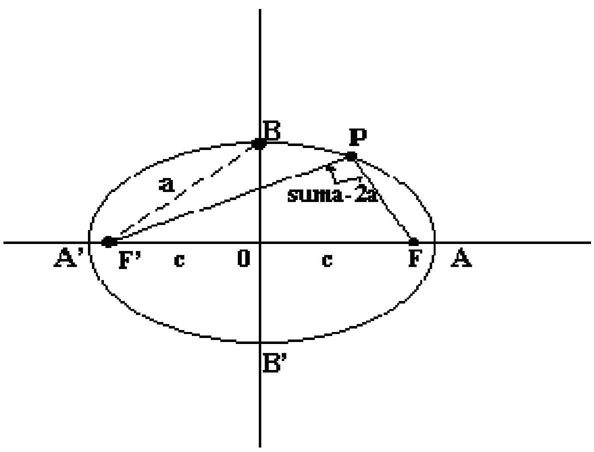
3.1. Definición y elementos

La elipse es la figura geométrica que se obtiene de interceptar un cono con un plano cuyo ángulo con eje es mayor que el que forma dicho eje con la generatriz



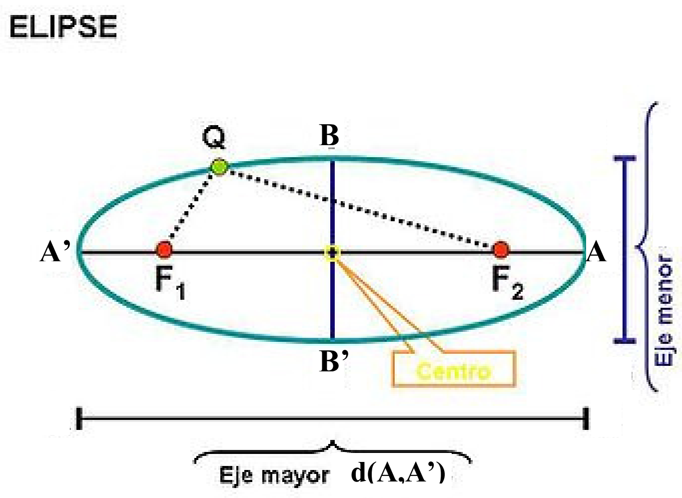
Definición: la elipse es el lugar geométrico de los puntos P(x,y) que cumplen que la suma de las distancias a dos puntos denominados focos de la elipse (F, F') es constante.

$d(P,F)+d(P,F')=K=2\cdot a$, donde $2\cdot a$ es la distancia del eje mayor, es decir d(A,A')



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Elementos de la elipse:



Focos, los puntos F y F'.

Centro, es el punto O.

Vértices: A, A', B, B'.

Eje mayor: es el segmento AA', cuya distancia se llama 2a

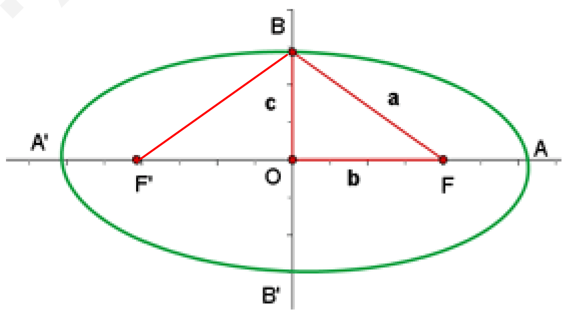
Eje menor: es el segmento BB', cuya distancia se llama 2b

Distancia focal, es la distancia entre los focos, es igual a 2c

Teorema de Pitágoras de la elipse: los valores de a, b y c están relacionados entre si mediante la siguiente expresión:

$$\boxed{a^2=b^2+c^2}$$

Demostración: aplicamos la definición de la elipse en cualquiera de los puntos B o B':

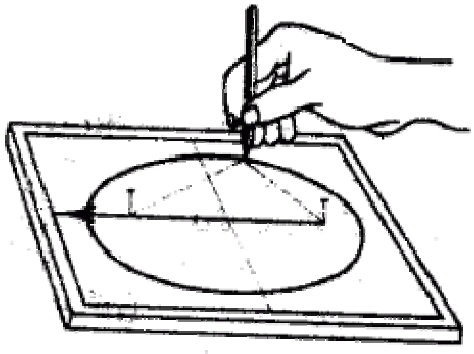


d(F,B)+d(F',B')=2a → d(F,B)=a

Se forma un triángulo rectángulo donde los catetos valen b y c y la hipotenusa a.

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Método del jardinero para construir la elipse: consiste en fijar una cuerda de tamaño 2a en dos puntos, focos de la elipse y distanciados 2c. Con un bolígrafo con la cuerda tensa trazamos la elipse como se ve en el siguiente dibujo:



3.2. Ecuación de la elipse

Aplicando la definición de la elipse y el teorema de Pitágoras para la elipse podemos obtener la ecuación reducida. Por sencillez situemos en centro en el origen O(0,0) y el eje mayor en el eje OX; esta elipse tiene por focos F(c,0) y F'(-c,0). Llamemos P(x,y) a los puntos de la elipse que cumplen:

$$d(F,P)+d(F',P)=2a \rightarrow \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

Ordenando la igualdad y elevando al cuadrado:

$$\left(\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}\right)^2 \rightarrow (x-c)^2+y^2=4a^2+(x+c)^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Ordenando la igualdad y volviendo a elevar al cuadrado:

$$-(x-c)^2-y^2+4a^2+(x+c)^2+y^2=4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \rightarrow 4a^2+4cx=4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$\left(a^2+cx\right)^2=\left(a\sqrt{(x+c)^{2^2}+y^2}\right)^2 \rightarrow a^4+2ca^2x+c^2x^2=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)\xrightarrow[a^2=b^2+c^2]{}b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Dividiendo entre $a^2 \cdot b^2$:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Ecuación de la elipse con eje mayor el horizontal y centro O(0,0)

Cambiando x por y tenemos la ecuación de la elipse centrada en O(0,0) y con eje mayor el vertical:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$$

Ecuación de la elipse con eje mayor el vertical y centro O(0,0)

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

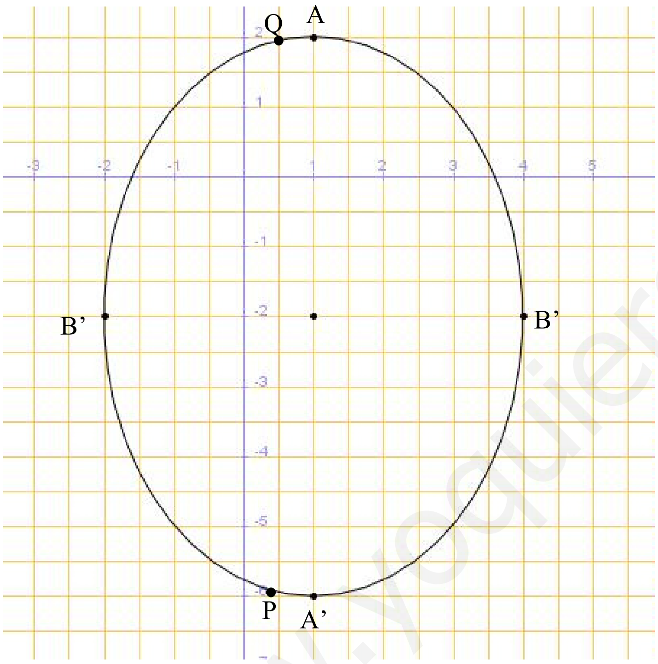
Si desplazamos la elipse x_0 unidades en el eje OX e y_0 en el eje OY, tenemos que el centro de la elipse está en $O(x_0,y_0)$. La ecuación de la elipse consiste en sustituir x por $(x-x_0)$ e y por $(y-y_0)$:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$$ ***Elipse con eje mayor el horizontal y centro $O(x_0,y_0)$***

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1}$$ ***Elipse con eje mayor el vertical y centro $O(x_0,y_0)$***

Ejemplo: escribir la ecuación reducida de la elipse con centro en O(1,-2) y con eje mayor 4, paralelo al eje OY, y menor 3. Obtener 6 puntos

$$\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(y+2)^2}{4^2}=1$$



B(1+3,-2) → B(4,-2)

B'(1-3,-2) → B'(-2,-2)

A(1,-2+4) → A(1,2)

A'(1,-2-4) → A'(1,-6)

Si x=0 → $\frac{(0-1)^2}{3^2}+\frac{(y+2)^2}{4^2}=1$

→ $(y+2)^2=\frac{8\cdot 16}{9}$ → $y=-2\pm\frac{\sqrt{128}}{3}$

$P(0, -2-\frac{\sqrt{128}}{3})$

$Q(0, -2+\frac{\sqrt{128}}{3})$

Ejercicio 9: calcular la ecuación de la elipse si sabemos que F(1,5), F´(1,11), y el eje mayor es 2a=10.

Sabemos que el eje mayor es vertical, pues F y F' están en la recta x=1.

El centro será el punto medio de F y F' →O(1,8)

Podemos calcular c: 2c=d(F,F')=6. → c=3

Por otro lado 2a=10 → a=5.

Aplicando Pitágoras en la elipse $b^2=a^2-c^2$ → b=4

$$\frac{(x-1)^2}{4^2}+\frac{(y-8)^2}{5^2}=1$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

En la circunferencia vimos la ecuación de la misma si operábamos los cuadrados de la ecuación reducida. En la elipse sólo lo haremos si está centrad en el origen:

e: $Ax^2+By^2-C=0$, siendo $A>0$,$B>0$, $C>0$ y $A\neq B$(sino es una circunferencia)

Para obtener a y b, sólo tenemos que igualar la parte de x^2 e y^2 a 1 y asociar en la ecuación reducida:

e: $\frac{A}{C}x^2+\frac{B}{C}y^2=1$ e: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ó $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

Luego

- Si $\frac{C}{A}>\frac{C}{B}$ → $\frac{C}{A}=a^2$ y $\frac{C}{B}=b^2$
- Si $\frac{C}{A}<\frac{C}{B}$ → $\frac{C}{A}=b^2$ y $\frac{C}{B}=a^2$.

Ejemplo: Encontrar a y b y decir la orientación de la elipse de ecuación: $2x^2+3y^2=108$.

Dividiendo por 108: $\frac{x^2}{54}+\frac{y^2}{36}=1$ → $a=\sqrt{54}$, $b=6$. El eje mayor es el horizontal.

3.3. Excentricidad de la elipse.

La excentricidad de la elipse mide como de achatada está la elipse. Se define como el cociente de la distancia focal y el eje mayor.

$\boldsymbol{e=\frac{c}{a}}$ Se cumple (como $a\geq c$) que $\mathbf{1>e\geq 0}$.

En el caso que e=0, entonces c=0, es decir los dos focos en el centro y b=a. Tenemos una circunferencia, donde a=b=r.

Las elipses con misma excentricidad son semejantes.

Ejemplo: Decir los valores de a y c si se sabe que e=0,5 y b=10.

$$\begin{cases} 0{,}5=\frac{c}{a} \\ a^2=10^2+c^2 \end{cases} \rightarrow 4c^2=100+c^2 \rightarrow c=10\sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow a=20\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Ejercicio 10: calcular la ecuación de la elipse con e=0,6 y eje menor situado con vértices B(1,5), B'(1,-1).

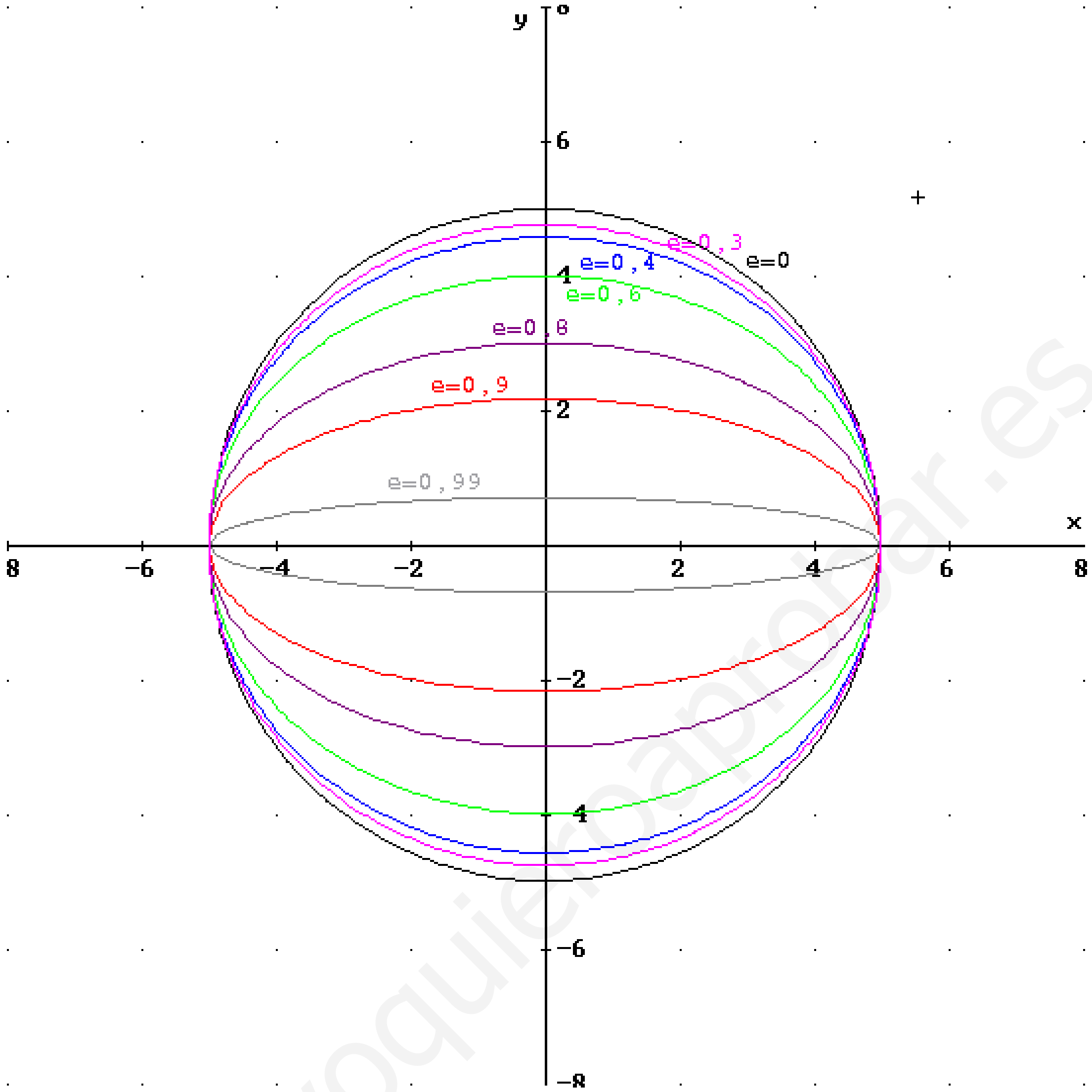
2b=d(B,B')=6→ b=3. Eje menor paralelo eje OY

O=Medio(B,B')=(1,2)

$$\begin{cases} 0{,}6=\frac{c}{a} \\ a^2=3^2+c^2 \end{cases} \rightarrow a^2=9+0{,}36a^2 \rightarrow a=3{,}75$$

$$\frac{(x-1)^2}{3{,}75^2}+\frac{(y-2)^2}{3^2}=1$$

Excentrincidad de la elipse



3.4. Ecuación de la elipse desarrollada:

La ecuación de la elipse desarrollando los cuadrados es de la forma $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$, cumpliéndose:

a) A y B mismo signo
b) $A\neq B$ (si A=B es una circunferencia).

Pasos para determinar el centro $O(x_0,y_0)$ y los ejes a y b:

1) Agrupar x^2 con x con el factor de x^2; lo mismo y^2 con y con coeficiente de y^2
2) Buscar cuadrados perfectos y restar el término independiente, de los cuadrados.
3) Dividir el término independiente para que esté la parte de x e y igualadas a 1.
4) Identificar términos:

Ejemplo: dibujar la siguiente cónica $10x^2+4y^2+40x+8y+4=0$

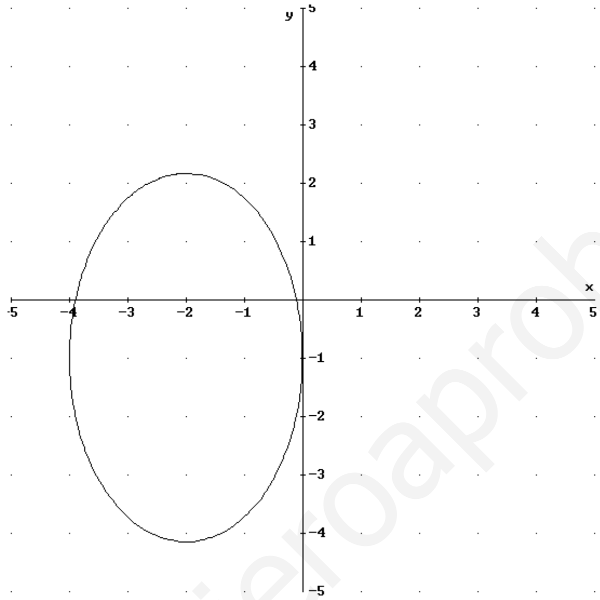
Es una elipse pues $10\neq4$ y mismo signo

1) $10\cdot(x^2+4x)+4\cdot(y^2+2y)+4=0$

2) $10\cdot(x+2)^2-10\cdot4+4\cdot(y+1)^2-4\cdot1+4=0 \rightarrow 10\cdot(x+2)^2+4\cdot(y+1)^2=40$

3) $\frac{10(x+2)^2}{40}+\frac{4\cdot(y+1)^2}{40}=1 \rightarrow \frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{10}=1$

4) $a=\sqrt{10}$, $b=2$, $O(-2,-1)$. Eje mayor paralelo al eje OY.



Ejercicio 11: dibujar e identificar la cónica de ecuación $20x^2+36y^2-20x+216y+149=0$

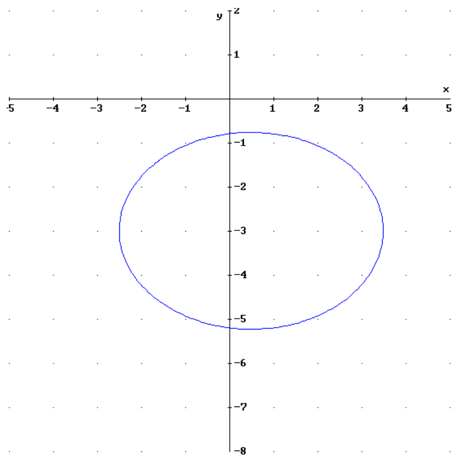
Es una elipse pues $20\neq36$ y mismo signo

1) $20\cdot(x^2-x)+36\cdot(y^2+6y)+149=0$

2) $20\cdot(x-1/2)^2-20\cdot1/4+36(y+3)^2-36\cdot9+149=0 \rightarrow 20\cdot(x-1/2)^2+36(y+3)^2=180$

3) $\frac{20\cdot(x-\frac{1}{2})^2}{180}+\frac{36\cdot(y+3)^2}{180}=1 \rightarrow \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{5}=1$

4) $a=3$, $b=\sqrt{5}$, $O(1/2,-3)$. Eje mayor paralelo al eje OX

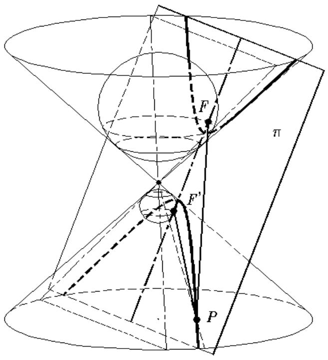


 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

4. Hipérbola

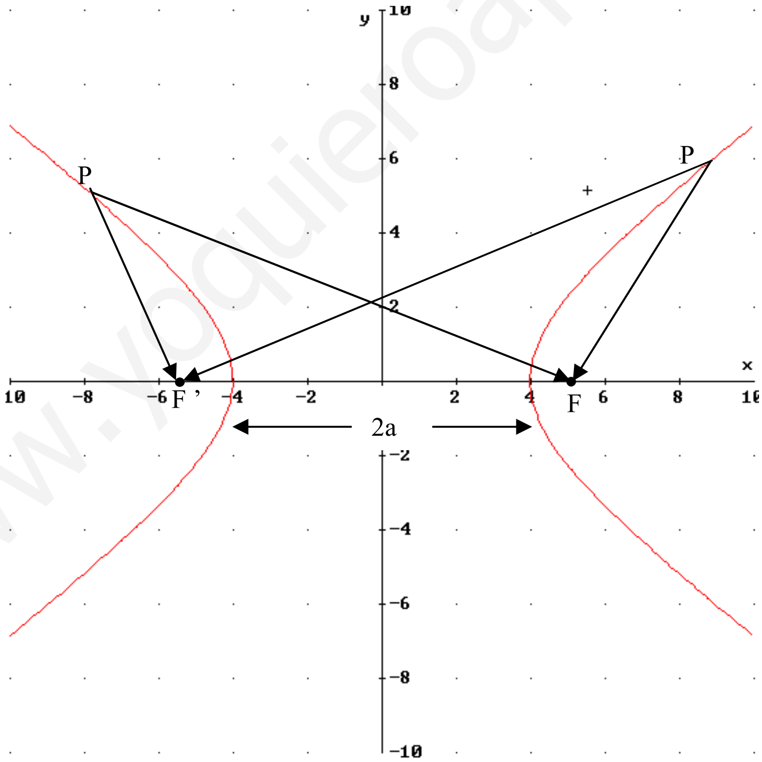
4.1. Definición y elementos de la hipérbola

Definición: la hipérbola es la figura geométrica que se obtiene de la intersección de un plano con un cono doble. Cumpliéndose que el plano forma un ángulo con el eje menor que la directriz con el eje.



Definición: la hipérbola es el lugar geométrico de los puntos que cumple que la diferencia de las distancia de los mismo a otros dos puntos, llamado focos de la hipérbola es constante. Si P(x,y) son los puntos de la hipérbola se cumple que:

$$|d(P,F)-d(P,F')|=k=2a$$



Elementos de la hipérbola: los elementos de la hipérbola son:

A, A': vértices reales de la hipérbola

2a=d(A,A')=eje real

F, F': focos de la hipérbola

2c=d(F,F')

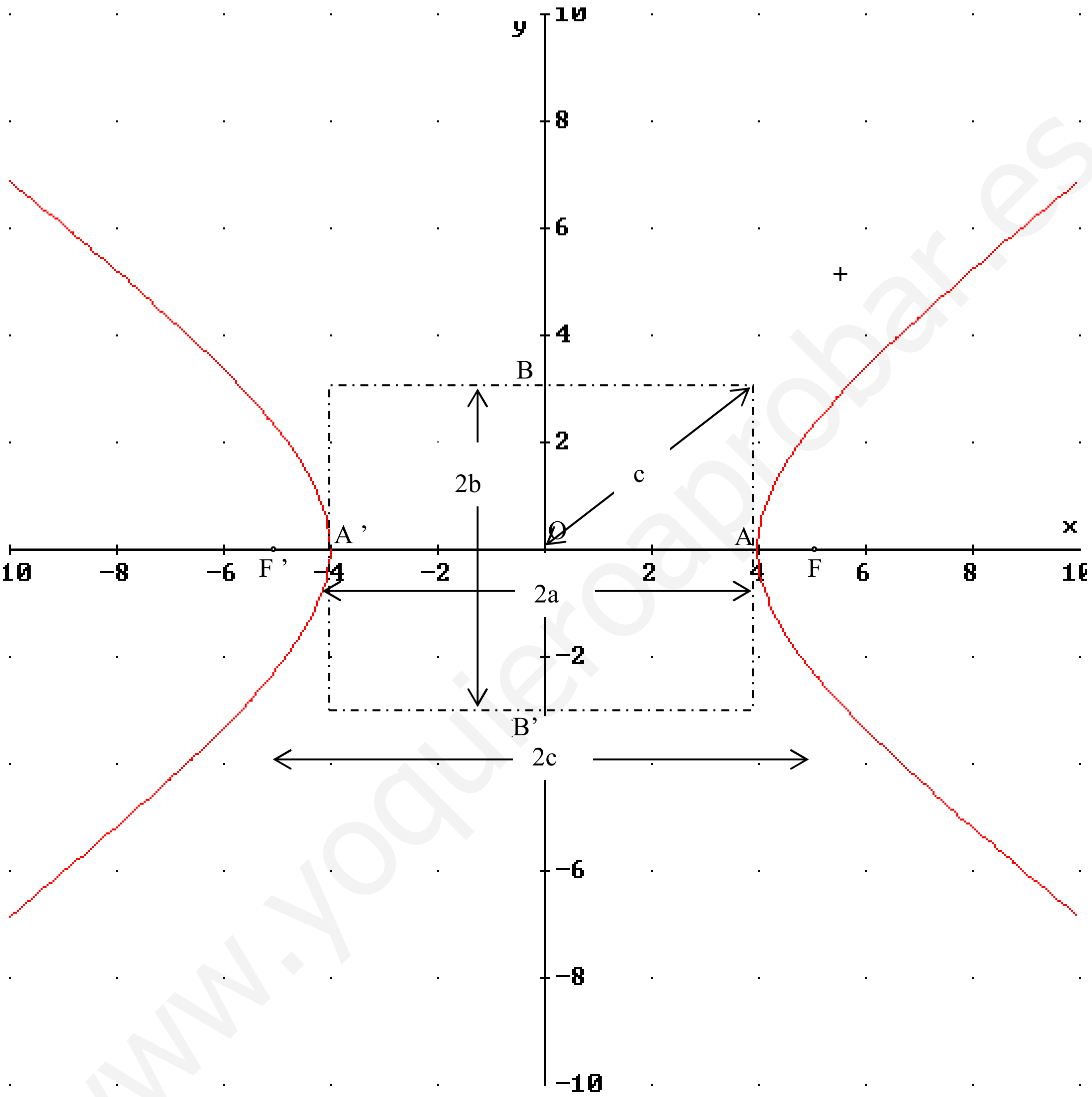
$O(x_0,y_0)$, centro de hipérbola.

B, B'= eje imaginario de la hipérbola

2b=d(B,B')=eje imaginario

Para situar B y B' se cumple el teorema de Pitágoras de la hipérbola:

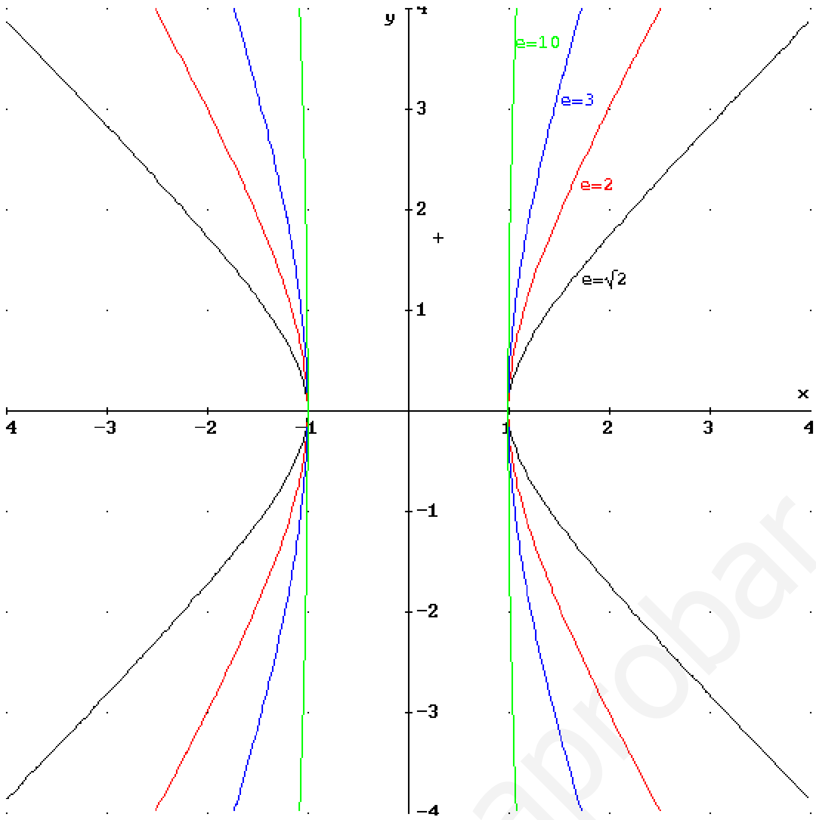
$$\boxed{c^2=a^2+b^2}$$



Excentricidad de la hipérbola: es el cociente entre la distancia focal y el eje real: $e=\frac{c}{a}$

La excentricidad de la hipérbola (c>a) cumple e>1

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)



Hipérbola y excentricidad

4.2. Ecuación de la hipérbola

Podemos obtener la ecuación de la hipérbola de forma semejante a la obtenida con la elipse:

1) Focos y eje real en el eje OX, centrada en origen O(0,0):

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

2) Focos y eje real en el eje Y,centrada en origen O(0,0), se obtiene cambiando x por y:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1}$$

3) Focos y eje real paralelo al eje OX y centro en $O(x_0,y_0)$

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$$

4) Focos y eje real paralelo al eje OY y centro en $O(x_0,y_0)$

$$\boxed{\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1}$$

Ejemplos:

a) a=4, b=3 eje real paralelo al eje OY y centro O(-1,3): $\frac{(y-3)^2}{4^2}-\frac{(x+1)^2}{3^2}=1$

b) a=2, c=3 eje real paralelo al eje OX y centro O(-2,-3): b=$\sqrt{5}$ → $\frac{(x+2)^2}{2^2}-\frac{(y+3)^2}{\sqrt{5}^2}=1$

Ejercicio 12: *calcular la ecuación de la hipérbola sabiendo que e=4 y A(1,1) A'(1,9)*

Dibujando los vértices del eje real (A y A') tenemos que el eje real paralelo al eje OY y también podemos calcular el centro y el valor de a:

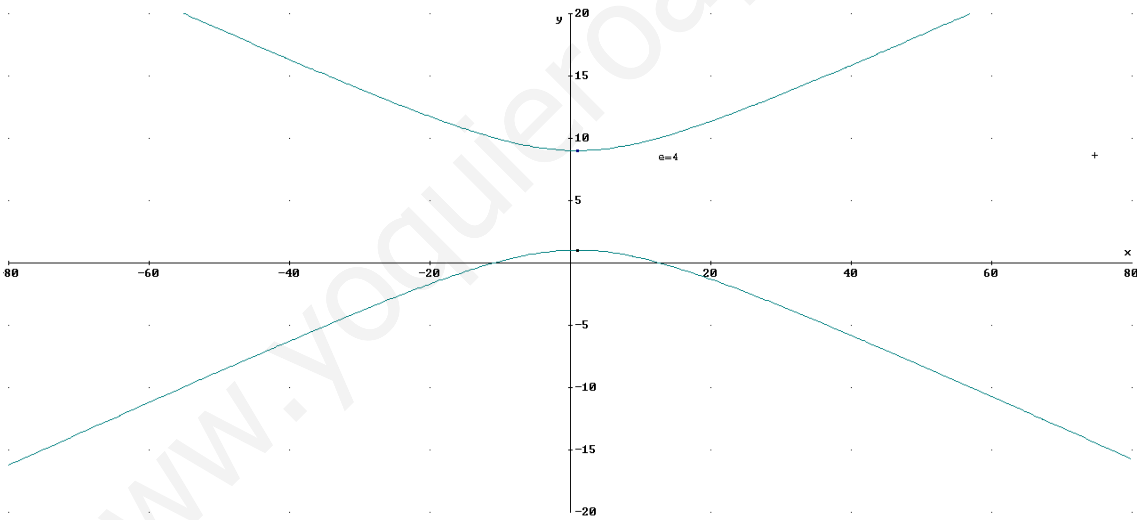
Centro: O($\frac{1+1}{2}$,$\frac{1+9}{2}$) → O(1,5)

2·a=d(A,A')=8 → a=4

Para calcular b, usemos el teorema de Pitágoras de la hipérbola y la excentricidad:

$$\left.\begin{array}{r} 4=\dfrac{c}{4} \\ c^2=b^2+4^2 \end{array}\right\} \rightarrow c=16,\ b=4\sqrt{15}$$

$$\frac{(y-5)^2}{4^2}-\frac{(x-1)^2}{240}=1$$



Ecuación de la hipérbola desarrollando la expresión: $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ cumpliéndose A y B distinto signo. Los pasos son los mismos que hemos hecho con la elipse.

Ejemplo: $-7x^2+120y^2+14x-1200y+1313=0$

Si es una hipérbola pues A negativo y B positivo. Pasos

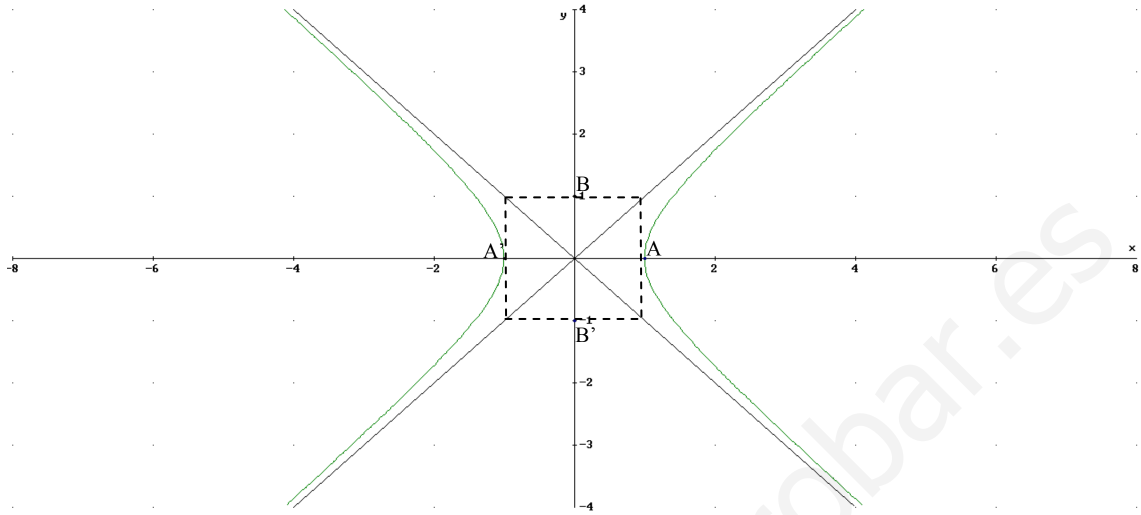
1) $-7(x^2-2x)+120(y^2-10y)+1313=0$

2) $-7(x-1)^2+7+120(y-5)^2-3000+1313=0 \rightarrow -7(x-1)^2+120(y-5)^2=1680$

3) $-\frac{7(x-1)^2}{1680}+\frac{120(y-5)^2}{1680}=1 \rightarrow \frac{(y-5)^2}{16}-\frac{(x-1)^2}{240}=1$

4.3. Asíntotas de la hipérbola

Las asíntotas son rectas a las que se aproxima la gráfica cuando x se hace muy grande y/o muy pequeña. Toda hipérbola tiene dos asíntotas que pasan por el centro de la hipérbola y por los vértices del rectángulo imaginario siguiente:



Asíntotas cuando la hipérbola *centrada en el origen* y el *eje real es el eje OX*:

- Pendiente de la recta: $m = \pm\frac{b}{a}$ (ya que cuando x crece a y crece o decrece b)
- Punto de la recta O(0,0)
- Luego la ecuación de las asíntotas es $y=\pm\frac{b}{a}x$

Asíntotas cuando la hipérbola *centrada en el origen* y el *eje real es el eje OY*:

- Pendiente de la recta: $m = \pm\frac{a}{b}$ (ya que cuando x crece b y crece o decrece a)
- Punto de la recta O(0,0)
- Luego la ecuación de las asíntotas es $y=\pm\frac{a}{b}x$

Si la hipérbola *centrada en el punto $O(x_0,y_0)$* entonces las ecuaciones son:

- Si eje real paralelo al eje OX → $y=y_0\pm\frac{b}{a}(x-x_0)$
- Si eje real paralelo al eje OY → $y=y_0\pm\frac{a}{b}(x-x_0)$

Ejercicio13: calcular la ecuación de las asíntotas de la hipérbola $\frac{(y-1)^2}{8}-\frac{(x+3)^2}{2}=2$

La hipérbola tiene el eje real paralelo al eje OY y el centro es O(-3,1). A la hora de calcular los valores de a y b, hay que tener cuidado pues la hipérbola igualdad a 2. Hay que dividir los dos lados de la igualdad entre 2: $\frac{(y-1)^2}{2\cdot 8}-\frac{(x+3)^2}{2\cdot 2}=1$→ $a^2=16$, $b^2=4$.

Luego O(-3,1), a=4, b=2 y eje real paralelo a eje OY → $y=1\pm 2\,(x+3)$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio 14: Hallar los focos, los semiejes, la excentricidad y asíntotas de las hipérbolas siguientes:

a) $\frac{(x+3)^2}{36} - \frac{(y-3)^2}{64} = 1$

b) $4x^2-y^2=9$

c) $4y^2-x^2=4$

a) Es la expresión de la hipérbola con eje real paralelo al eje OX con centro en O(-3,3), a=6, b=8. Luego c=$\sqrt{64+36}$=10, y e=$\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$. Las asíntotas son y=3$\pm\frac{8}{6}$(x+3)

b) $4x^2-y^2=9 \rightarrow \frac{4x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1 \rightarrow \frac{x^2}{9/4}-\frac{y^2}{9}=1$

Es la expresión de la hipérbola con eje real paralelo al eje OX con centro en O(0,0), a=3/2, b=3. Luego c=$\sqrt{9/4+9}$=$\frac{3\sqrt{5}}{2}$, y e=$\sqrt{5}$. Las asíntotas son y=$\pm 2x$

c) $4y^2-x^2=4 \rightarrow \frac{4y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1 \rightarrow \frac{y^2}{1}-\frac{x^2}{4}=1$

Es la expresión de la hipérbola con eje real paralelo al eje OY con centro en O(0,0), a=1, b=2. Luego c=$\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$, y e=$\frac{\sqrt{5}}{1}=\sqrt{5}$. Las asíntotas son y=$\pm\frac{1}{2}$x

Ejercicio 15: Hallar las ecuaciones de las hipérbolas con centro en el origen y focos en el eje OX y que cumple:

a) Tiene un vértice en (6,0) y una asíntota es 4x-3y=0

b) Pasa por los puntos (3,0) y (5,-3)

c) Pasa por el punto $(12\sqrt{2},5)$ y su distancia focal es 26 unidades

d) Pasa por el punto P(-10,4) y su excentricidad es de $\sqrt{5}/2$

La ecuación de todas ellas es $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, y por tanto tenemos que calcular a y b

a) El vértice que nos dan es A(6,0). Luego a=d(O,A)=6. La ecuación de la asíntota de esta hipérbola es y=$\pm\frac{b}{a}x$. Despejando y de la asíntota que nos dan: y=$\frac{4}{3}x$. Luego $\frac{4}{3}=\frac{b}{6}$ y por tanto b=8. $\rightarrow \frac{x^2}{6^2}-\frac{y^2}{8^2}=1$

b) Podemos calcular a y b sustituyendo los valores de x e y de los puntos en la ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$:

(3,0) $\rightarrow \frac{3^2}{a^2}-\frac{0^2}{b^2}=1 \rightarrow$ a=3 (era fácil de calcular pues (3,0) era el vértice A)

(5,-3) $\rightarrow \frac{5^2}{3^2}-\frac{(-3)^2}{b^2}=1 \rightarrow$ b= 9/4 $\rightarrow \frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{(9/4)^2}=1$

c) 2c=26 → c=13, luego F(13,0) y F'(-13,0) . Podemos calcular a aplicando la definición de la hipérbola |d(P,F)-d(P,F')|=2a

d(P,F)=$|\overrightarrow{PF}|\sqrt{(13-12\sqrt{2})^2+5^2}=13\sqrt{2}-12$

d(P,F')=$|\overrightarrow{PF'}|\sqrt{(-13-12\sqrt{2})^2+5^2}=13\sqrt{2}+12$

|d(P,F)-d(P,F')|=24 → 2a=24 → a=12

Para calcular b apliquemos el teorema de Pitágoras: $b^2=c^2-a^2$ → b=5.

$$\frac{x^2}{12^2}-\frac{y^2}{5^2}=1$$

d) Como no tenemos c no podemos calcular F y F', y no podremos hacer lo mismo que en el apartado anterior. Podemos calcularlo por un sistema:

ecuación 1) P(-10,4)∈hipérbola → $\frac{(-10)^2}{a^2}-\frac{4^2}{b^2}=1$

ecuación 2) $e=\frac{c}{a},\ e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}\rightarrow\frac{5}{4}=\frac{a^2+b^2}{a^2}$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{100}{a^2}-\frac{16}{b^2}=1\\ \frac{5}{4}=\frac{a^2+b^2}{a^2}\end{array}\right\}$$ → a=6, b=3 (hemos descartado las soluciones con a y/o b negativas)

4.4. Hipérbola equilátera. Hipérbola centrada en las asíntotas

Las ***hipérbolas equiláteras*** son las que cumplen que los ejes real e imaginarios son iguales, es decir a=b.

La ecuación de la hipérbola equilátera con centro en $O(x_0,y_0)$ vendrá dada por:

a) Eje real paralelo al eje OX→ $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$ → $(x-x_0)^2-(y-y_0)^2=a^2$

b) Eje real paralelo al eje OY→ $\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1$ → $(y-y_0)^2-(x-x_0)^2=a^2$

Calculemos la excentricidad de la hipérbola equilátera:

$c^2=a^2+b^2=a^2+a^2=2a^2$ → $c=\sqrt{2}a$ → $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}a}{a}=\sqrt{2}$.

Las ecuaciones de las asíntotas se cumple que las pendientes son m=±1, y por tanto son perpendiculares.

En la ecuación desarrollada es fácil de ver si se trata de una hipérbola equilátera, ya que el factor que multiplica a x^2 e y^2 son iguales pero de distinto signo.

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejemplo: Calcular la ecuación desarrollada de la hipérbola equilátera con $c=4\sqrt{2}$ y O(1,2) y eje real paralelo al eje OY:

$a=b=c/e=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=4. \rightarrow \frac{(y-2)^2}{4^2}-\frac{(x-1)^2}{4^2}=1 \rightarrow (y-2)^2-(x-1)^2=16 \rightarrow y^2-x^2+2x-4y-13=0$

Ecuación de la hipérbola equilátera referida a los ejes:

Vamos a ver la ecuación de la hipérbola equilátera cuando las asíntotas son paralelas a los ejes OX y OY.

1) Si el *centro de la hipérbola es O(0,0)* y por tanto las asíntotas son los ejes:

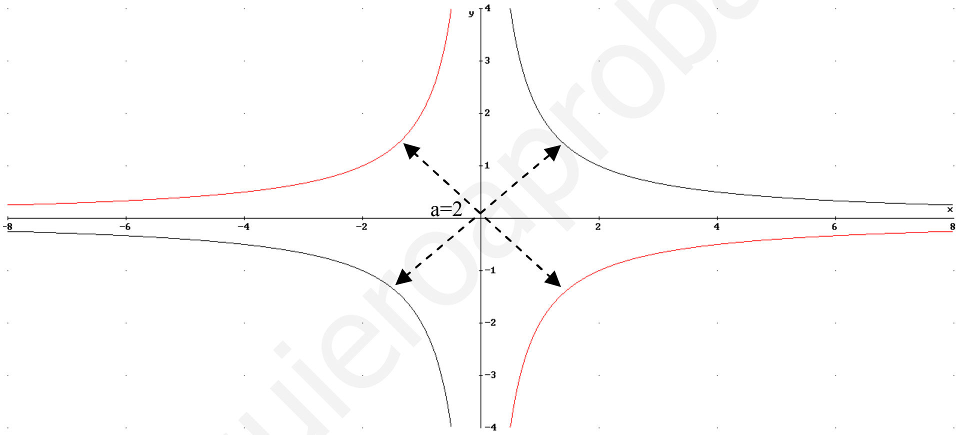
a) $\boxed{y\cdot x=\frac{a^2}{2}}$ → La hipérbola en los cuadrantes I y III

b) $\boxed{y\cdot x=-\frac{a^2}{2}}$ → La hipérbola en los cuadrantes II y IV

Ejemplo a=2 →

a) $y\cdot x=2$

b) $y\cdot x=-2$



1) Si el *centro de la hipérbola es* $O(x_0,y_0)$ y por tanto las asíntotas son $x=x_0$ e $y=y_0$:

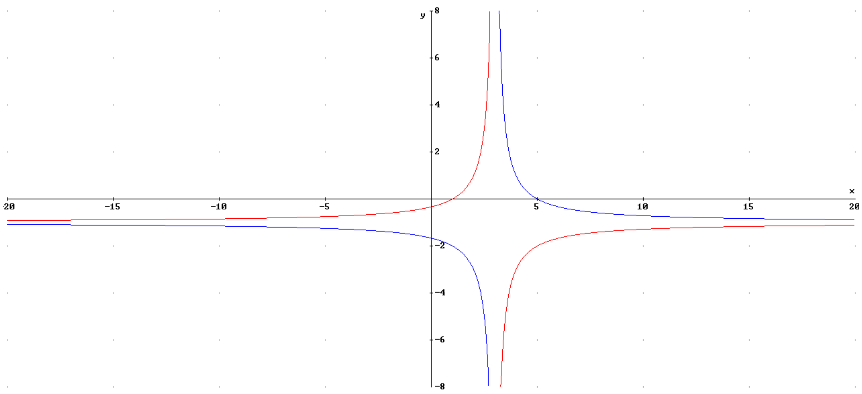
a) $\boxed{(y-y_0)\cdot(x-x_0)=\frac{a^2}{2}}$ → La hipérbola en los cuadrantes I y III

b) $\boxed{(y-y_0)\cdot(x-x_0)=-\frac{a^2}{2}}$ → La hipérbola en los cuadrantes II y IV

Ejemplo a=2 O(3,-1)→

a) $(y+1)\cdot(x-3)=2$

b) $(y+1)\cdot(x-3)=-2$



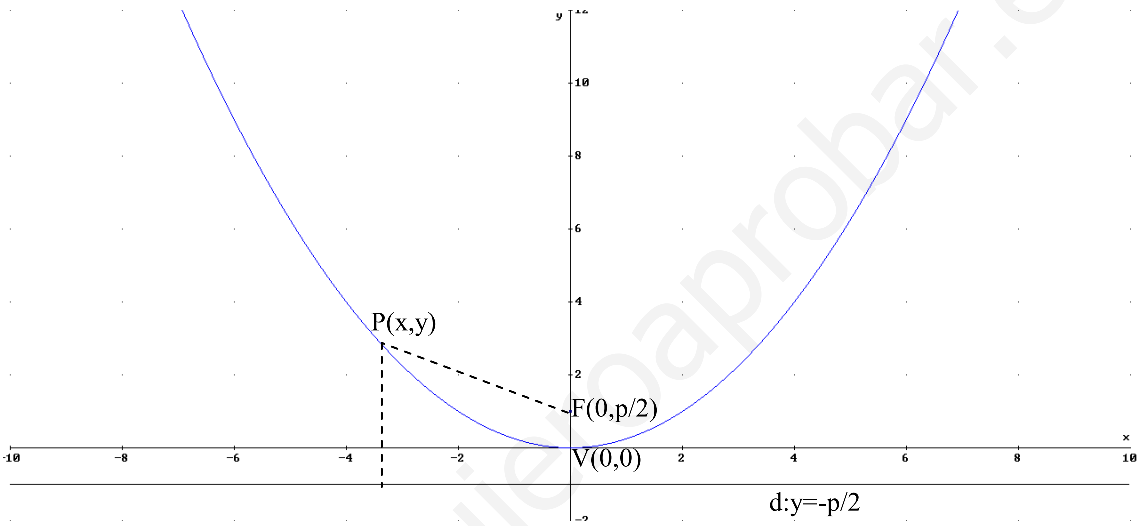
5. Parábola

5.1 Definición y elementos

El año pasado vimos la ecuación de la parábola (como una función) de la forma $y=ax^2+bx+c$. Pero ahora vamos a definir la ecuación de la parábola como lugar geométrico

Definición: la parábola es el lugar geométrico de los puntos P(x,y) del plano que están a igual distancia de un punto denominado foco, F, y una recta denominada directriz, d.

Parábola → d(P,F)=d(P,d)



Vértice de la parábola V, cuya distancia al foco y a la directriz es P/2.

5.2. Ecuación de la parábola

La ecuación de la elipse es según sea la directriz paralela al eje OX o paralela al eje OY de la siguiente forma

1) Vértice de la parábola en (0,0) y directriz paralela al eje OX
   1.1. directriz debajo del eje (y=-p/2) y foco encima F(0,p/2): $\boxed{x^2=2py}$
   1.2. directriz encima del eje (y=p/2) y foco debajo F(0,-p/2): $\boxed{x^2=-2py}$

2) Vértice de la parábola en (0,0) y directriz paralela al eje OY
   1.1. directriz debajo del eje (x=-p/2) y foco encima F(p/2,0): $\boxed{y^2=2px}$
   1.2. directriz encima del eje (x=p/2) y foco debajo F(-p/2,0): $\boxed{y^2=-2px}$

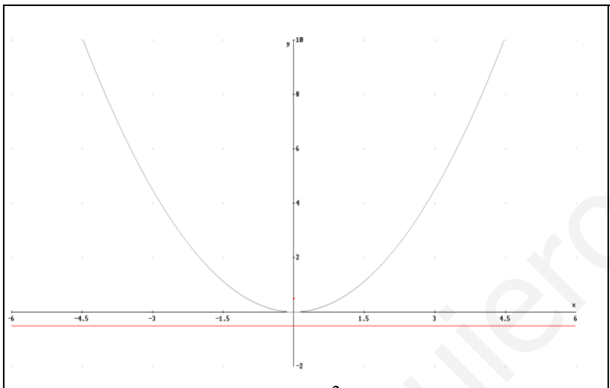
 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Si el vértice se sitúa en $V(x_0,y_0)$ hay que trasladar la gráfica x_0 unidades en el eje OX e y_0 en el eje OY:

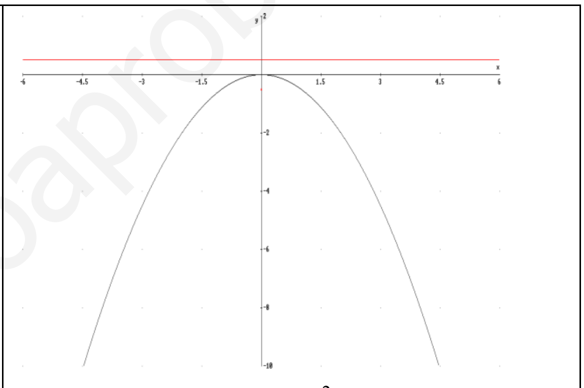
1) Vértice de la parábola en (x_0,y_0) y directriz paralela al eje OX
    1.1. directriz debajo del eje ($y=-p/2$) y foco encima $F(0,p/2)$: $\mathbf{(x-x_0)^2=2p(y-y_0)}$
    1.2. directriz encima del eje ($y=p/2$) y foco debajo $F(0,-p/2)$: $\mathbf{(x-x_0)^2=-2p(y-y_0)}$

2) Vértice de la parábola en (x_0,y_0) y directriz paralela al eje OY
    1.1. directriz debajo del eje ($x=-p/2$) y foco encima $F(p/2,0)$: $\mathbf{(y-y_0)^2=2p(x-x_0)}$
    1.2. directriz encima del eje ($x=p/2$) y foco debajo $F(-p/2,0)$: $\mathbf{(y-y_0)^2=-2p(x-x_0)}$

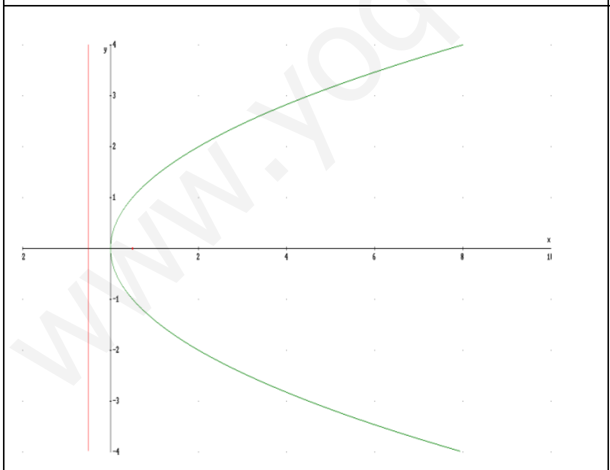
Ejemplo p=1



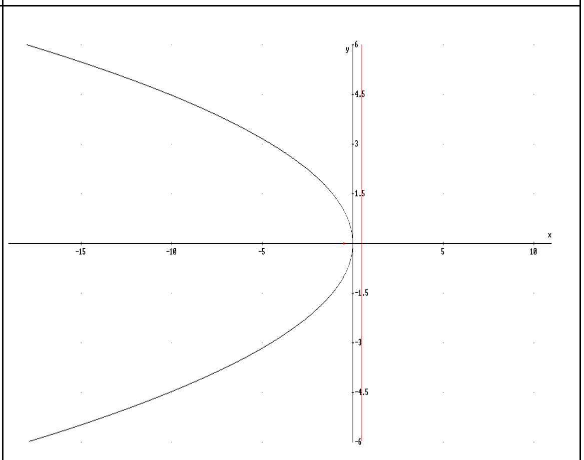
$2y=x^2$



$-2y=x^2$



$2x=y^2$



$-2x=y^2$

Ecuación desarrollado los cuadrados: La ecuación de la parábola se distingue de las demás cónicas porque sólo aparece o bien x^2 o y^2. Los pasos son semejantes a los realizados para la hipérbola y la elipse.

1) Agrupar y^2 con y (si hay y^2) o x^2 con x (si hay x^2) como cuadrado perfecto.

2) Despejar el factor que hemos agrupado

3) Sacar factor común a x (si hemos despejado x) o a y (si hemos despejado x).

Ejemplo: $x^2+4x+6y-2=0$

1) $(x^2+4x)+6y-2=0 \rightarrow (x+2)^2-4+6y-2=0 \rightarrow (x+2)^2-6+6y=0$

2) $(x+2)^2=6-6y$

3) $(x+2)^2=-6(y-1)$. Vértice V(-2,1), p=-3. Directriz: y=3/2+1=5/2, F(-2,1-3/2)=(-2,-1/2)

Ejercicio 16: Hallar la ecuación de la cónica siguiente y los elementos de la misma: $2y-x^2-6x=0$

Es una parábola pues no tiene el término y^2

1) $-(x^2+6x)+2y=0 \rightarrow -(x+3)^2+9+2y=0$

2) $(x+3)^2=2y+9$

3) $(x+3)^2=2(y+9/2)$

V(-3,-9/2)

p=1

directriz: y=-9/2-1/2=-5

Foco F(-3,-9/2+1/2)=(-3,-4)

Ejercicio 17: Hallar el lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto (5,4) y la recta x+1=0

Se trata de una parábola, cuya directriz es x=-1 (paralela al eje OY) y el foco F(5,4). La distancia entre la directriz y el foco es p=6.

El vértice estará a distancia 3 de la directriz y del vértice. V(2,4)

Ecuación: $(y-4)^2=+12(x-2)$

El signo + es debido a que el vértice a la derecha de la directriz.

Ejercicio 18: Hallar el lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto (0,2) y la recta x-y=0.

Se trata de una parábola, pero ahora la directriz no es paralela a ninguno de los dos ejes. Tendremos que aplicar la definición, sabiendo que la directriz es x-y=0 y F(0,2)

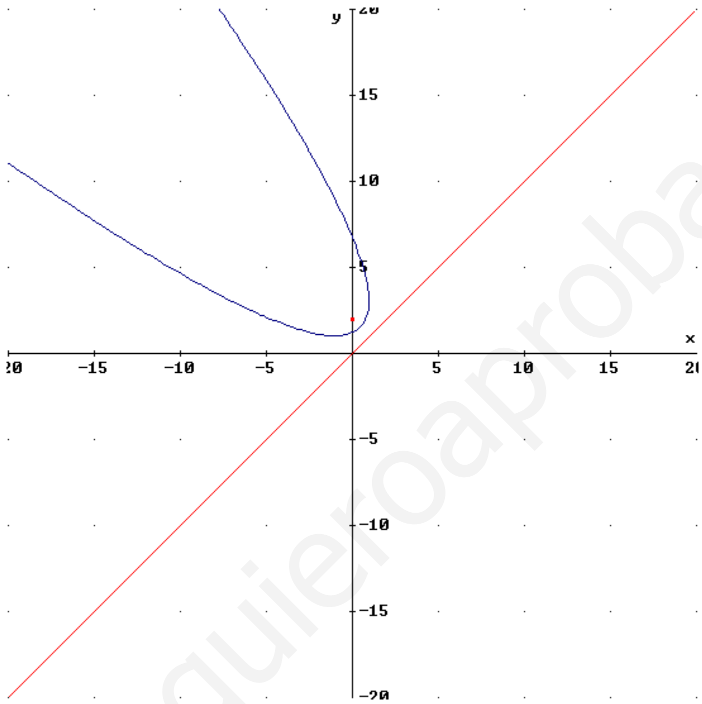
$$d(P(x,y),r:x-y=0)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

d(P(x,y),F(2,2))=$\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}$

$\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}=\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$ → 2·[(x-0)^2+(y-2)^2]=x^2+y^2-2yx →

2x^2+2y^2-8y+8=x^2+y^2-2yx → x^2+y^2-8y+2xy+8=0



Ejercicio 19: Halla la ecuación de la parábola que cumple

a) F(3,0) y directriz x=-7

b) V(2,3) y directriz x=4

c) Vértice (3,1) y F(5,1)

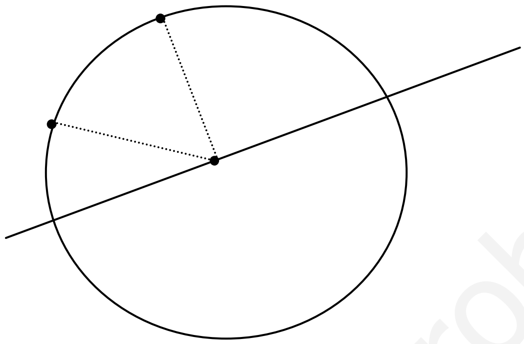
a) d(F,d)=10=p. Vértice V(3-5,0)=(-2,0). Como F a la derecha de la directriz: (y-0)^2=20(x+2)

b) d(V,d)=2=p/2 → p=4 . Como V a la izquierda de la directriz → (y-3)^2=-8(x-2)

c) d(V,F)=2=p/2 → p=4. Como vértice debajo del foco → (x-3)^2=8(y-1)

Ejercicios finales

Ejercicio 20. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por A(-1,0) y B(2,1) y cuyo centro se encuentra en la recta 2x-y-3=0



Se cumple que la distancia de los puntos A y B al centro (situado en la circunferencia) es el mismo. Apliquemos esa condición.

Los puntos de la recta cumplen, despejando "y" de la misma P(x,2x-3), por tanto:

d(A,P)=d(B,P) → $\sqrt{(x+1)^2+(2x-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(2x-3-1)^2} \rightarrow$

$x^2+2x+1+4x^2-12x+9=x^2-4x+4+4x^2-16x+16$ → 10x=10 → x=1 → y=-1

C(1,-1)

Para ver el radio sólo tenemos que ver la distancia, es decir sustituir x en una de las dos raíces: d(A,P)=$\sqrt{5}$

Luego la ecuación de la circunferencia: c: $(x-1)^2+(y+1)^2=5$

Ejercicio 21. Identifica las siguientes cónicas, indicando sus parámetros representativos.

a) $6y-x^2-4x=2$

b) $-2x^2-2y^2=-8x$

c) $-x^2+y^2=2x+4$

d) $x^2+4y^2=4y+10$

e) $xy+x+y-1=0$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

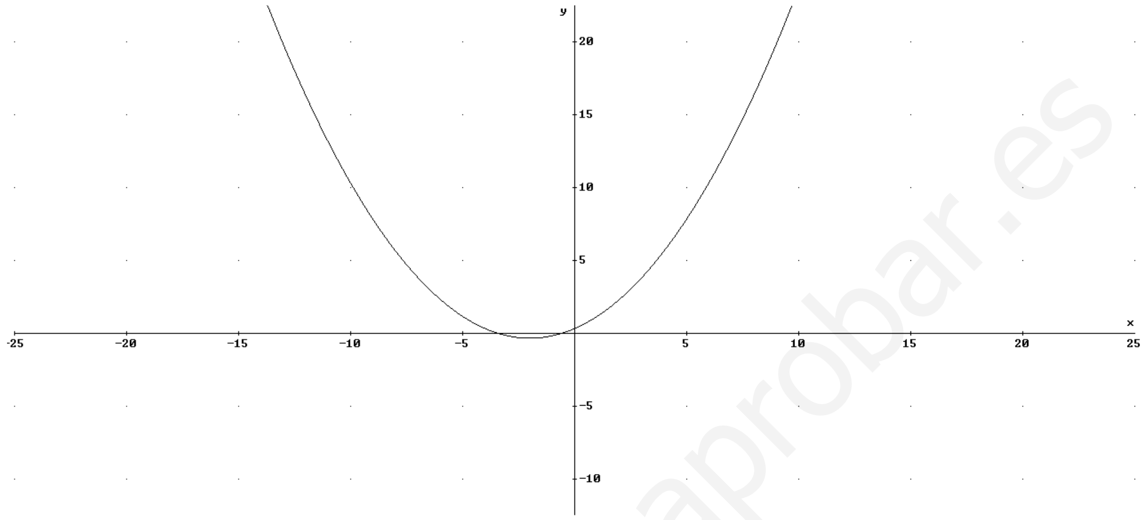
a) Es una parábola, pues no hay término y^2. Veamos la ecuación de dicha parábola:

paso 1)$-(x^2+4x)+6y-2=0 \rightarrow -(x+2)^2+4+6y-2=0$

paso 2) $(x+2)^2=6y+2$

paso 3) $(x+2)^2=6(y+1/3) \rightarrow$ V(-2,-1/3) p=3

Tenemos la parábola



Foco → F(-2,-1/3+3/2)=(-2,7/6)

Directriz→ d: y=-1/3-3/2=-11/6

b) $-2x^2-2y^2=-8x$, es una circunferencia pues los coeficientes de x^2 e y^2 los mismos y de mismo signo. Reescribiendo la ecuación $x^2+y^2-4x=0$

$x_0=-A/2=-4/-2=2$

$y_0=-B/2=0$

Centro O(2,0)

$r=\sqrt{x_0^2+y_0^2-C}=\sqrt{4+0-0}=2$

c: $(x-2)^2+y^2=2^2$

c) $-x^2+y^2=2x+1 \rightarrow$ es una hipérbola equilátera pues x^2e y^2 distinto signo y además de mismo módulo.

Paso1) $y^2-(x^2+2x)=4 \rightarrow y^2-(x+1)^2+1=4$

Paso 2) $y^2-(x+1)^2=3$

Paso3) $\frac{y^2}{3}-\frac{(x+1)^2}{3}=1$

$a=b=\sqrt{3}$. $c=\sqrt{3+3}=\sqrt{6}$. $\rightarrow e=\sqrt{2}$

d) $x^2+4y^2=4y+10$ → elipse pues los coeficientes de x^2 e y^2 son de mismo signo pero distintos.

Paso1) $x^2+4(y^2-y)=10$ → $x^2+4(y-1/2)^2-1=10$

Paso2) $x^2+4(y-1/2)^2=11$

Paso 3) $\frac{x^2}{11}+\frac{(y-1/2)^2}{11/4}=1$

$a=\sqrt{11}$, $b=\sqrt{11}/2$ → $c=\sqrt{33}/2$ → $e=\sqrt{3}/2$

Ejercicio 22. Calcular la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de las distancias a los puntos F(0,0) y F'(3,3) es constante igual a 10.

Según la definición se trata de una elipse donde F y F' son los focos y 10 es el eje mayor

$2a=10$ → $a=5$

$2c=d(F,F')=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}$

Llamemos P(x,y) al conjunto de puntos de la elipse, que cumplen d(P,F)+d(P,F')=2a

$$d(F,P)=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$d(F',P)=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=10 \rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=10-\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$$

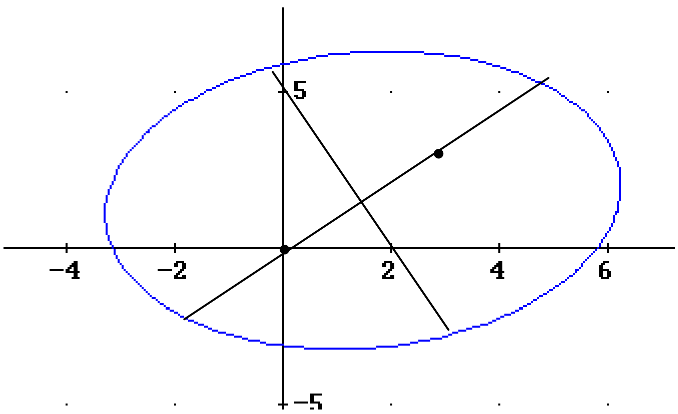
$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=\left(10-\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}\right)^2 \rightarrow x^2+y^2=100+(x-3)^2+(y-3)^2-20\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$$

$$x^2+y^2=100+x^2-6x+9+y^2-6y+9-20\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2} \rightarrow$$

$$20\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=118-6x-6y \rightarrow \left(10\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}\right)^2=(59-3x-3y)^2 \rightarrow$$

$$100(x^2-6x+9+y^2-6y+9)=9x^2+18xy-354x+9y^2-354y+3481 \rightarrow$$

$$91x^2+91y^2-18xy-246x-246y-1681=0$$



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio 23. Calcular la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de las distancias a los puntos F(0,0) y F'(3,3) es constante igual a 2.

Se trata de una hipérbola en donde 2a=2, y c=$d(F,F')=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

Calculemos la ecuación de la hipérbola aplicando que la diferencia entre las distancias de los puntos P(x,y) de la hipérbola cumple:

$$|d(P,F)-d(P,F')|=2$$

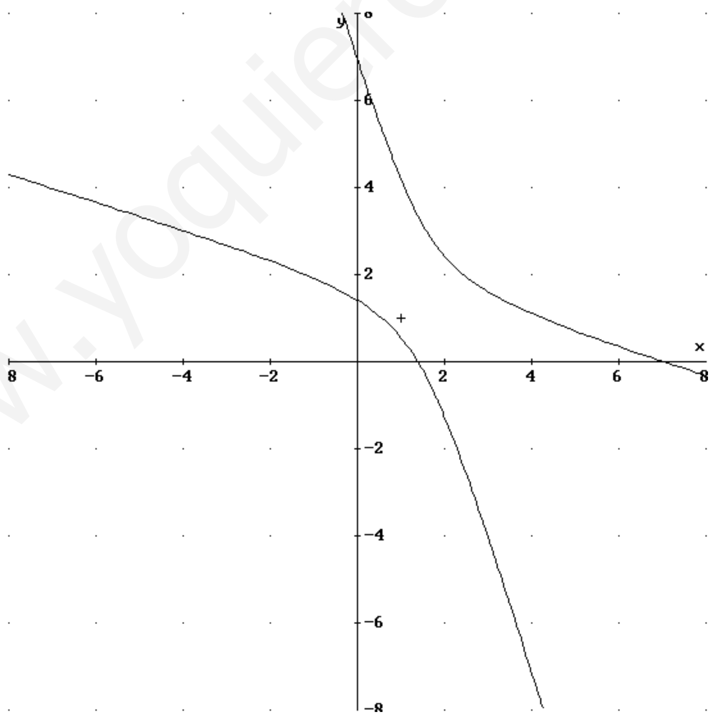
$$d(F,P)=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$d(F',P)=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$$

$$d(F,P)-d(F',P)=\left|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}\right|=2$$

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=\left(2+\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}\right)^2 \rightarrow x^2+y^2=4+(x-3)^2+(y-3)^2+4\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$$
$$x^2+y^2=4+x^2-6x+9+y^2-6y+9+4\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2} \rightarrow 6x+6y-22=4\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$$

$$(6x+6y-22)^2=16\left((x-3)^2+(y-3)^2\right)\rightarrow$$
$$36x^2+36y^2+72xy-264x-264y+484=16x^2+16y^2-96x-96y+288$$
$$20x^2+20y^2+72xy-168x-168y+196=0$$



Tema 9. Propiedades globales de las funciones

1. Definición y formas de definir una función

1.1. Definición de función

Hemos oído hablar mucho de funciones, pero ¿sabemos bien que son las funciones?.¿y para que se utilizan?. De esto trataremos este tema y el siguiente

Definición: una función f, es una correspondencia o aplicación entre un subconjunto de números reales ($D \in R$) y los números reales (R), de forma que a cada elemento "x", $x \in D$ le corresponde **un único** valor "y".

Veamos esquemáticamente la definición:

$$f: \ D \rightarrow R$$
$$x \rightarrow y=f(x)$$

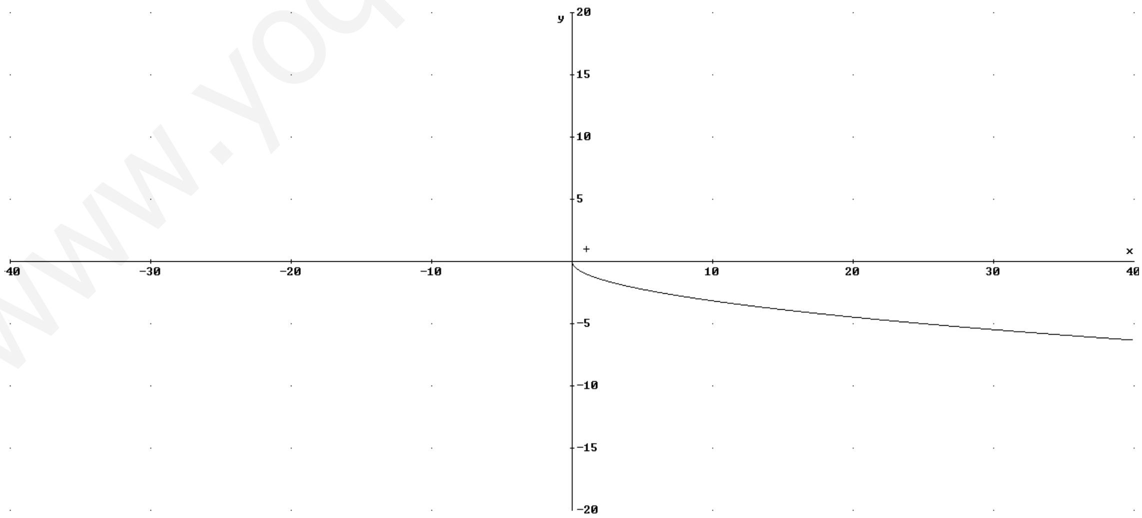
Elementos de una función:

- Variable independiente: es la variable x
- Variable dependiente: es la variable y, se llama así porque su valor depende de x.
- Dominio de una función, se denomina Dom(f) y está formado por aquellos valores de x (números reales) para los que existe la función.
- Imagen o recorrido de la función: se designa Im(f), a todos los valores de la variable dependiente (y).

Ejemplo: $y=f(x)=-\sqrt{x}$

$Dom(f(x))=[0,\infty)$, ya que la raíz sólo existe cuando el radical es positivo

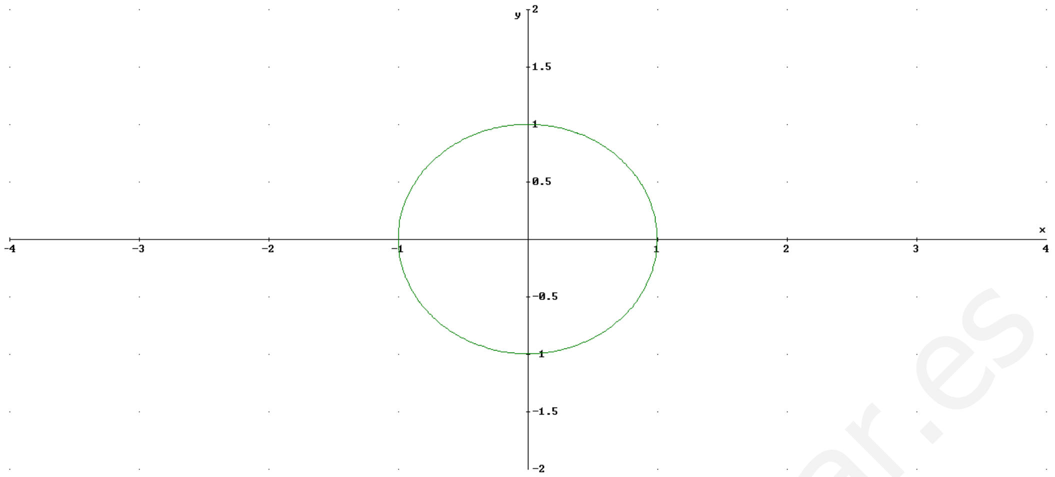
$Im(f(x))=(-\infty,0]$, que son los valores que toma la y:



Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

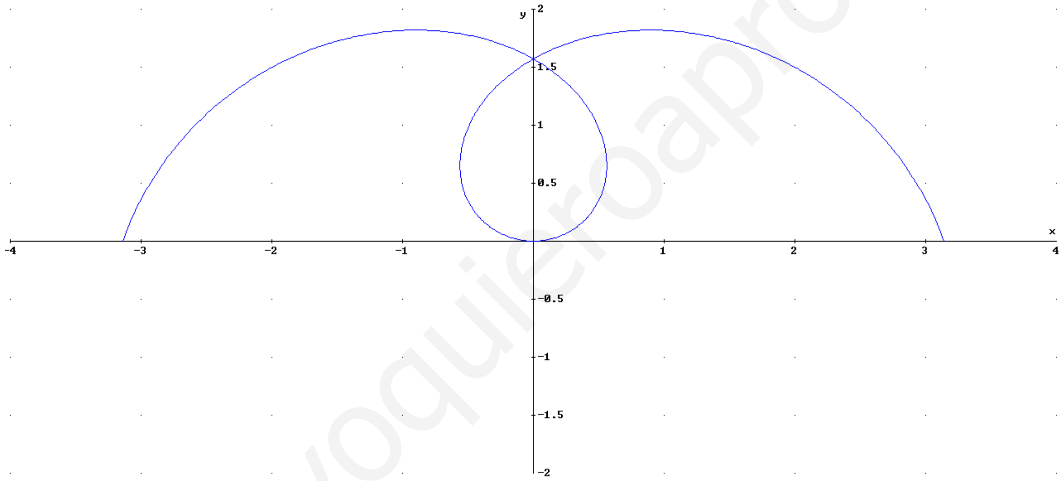
Ejercicio 1: identificar funciones de las que no son

a)



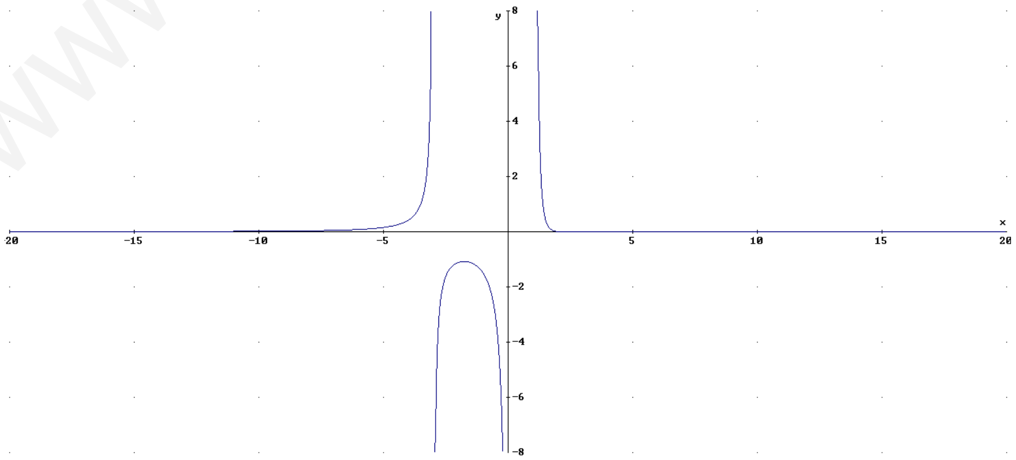
No es una función porque para un mismo valor de x toma dos valores de y.

b)



No es una función porque para algún valor de x toma dos y tres valores de y.

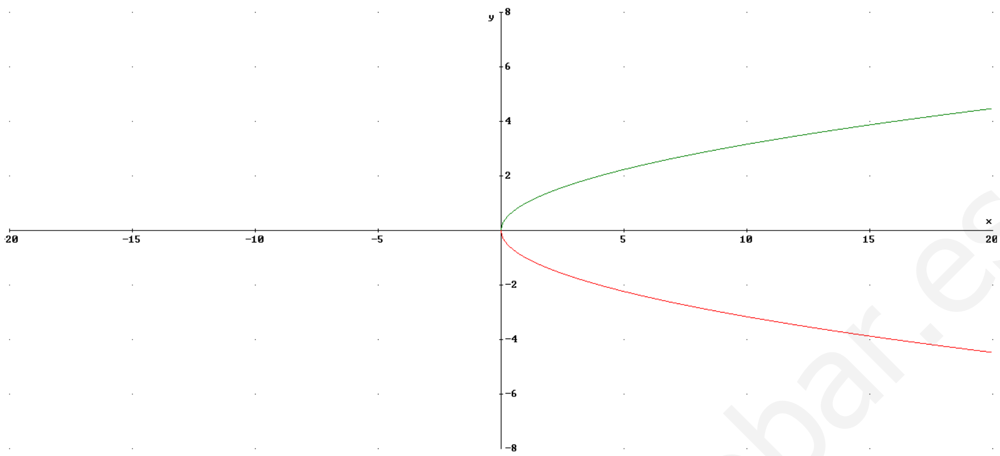
c)



Si es función, pues a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

d) $x=y^2 \rightarrow$ No es una función, porque para cada valor de x le corresponde dos de y, por ejemplo si $x=4 \rightarrow y=2, y=-2$. Si despejamos la y tenemos dos funciones:

$y=-\sqrt{x}$; $y=\sqrt{x}$



1.2. Formas de definir la función:

1.2.1. A partir de una representación gráfica

La representación gráfica nos muestra la relación entre las variables "x" e "y" en los ejes de coordenadas cartesianos, así la gráfica es el conjunto de todos los puntos (x,y=f(x)).

Es una forma muy intuitiva de conocer el comportamiento de la función, veamos un ejemplo, donde x=año, y=precio/m^2

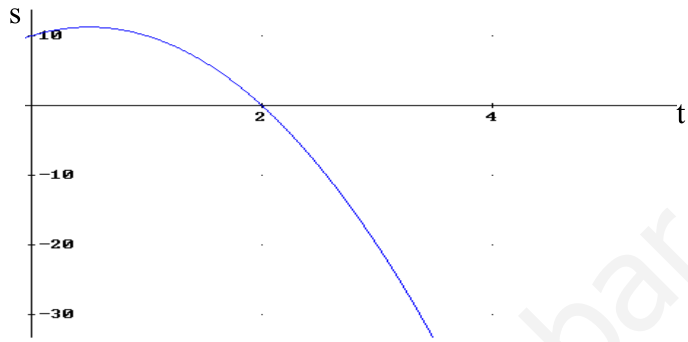
1.2.2. A partir de expresión analítica

Es otra forma de conocer una función: es la relación matemática entre las dos variables en la que la variable dependiente (y) está despejada. No siempre es posible de obtener la expresión analítica de una función, por ejemplo la vista en el apartado anterior. La expresión analítica suelen utilizarse en física, química, economía, etc.

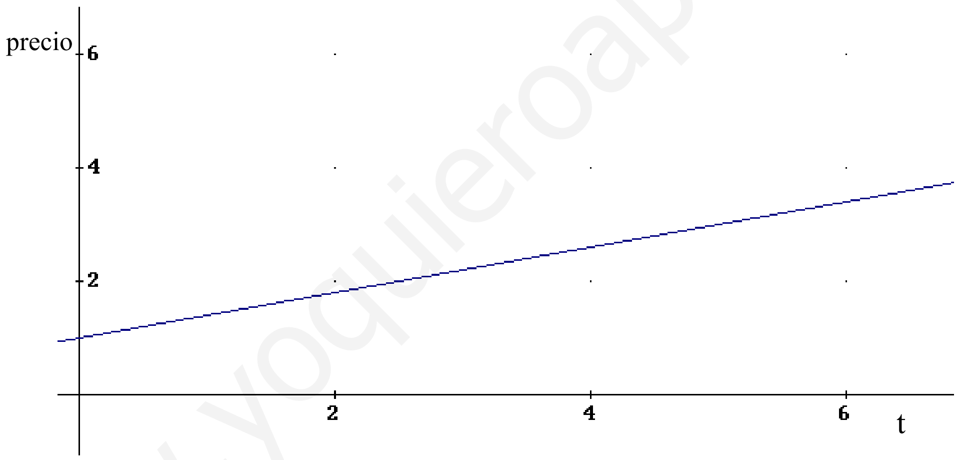
A partir de la expresión analítica es posible de obtener la gráfica, no siempre es cierta la afirmación en el otro sentido.

Veamos algún ejemplo:

a) La posición en un movimiento uniformemente acelerado $s=s_0+v_0\cdot t+\frac{1}{2}at^2$. Por ejemplo si $s_0=10m$, $v_0=5m/s$, $a=-10m/s^2 \rightarrow s=10+5t-5t^2$. Tendremos que la variable independiente es el tiempo (t) y la dependiente el espacio (s):



b) Factura del taxi: 1€por bajar la bandera y 0,4€/min$\rightarrow$ $p=1+0,4\cdot t$. Donde la variable independiente es el tiempo y la dependiente el precio



1.2.3. Mediante tabla de valores:

Aunque no es la forma deseada de conocer una función, a veces esta viene dada por tabla de valores, que son un conjunto de pares de valores (x,y) de la función.

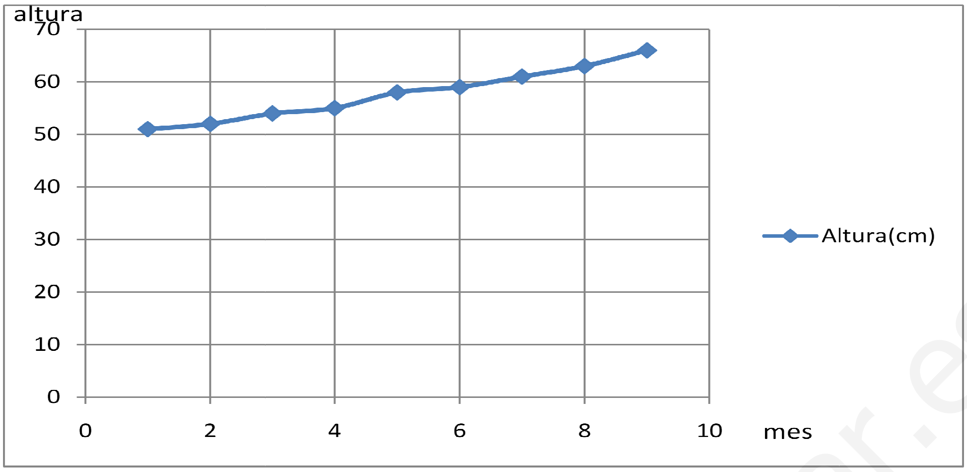
Ejemplo: La siguiente tabla de valores muestra la evolución del crecimiento de un bebé durante los primeros meses de vida.

Meses	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Altura(cm)	51	52	54	55	58	59	61	63	66

Decimos que no es la mejor forma de conocer la función pues ¿Qué altura tendrá cuando ha pasado 8 meses y medio?.

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Se puede obtener una gráfica aproximada uniendo los puntos, aunque hay infinitas formas de unir estos puntos, se suelen unir por rectas:



1.2.4. Calculo del dominio de una función

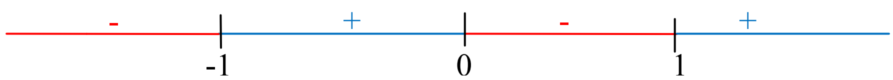
Gráficamente se ve claramente el dominio, ya que son los valores de x que toma la función. Veamos el domino a partir de la expresión analítica. Recordemos que el dominio son los valores de x donde existe la función. En las funciones para estudiar el dominio tenemos que ver los siguientes casos:

a) *Funciones con denominadores*: los valores de x que anulan el denominador no pertenecen al dominio (no se puede dividir entre cero)

   Ejemplo: y=f(x)=$\frac{2x^2}{x^2-1}$ → veamos los valores de x que anulan el denominador: $x^2-1=0$ → x=± 1. Luego el dominio serán todos los reales menos ± 1
   Dom(f(x))=R-{-1,1}=(-∞,-1)∪(−1,1)∪(1,∞)

b) *Raíces de índice par:* el radicando debe de ser siempre positivo o cero, pues no existen las raíces con índice par con radicando negativo (por ejemplo y= $\sqrt{-2}$). Para estudiar el dominio tenemos que resolver una inecuación:

   Ejemplo: y=g(x)=$\sqrt{x^3-x}$:
   $(x^3-x)\geq 0$ → $x\cdot(x+1)\cdot(x-1)\geq 0$



   Dom(g(x))=[-1,0]∪[1,∞)

c) *Logaritmos:* el argumento debe de ser positivo, ya que no hay ninguna potencia tal que un número positivo elevado a este sea negativo o cero. Al igual que con las raíces hay que resolver una inecuación.
   Ejemplo: y=h(x)=log(x+3)

   x+3>0 → x>-3 → Dom(h(x))=(-3,∞)

Ejercicio 2: estudiar el dominio de las siguientes funciones:

a) y=f(x)= $\sqrt{\frac{x\cdot(x-1)}{x+2}}$

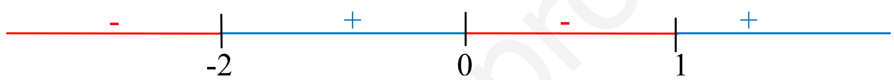
b) y=g(x)=log$\left(\frac{x}{x-1}\right)$

c) y=h(x)= $\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x-3}}$

d) y=i(x) $\begin{cases} x^2 & x<3 \\ -x+2 & 5<x\leq 10 \\ x^2+1 & x>10 \end{cases}$

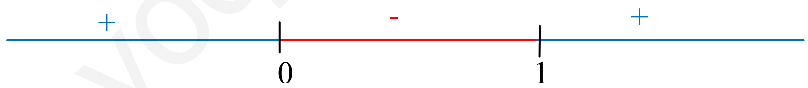
Solución

a) Se tiene que cumplir:
- $x+2\neq 0 \rightarrow -2\notin$ dom(f(x))
- $\frac{x\cdot(x-1)}{x+2}\geq 0$



Dom(f(x))=(-2,0]∪[1,∞)

b) Se tiene que cumplir:
- $x-1\neq 0 \rightarrow 1\notin$ dom(f(x))
- $\frac{x}{x-1}>0$

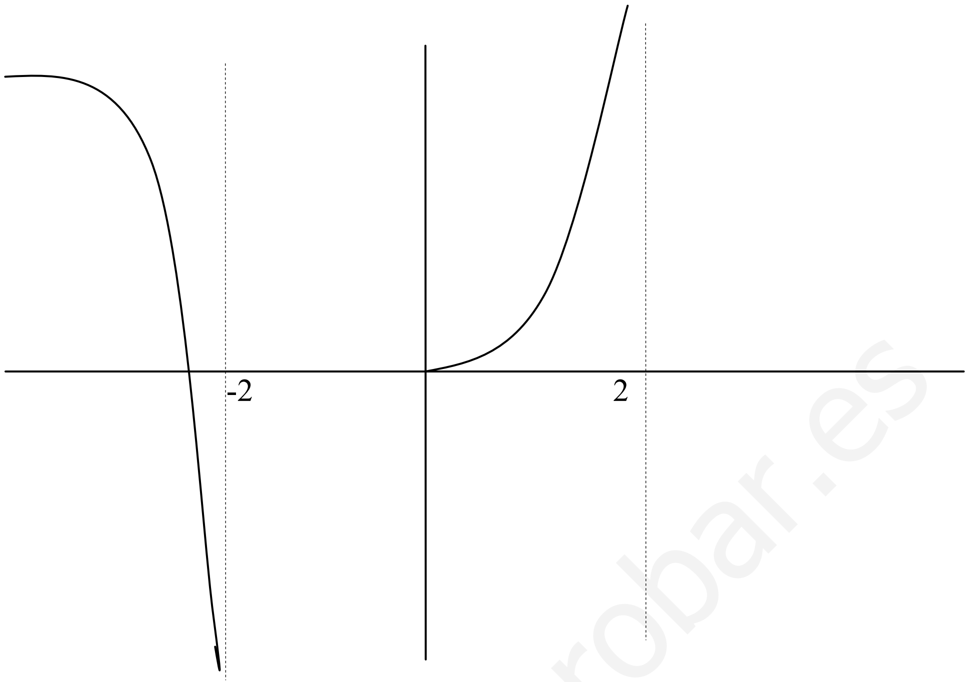


Dom(g(x))=(-∞,0)∪(1,∞)

c) Es una raíz impar luego lo único que se tiene que cumplir es:
- $x-3\neq 0 \rightarrow$ dom(h(x))=R-{3}

d) La función no definida en [3,5] luego el dominio es:
Dom(i(x))=(-∞,3)∪(5,∞)

Ejercicio 3: Estudiar dominio de la función definida por la siguiente gráfica:



$Dom(f(x))=(-\infty,-2)\cup[0,2)$

2. Continuidad y discontinuidad de una función

Definición de continuidad: una función se dice continua en un punto cuando una pequeña variación de la variable independiente (x supone una pequeña variación de la variable dependiente (y). Gráficamente ocurre cuando al trazar la gráfica de la función "no levantamos el bolígrafo del papel". En el tema 11 veremos una definición más precisa de la continuidad.

***Definición de discontinuidad**:* cuando una función no es continua en un punto entonces es discontinua en ese punto.

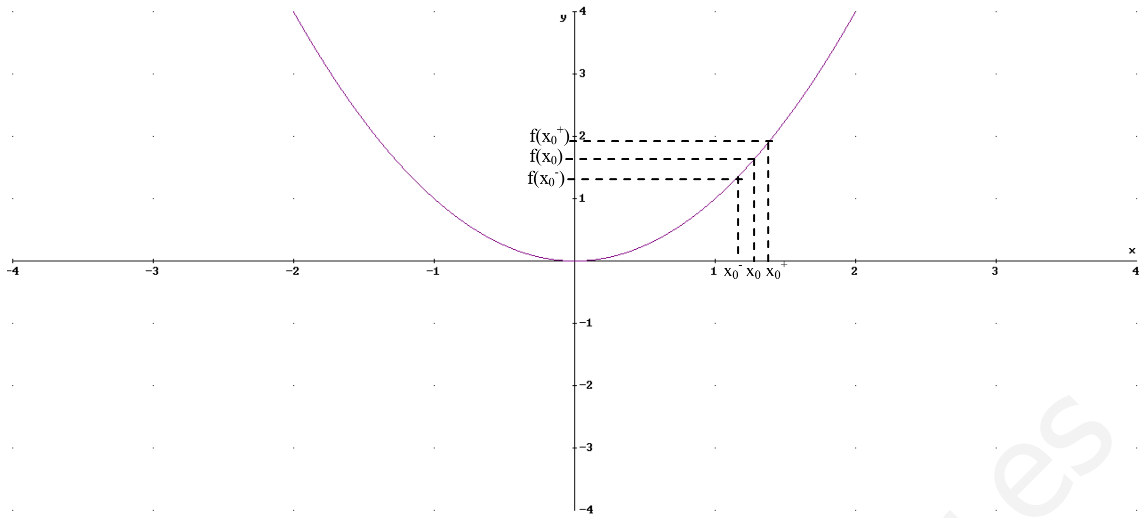
3. Monotonía: crecimiento y decrecimiento, puntos relativos

3.1 Monotonía: crecimiento y decrecimiento

Estudiar la monotonía de una función consiste en ver en los puntos del dominio donde esta función crece o decrece. Veamos matemáticamente cuando una función crece o decrece en un punto y en un intervalo:

Definición: una función f(x) es ***creciente*** en un punto x_0 si se cumple:

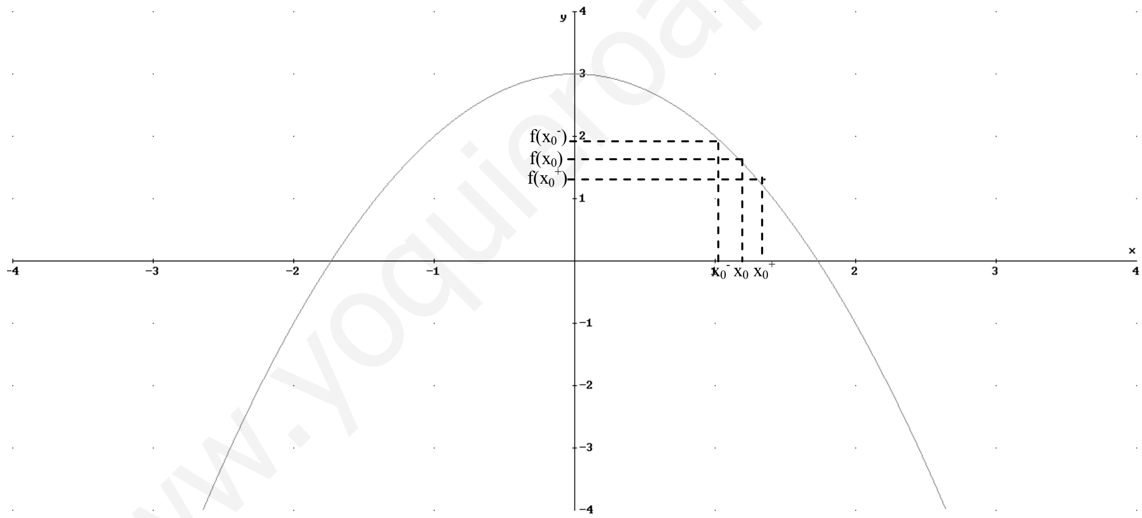
- El valor de la función infinitamente próximo y menor de x_0 cumple: $f(x_0)>f(x_0^-)$
- El valor de la función infinitamente próximo y mayor de x_0 cumple: $f(x_0)<f(x_0^+)$



Definición: una función es creciente en un intervalo (a,b) si se cumple que es creciente en todos los puntos del intervalo, tal que para todo $x_1,x_2\in(a,b)$ tal que $x_1<x_2 \rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Definición: una función f(x) es ***decreciente*** en un punto x_0 si se cumple:

- El valor de la función infinitamente próximo y menor de x_0 cumple: $f(x_0)<f(x_0^-)$
- El valor de la función infinitamente próximo y mayor de x_0 cumple: $f(x_0)>f(x_0^+)$



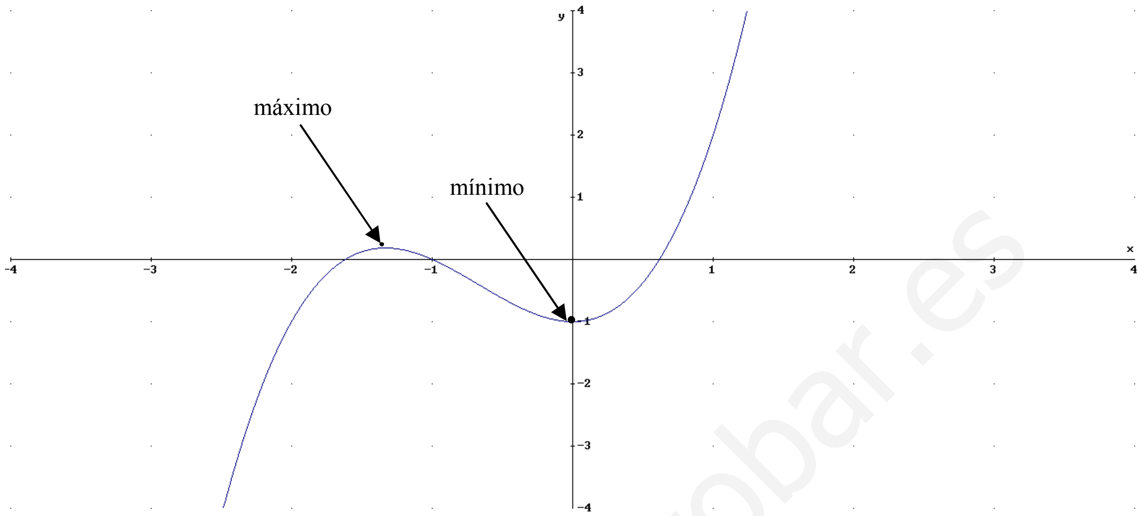
Definición: una función es decreciente en un intervalo (a,b) si se cumple que es decreciente en todos los puntos del intervalo, tal que para todo $x_1,x_2\in(a,b)$ tal que $x_1<x_2 \rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

3.2 Puntos relativos

Definición: un punto relativo a f(x) es un punto perteneciente a la función en donde dicha función ni crece ni decrece, puede ser de dos tipos:

a) ***Máximo relativo***: en un entorno próximo al punto por la izquierda la función crece y en un entorno por la derecha la función decrece:
$f(x_0)>f(x_0^-)$ y $f(x_0)>f(x_0^+)$

b) ***Mínimo relativo:*** en un entorno próximo al punto por la izquierda la función decrece y en un entorno por la derecha la función crece
$f(x_0)<f(x_0^-)$ y $f(x_0)<f(x_0^+)$



Ejemplo: estudiar ayudándote de la calculadora si en los puntos x=-3,-2,-1,0 la función $f(x)= 3x^4+4x^3-12x^2$ es creciente, decreciente, máximo mínimo relativo

a) x=-3 → f(-3)=27;
$f(-3^-)$=f(3,001)=27,14
$f(-3^+)$=f(-2.99)=25,57
$f(-3^+)<f(-3)<f(-3^-)$→ en x= -3 la función decrece

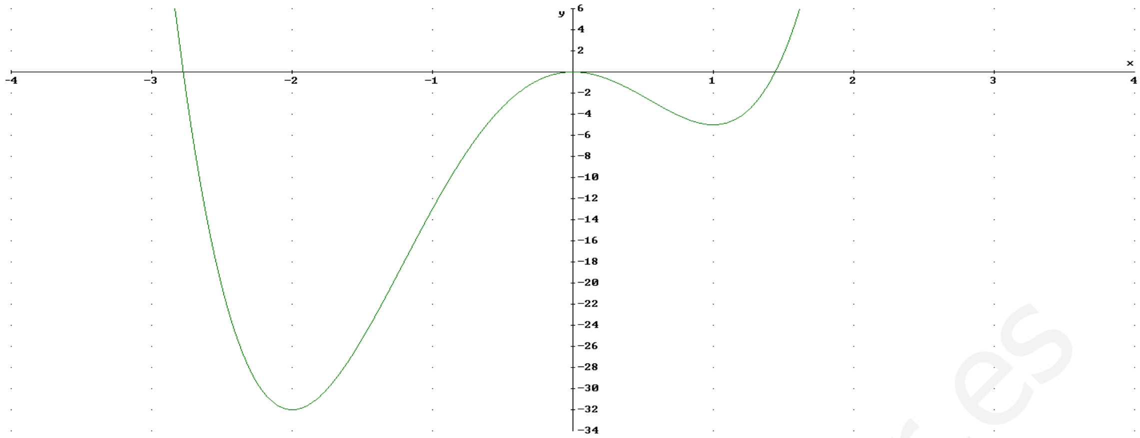
b) x=-2→ f(-2)=-32
$f(-2^-)$=f(-2,001)=-31.99
$f(-2^+)$=f(-1.99)=-31.99
$f(-2^+)>f(-2)$ y $f(2^-)>f(-2)$→ en x=-2 mínimo relativo m(-2,-32)

c) x=-1 → f(-1)=-13
$f(-1^-)$=f(-1,001)=-13.02
$f(-1^+)$=f(-0.99)=-12.76
$f(-1^+)>f(-1)>f(-1^-)$→ en x=-1 la función crece

d) x=0→ f(0)=0
$f(0^-)$=f(-0,001)=$-1.2\cdot10^{-5}$
$f(0^+)$=f(0.001)= $-1.2\cdot10^{-5}$
$f(0^+)<f(0)$ y $f(0^-)<f(0)$→ en x=0 Máximo relativo M(0,0)

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio 3**:** estudiar la monotonía y los puntos relativos de la función $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2$ cuya gráfica es:



Creciente: $(-2,0)\cup(1,\infty)$

Decreciente: $(-\infty,-2)\cup(0,1)$

Puntos relativos:

- Máximos: M(0,0)
- Mínimos: $m_1(-2,f(-2))=(-2,-32)$, $m_2(1,f(1))=(1,-5)$

4. Curvatura de una función, concavidad, convexidad y punto de inflexión.

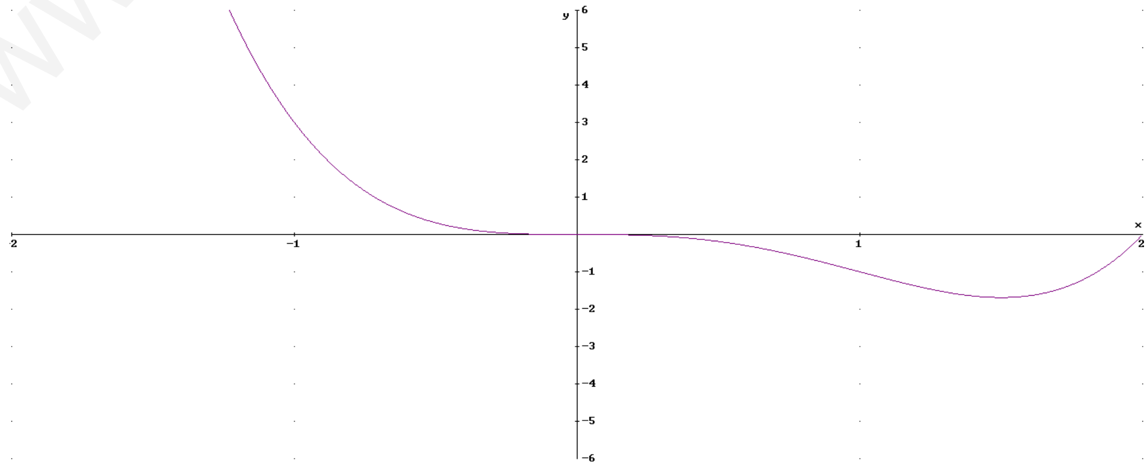
La curvatura se centra en el estudio de la forma de la función, así en un punto puede ocurrir que la función sea:

- ***Concava:*** si dibujamos la recta tangente en el punto se cumple que la recta por debajo de la función. Tiene forma de $\cup$

- ***Convexa:*** si dibujamos la recta tangente en el punto se cumple que la recta por encima de la función. Tiene forma de $\cap$

- ***Punto de Inflexión:*** cuando pasa de cóncava a convexa o al revés.

Ejemplo: estudiar la curvatura de la siguiente función $f(x)=x^4-2x^3$



Concavidad: $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$
Convexidad: $(0,1)$
Puntos de inflexión: $P_1(0,0)$, $P_2(1,-1)$

5. Simetría y Periodicidad

5.1 Simetría

La simetría de una función se refiere al comportamiento de la función con respecto al origen y al eje OY. Atendiendo a esto tenemos que la función puede ser:

a) ***Simétrica par o respecto el eje OY***: la función se comporta igual a la izquierda y derecha del eje OY, es como si este fuera un espejo. Se cumple $f(x)=f(-x)$
b) ***Simetría impar o respecto del origen:*** la parte izquierda del eje OY de la gráfica es equivalente al de la derecha pero cambiando de signo. Se cumple $-f(x)=f(-x)$
c) ***No simétrica*** cuando no es par ni impar:

Ejemplo: estudiar la simetría de las siguientes funciones

a) $f(x)=x^2-4$

b) $g(x)=x^3-x$

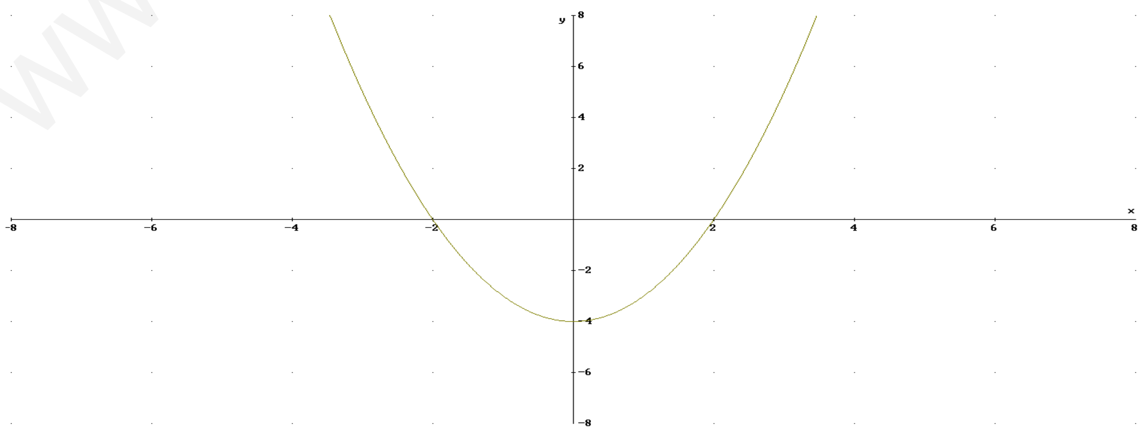
c) $h(x)=x^2-6x+3$

a) $f(-x)=(-x)^2-4=x^2-4=f(x)\rightarrow$ simetría par o respecto eje OY

b) $g(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x=-g(x)\rightarrow$simetría impar o respecto el origen

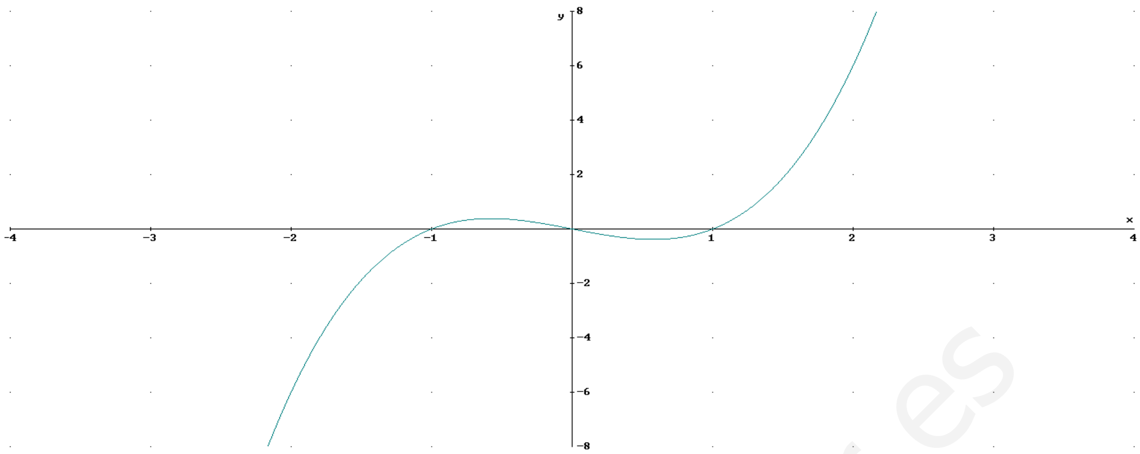
c) $h(x)=(-x)^2-6(-x)+3=x^2+6x+3\neq h(x)$ y $h(-x)\neq h(x)$

a)

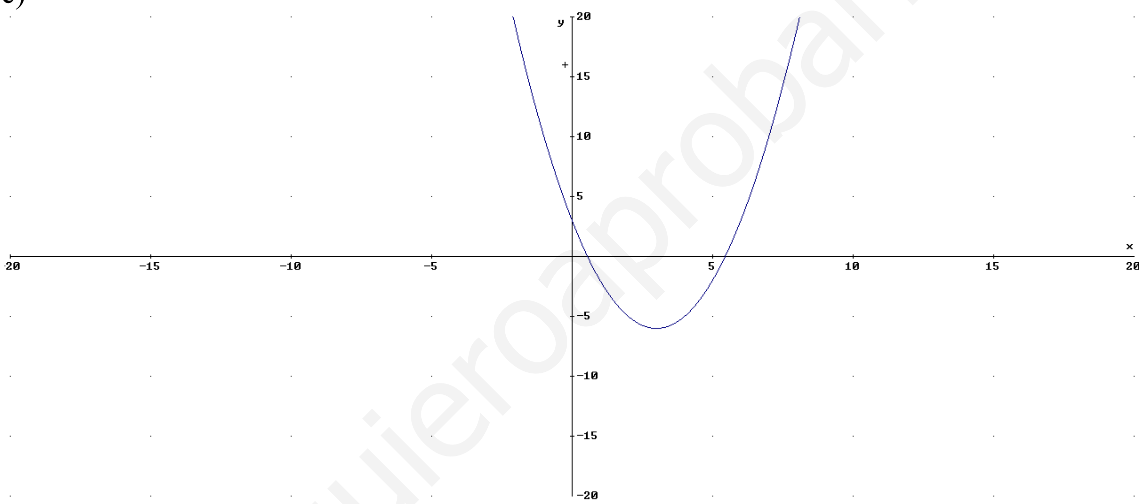


 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

b)



c)



***Ejercicio 4*: Decir si las siguientes funciones son simétricas o no, en caso afirmativo indica el tipo de simetría:**

a) $f(x)=\frac{x^3-3x}{2x^2-1}$
b) $f(x)=\frac{x^3-3x}{2x^5-x}$
c) $f(x)=\frac{2x^4-3}{2x^2+3}$
d) $f(x)=\frac{x^3-3}{2x^2-1}$

a) $f(-x)=\frac{(-x)^3-3(-x)}{2(-x)^2-1}=\frac{-(x^3-3x)}{2x^2-1}=-f(x)$ → Simetría Impar

b) $f(-x)=\frac{-(x^3-3x)}{-(2x^5-x)}=f(x)$ → Simetría Par

c) $f(-x)=\frac{+(2x^4-3)}{+(2x^2+3)}=f(x)$ → Simetría Par

d) $f(-x)=\frac{-x^3-3}{2x^2-1}\neq\begin{matrix}f(x)\\-f(x)\end{matrix}$ → No simetría

Conclusión funciones racionales:

a) Si numerador y denominador los dos simétricos con misma simetría, la función tiene simetría par

b) Si numerador y denominador los dos simétricos con distinta simetría, la función tiene simetría impar.

c) Si o bien numerador o bien denominador no simétricos la función no tiene simetría.

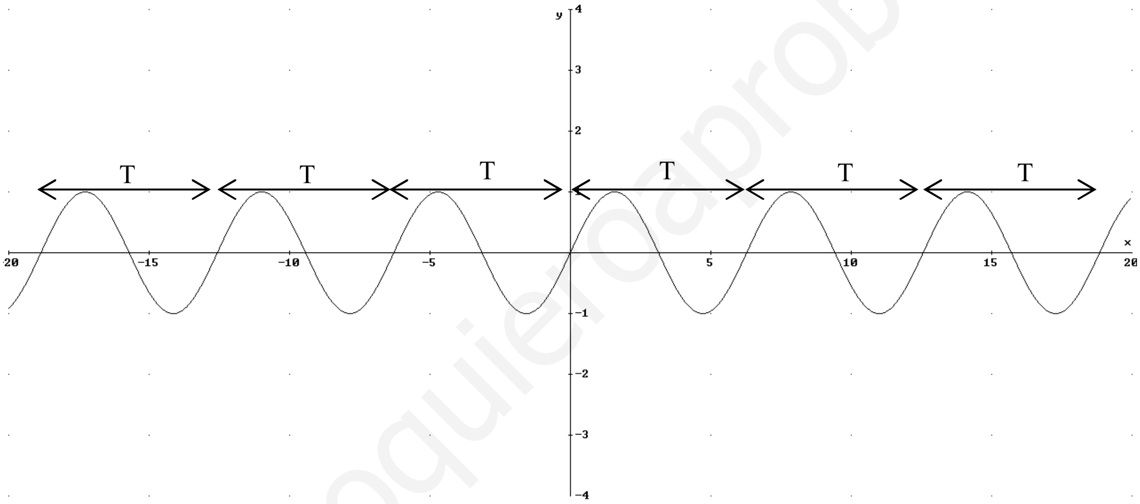
5.2 Periodicidad

Definición: una función f(x) es periódica cuando su comportamiento se repite cada vez que la x aumenta o disminuye un cierto intervalo. El mínimo intervalo en el que se repite la función se llama periodo (T).

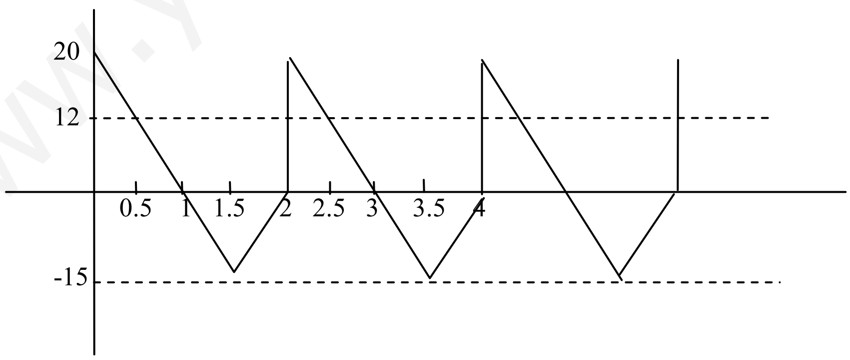
Matemáticamente: $f(x+n\cdot T)=f(x)$ con $n\in N$

Ejemplo: $f(x)=sen(x)$ (en radianes) → $f(x)=f(x+n\cdot 2\pi)$

$T=2\cdot\pi$



Ejercicio 5: *calcular el periodo y el valor de la función cuando x=17, 40.5,69.5*



a) El periodo es T=2s

b) resto(17:2)=1→17=1+2·8 → f(17)=f(1)=0

resto(40.5:2)=0,5 →40=2·20+0.5 → f(40.5)=f(0.5)= 12

resto(69.5:2)=1.5 → 69.5=1.5+2·34 → f(69.5)=f(1.5)=-15

6. Tendencias, asíntotas

Las tendencias de una función consiste en el estudio del comportamiento de la función, cuando la variable independiente (x) tiende a +∞ y -∞.

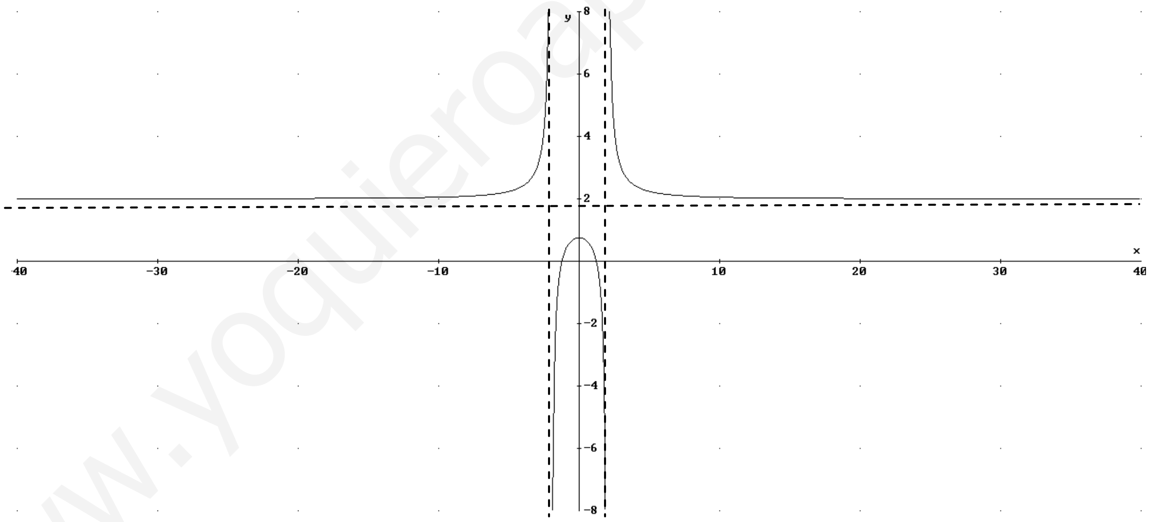
Definición: una asíntota es una recta a la que la función se acerca infinitamente sin llegar a ella. Podemos distinguir entre las siguientes asíntotas:

- ***Vertical:*** La recta es de la forma x=a, con lo que es una recta paralela al eje OY. Ocurre cuando se anula el denominador de una función
- ***Horizontal:*** la recta es de la forma y=b, con lo que la recta es paralela al eje OX. Ocurre cuando al tender a x +∞ y -∞, la función tiende al valor b.
- ***Oblicua:*** la recta es de la forma y=mx+n.

Ejemplo: Estudiar asíntotas y dibujar la gráfica de f(x)=$\dfrac{2x^2-3}{x^2-4}$

a) Asíntota vertical x=2, x=-2:
$f(2^+)=f(2{,}0001)=1{,}3\cdot 10^4$ tiende a ∞, $f(2^-)=f(1.9999)=-1{,}2\cdot 10^4$ luego tiende a-∞
$f(-2^-)=f(-2{,}0001)=1{,}3\cdot 10^4$ tiende ∞, $f(-2^+)=f(-1.9999)=1{,}2\cdot 10^4$ luego tiende -∞

b) Asíntota horizontal f(9999)≈2, f(-9999) ≈2 $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2-3}{x^2-4}=2$ → y=2



Ejercicio 6: Estudiar asíntotas y dibujar la gráfica de f(x)= $\dfrac{x^2-3}{x+1}$

Tiene asíntota vertical en **x=-1**.

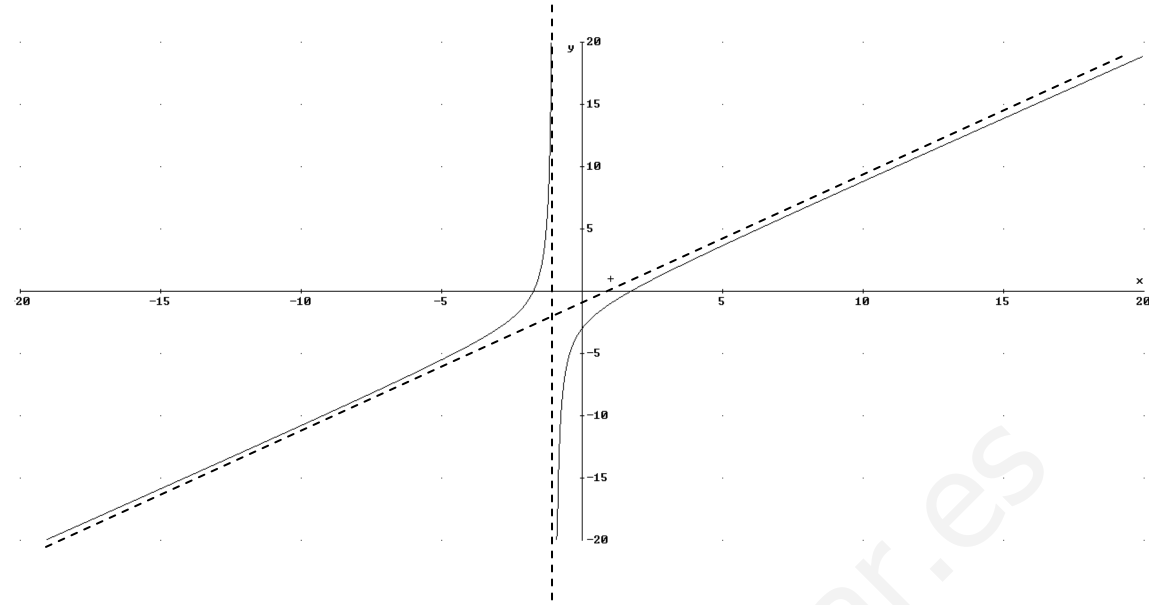
$f(-1^-)=f(-1{,}0001)=2\cdot 10^4$ tiende a ∞; $f(-1^+)=f(-0.9999)=-2\cdot 10^4$ tiende a -∞

Veamos cuando x→±∞

si x→∞ f(9999)≈9998 y si x→-∞ f(-9999) ≈-1000

La función tiende a +∞ si x→∞ y a -∞ si x→-∞. Pero viendo los resultados podemos ver que crece de forma lineal, de tal manera que a la x le hace corresponder en el límite un valor de y una unidad menor que x. Esta función tiene asíntota oblicua **y=x-1**

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)



Nota: en el tema 11 veremos una forma más matemática de calcular las asíntotas a partir de los límites.

7. Composición de funciones

Definición: sean f(x) y g(x) dos funciones reales con variable real, se llama función compuesta de f con g, y se denota como $f\circ g$, a la función definida de la siguiente forma:

$(f\circ g)(x)=f[g(x)]$

Veamos gráficamente el resultado de la composición

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & g(x) \arrow[r] & f[g(x)] \end{tikzcd}$$

La composición por lo general no cumple la propiedad conmutativa, es decir:

$(f\circ g)(x) \neq (g\circ f)(x)$

Ejemplo: sean las siguientes funciones $f(x)=x^2-2x+1$, $g(x)=sen(x)$, $h(x)=e^x$. Calcular

a) $(f\circ g)(x)$ → $(f\circ g)(x)=f[g(x)]=sen^2(x)-2\cdot sen(x)+1$
b) $(g\circ f)(x)$ → $(g\circ f)(x)=g[f(x)]=sen(x^2-2x+1)$
c) $(f\circ h)(x)$ → $(f\circ h)(x)=f[h(x)]=e^{2x}-2e^x+1$

Ejercicio 7. Calcular las siguientes composiciones (tomar f, g y h del ejemplo)

a) $(h\circ f)(x)$ → $(h\circ f)(x)=h[f(x)]=e^{x^2-2x+1}$
b) $(g\circ h)(x)$ → $(g\circ h)(x)=g[h(x)]=sen(e^x)$
c) $(h\circ g)(x)$ → $(h\circ g)(x)=h[g(x)]=e^{sen(x)}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

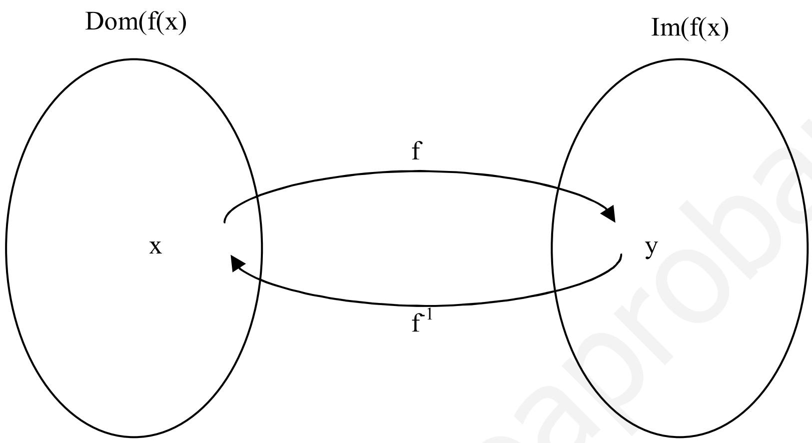
8. Función inversa

8.1 Definición de inversa

Definición: Sea una función f(x) inyectiva (para cada valor de y sólo un valor de x), la función inversa, que se denota como $f^{-1}(x)$, es una función que cumple:

$$(f\circ f^{-1})(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=i(x)=x$$

Veamos gráficamente el significado de la inversa:



Procedimiento para el cálculo de la inversa de y=f(x). Pasos

1) Cambiar y por x → x=f(y)
2) Despejar y en función de x
3) $y=f^{-1}(x)$

Ejemplo: $y=f(x)=\frac{x}{x+1}$

1) $x=\frac{y}{y+1}$
2) $x(y+1)=y$ → $y(1-x)=x$ → $y=\frac{x}{1-x}$
3) $f^{-1}(x)=\frac{x}{1-x}$

Comprobación: $(f\circ f^{-1})(x)=\frac{\frac{x}{1-x}}{1+\frac{x}{1-x}}=\frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1}{1-x}}=x$

- $f(1)=1/2$ → $f^{-1}(1/2)=1$
- $f(2)=2/3$ → $f^{-1}(2/3)=2$

Ejercicio 8. Calcular la inversa de las siguientes funciones: a) $f(x)=3x-1$, b) $g(x)=e^x$

Solución :

a) $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{3}$

b) $g^{-1}(x)=\ln(x)$

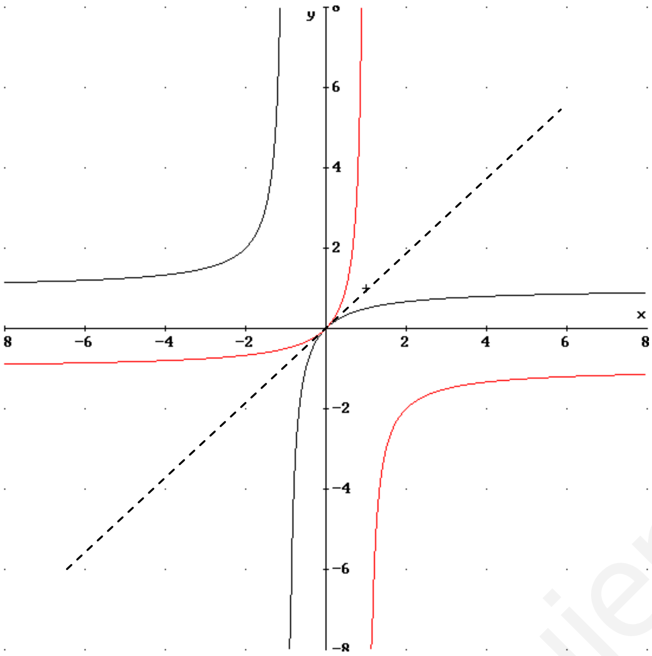
 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

8.2. Gráficas funciones inversas

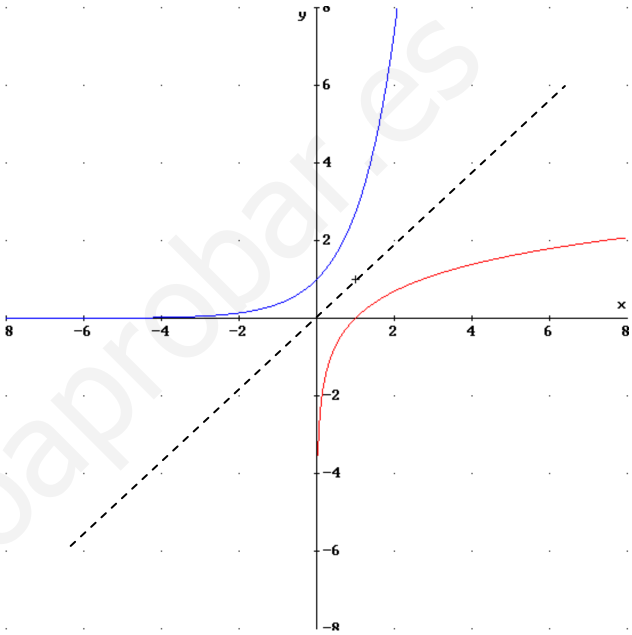
Las gráficas de toda función f(x) y de su inversa $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto a la recta y=x.

Veamos algunos ejemplos:

$f(x)=\frac{x}{x+1}$ y $f^{-1}(x)=\frac{x}{1-x}$



$g(x)=e^x$ y $g^{-1}(x)=\ln(x)$



Ejercicios finales

Ejercicio 9. Determina el dominio de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

b. $g(x) = \frac{x^3-3x}{x^2-100}$

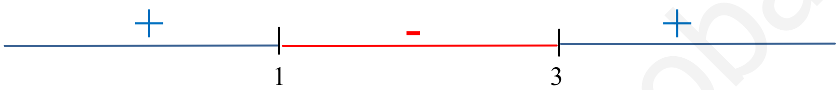
c. $h(x) = \sqrt{\frac{-2}{x^3+2x^2+x}}$

d. $i(x) = \ln(\frac{x+3}{x-1})$

Solución

a) Al ser una raíz de índice par $x^2-4x+3\geq0$:

$x^2-4x+3=0 \rightarrow x=3$ y $x=1$



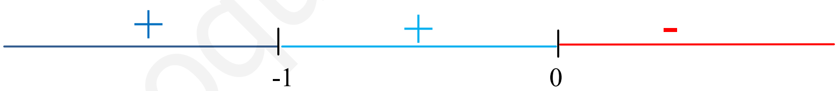
Dom(f(x))=$(-\infty,1]\cup[3,\infty)$

b) Al tener denominador se debe de cumplir que este no se anule.

$x^2-100\neq0 \rightarrow x\neq\pm10$. Dom(g(x))=R-{10,-10}

c) Tenemos que la función es una raíz cuadrada, luego el radical ha de ser positivo o cero, por otro lado el denominador no puede ser nulo:

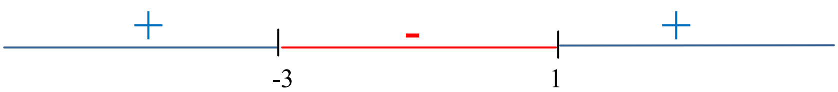
$x^3+2x^2+x=x(x+1)^2=0 \rightarrow x=0, x=-1.$



Dom(h(x))=$(-\infty,-1)\cup(-1,0)$

d) La función es un logaritmo, luego el argumento ha de ser positivo, además el denominador no puede ser cero:

$\frac{x+3}{x-1} > 0$ y $x\neq1$



Dom(i(x))=$(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio 10. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^3-7x$

b) h(x)=x6-2x4-5

c) i(x)=x3+2x-3

d) $g(x)=\frac{x^3-3x}{x^2-100}$

Solución

a) $f(-x)=-x^3+7x=-f(x)$ → simetría impar

b) h(-x)=x6-2x4-5=h(x) → simetría par

c) i(-x)=-x3-2x-3≠i(x),-i(x) → no simétrica

d) $g(-x)=\frac{-x^3+3x}{x^2-100}=-\frac{x^3-3x}{x^2-100}=-g(x)$ → simetría impar

Ejercicio 11: Estudia las asíntotas de las siguientes funciones

a) $f(x)=\frac{x^3-3x}{x^2-100}$

b) $g(x)=\frac{x^2-3}{x^3}$

Solución

a) ***Asíntotas verticales***: donde se anula el denominador → $x^2-100=0$ → $x=\pm10$

Asíntota x=-10, veamos si cuando x se acerca a -10 tiende a más o menos infinito:

$x\to-10^-$ $f(-10^-)=f(-10{,}0001)=-4.85\cdot10^5$ luego $y\to-\infty$
$x\to-10^+$ $f(-10^+)=f(-9.9999)=4.85\cdot10^5$ luego $y\to+\infty$

Asíntota x=10, veamos si cuando x se acerca a 10 tiende a más o menos infinito:

$x\to10^+$ $f(10^+)=f(10{,}0001)=4.85\cdot10^5$ luego $y\to\infty$
$x\to10^-$ $f(10^-)=f(9.9999)=-4.85\cdot10^5$ luego $y\to-\infty$

Asíntotas horizontales y oblicuas:

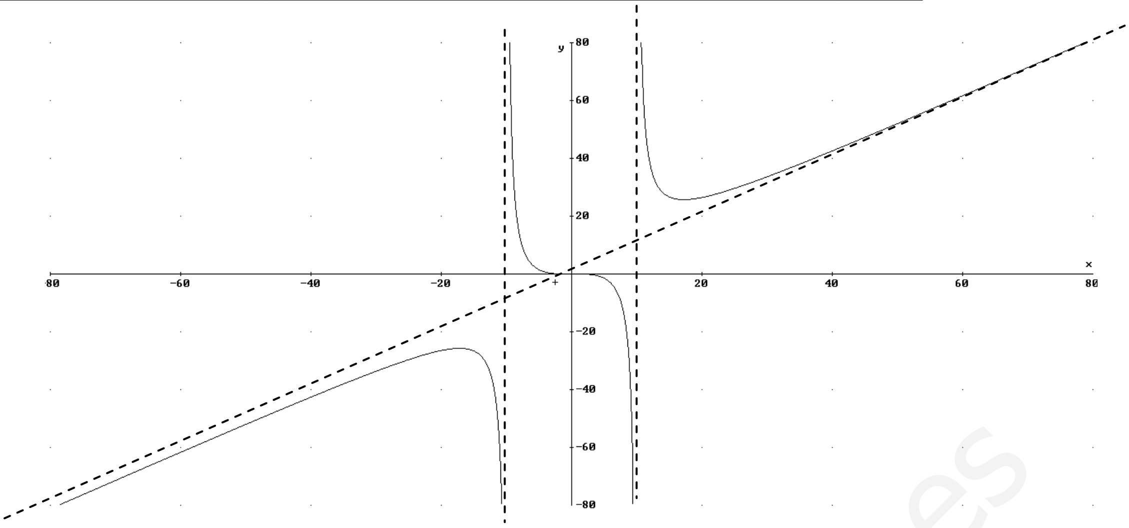
Veamos hacia qué valor tiende la función cuando $x\to\pm\infty$

Si $x\to\infty$: $f(9999)\approx9999$ tiende a $+\infty$ pero de tal forma que y=x

Si $x\to-\infty$: $f(-9999)\approx-9999$ tiende a $-\infty$ pero de la forma y=x

Luego la asíntota es oblicua y=x

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)



b) ***Asíntotas verticales***: donde se anula el denominador →$x^3=0$→$x=0$

Asíntota x=0, veamos si cuando x se acerca a 0 tiende a más o menos infinito:

x→0^- f(0^-)=f(-0,0001)=$3\cdot10^{12}$ luego y→∞
x→0^+ f(-10^+)=f(0.00001)= $-3\cdot10^{12}$ luego y→-∞

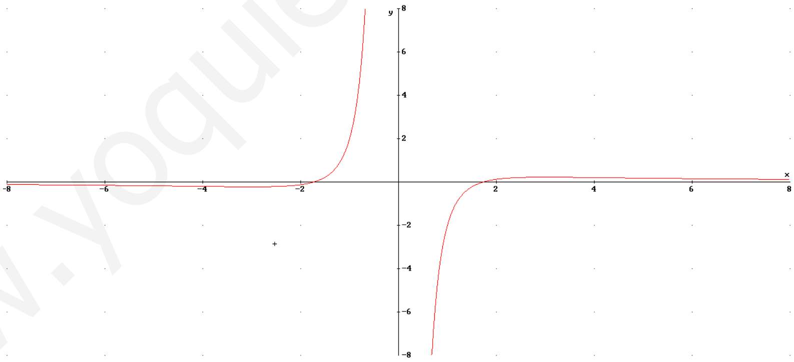
Asíntotas horizontales y oblicuas:

Veamos hacia qué valor tiende la función cuando x→±∞

Si x→∞: f(9999)≈0.0001 tiende a 0 .

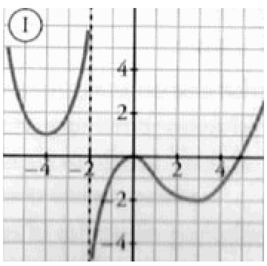
Si x→-∞: f(-9999) ≈-0.00001 tiende a 0.

Luego la asíntota es horizontal y=0



Ejercicio 12: Dibuja la gráfica de la función que cumple

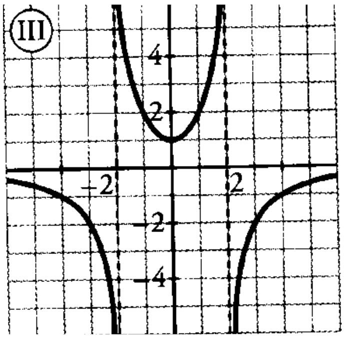
a) Asíntota vertical en x=-2
b) Creciente en (-4,-2)∪(-2,0)∪(3,∞) y decreciente en (-∞,-4)∪(0,3)
c) Mínimo en (-4,1) y (3,-2). Máximo en (0,0)
d) forma ∪ en intervalo (-∞,-2)∪(1,∞) y forma de ∩ en (-2,1)
e) Punto de inflexión en (1,-1)



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

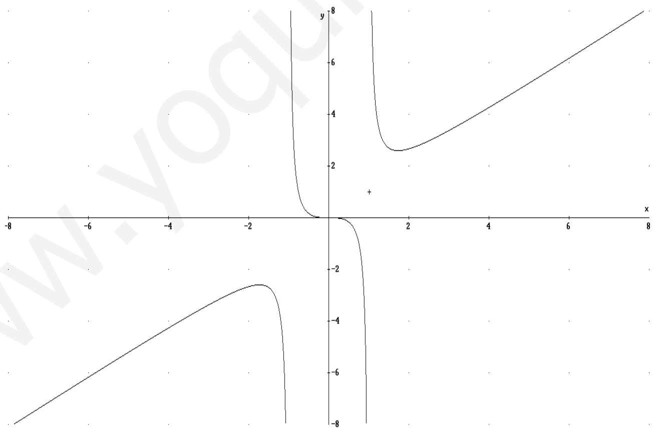
Ejercicio 13: Ídem problema 10:

a) Simetría par
b) Asíntotas verticales en x=-2 y x=2. Asíntota horizontal y=0
c) Decreciente en (-∞,-2)∪(-2,0) y creciente en (0,2)∪(2,∞)
d) Mínimo en (0,1)
e) ¿Cómo es la curvatura?



Ejercicio 14: Ídem problema 10:

a) Simetría impar
b) Asíntotas verticales en x=-1 y x=1. Asíntota oblicua y=x
c) Creciente en (-∞,-1.7)∪(1.7,∞) y decreciente en (-1.7,-1)∪(-1,1)∪(1,1.7)
d) Mínimo en (1.7, 2.6) y máximo en (-1.7,-2.6)
e) Punto de inflexión en en (0,0)
f) ¿Cómo es la curvatura?



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

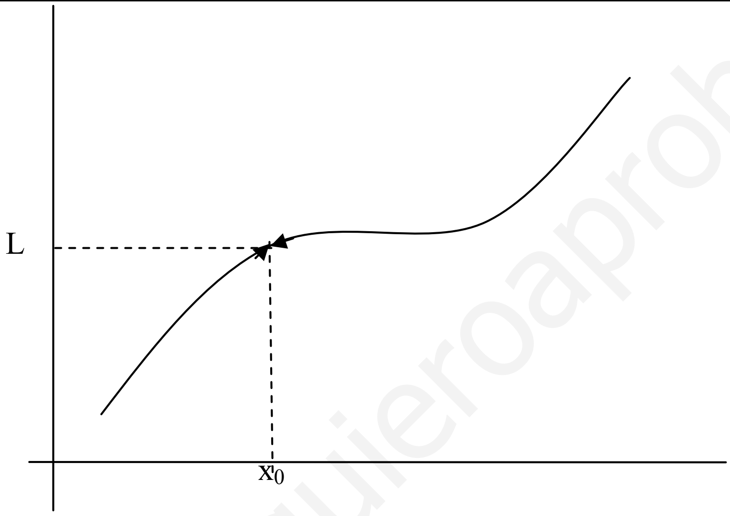
Tema 11. Limite de funciones. Continuidad

1. Límite de una función. Funciones convergentes

La idea intuitiva de límite de una función en un punto es fácil de comprender: es el valor hacia el que se aproxima la función cuando la variable independiente, x, se aproxima a dicho punto.

Ejemplo: sea f(x)=$\frac{1}{(x-1)^2}$ el límite de la función cuando x tiende a 1 es infinito, ya que cuanto más se aproxima x a 1 entonces $(x-1)^2$ más próximo a cero (positivo), y por tanto la función se hace más grande (1/0.00000001=100000000).

Definición: Matemáticamente una función f tiene límite L cuando x tiende a un valor x_0, y se denota $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ si se cumple que cuanto más se acerca la x a x_0 (tanto a la derecha, x_0^+, como a la izquierda, x_0^-) el valor de la función, f(x) más se aproxima a L



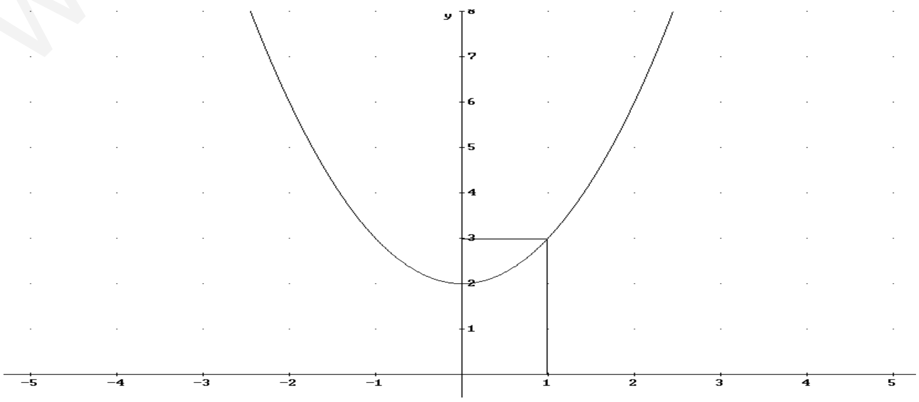
Vamos a considerar dos casos diferentes:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ y $f(x_0)=L$ (veremos que es la definición de continua)

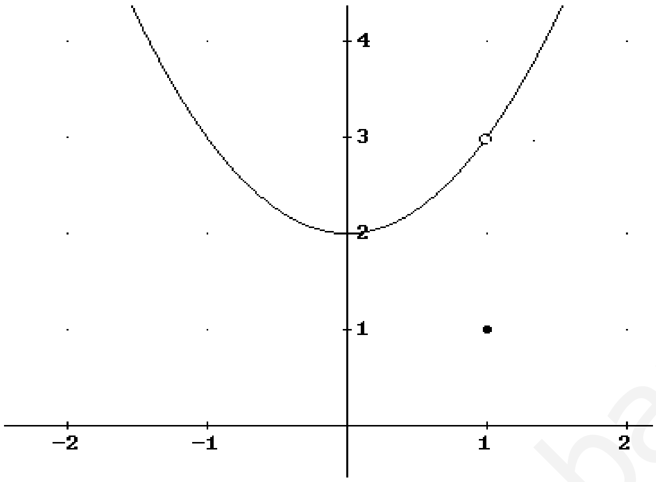
b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ pero $f(x_0) \neq L$

Ejemplo:

a) $f(x)=x^2+2$ → $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3 = f(1)$. *Veamos la gráfica de la función:*



b) g(x)=$\begin{cases} x^2+2 & si\ \ x\neq 1 \\ 1 & si\ \ x=1 \end{cases}$ → $\lim_{x\to 1} g(x)=3\ \ g(1)=1$



Definición: Dada una función f(x), se dice que es convergente en x_0 si, existe el límite $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$, distinto de $\pm\infty$

Para que f(x) sea convergente en x_0 no es necesario que x_0 pertenezca al dominio, por ejemplo

g(x)=x^2+1 si x≠1 → $\lim_{x\to 1} g(x)=2,\ 1\notin Dom(g(x))$, y la función si es convergente

2. Límites laterales

Existen funciones definidas a trozos, son aquellas que están definidas de diferente manera a lo largo de distintos intervalos de la recta real. En estas funciones, cuando queremos estudiar el límite en los puntos donde cambia la expresión analítica, es necesario calcular los límites laterales, viéndose así la tendencia de la función a ambos lados del punto.

Definición: Una función f tiene límite L cuando x tiende a un valor x_0 por la izquierda, y se denota $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$, si se cumple que cuando nos acercamos al valor de x_0 para x menores que x_0 la función se acerca a L.

Consiste en estudiar el comportamiento de la función en el entorno a la izquierda de x_0.

Definición: Una función f tiene límite L cuando x tiende a un valor x_0 por la derecha, y se denota $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$, si se cumple que cuando nos acercamos al valor de x_0 para x menores que x_0 la función se acerca a L.

Consiste en estudiar el comportamiento de la función en todo entorno a la derecha de x_0.

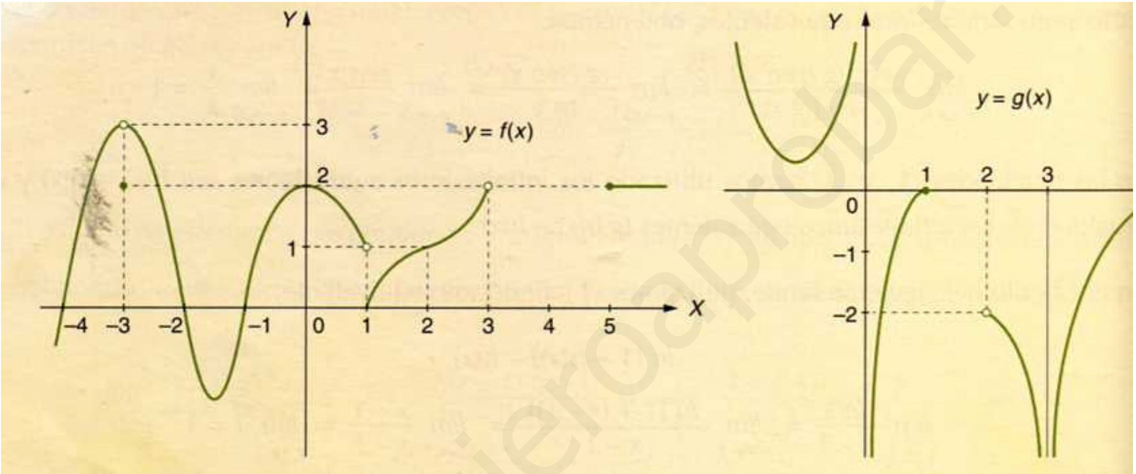
Teorema: El límite de una función f(x) en x_0 existe si, y sólo si, existen los límites laterales y éstos coinciden:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

Este teorema será muy importante en los ejercicios de la PAU donde se nos pide estudiar la continuidad de funciones definidas a trozos. Además, como veremos en el apartado de cálculo de límites, ya que es el método utilizado para resolver las indeterminaciones de los límites del tipo $\frac{k}{0}$

Ejercicio 1. Calcular los límites y valores en la función de las siguientes funciones representadas:



a) f(-3)=2, f(-2)=0, f(0)=2, f(4) $4\notin$ Dom(f(x))

b) $\lim_{x\to -3} f(x)=3$, $\lim_{x\to 0} f(x)=2$, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = no\ existe$, $\lim_{x\to 3} f(x) = no\ existe$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)=0$, $\lim_{x\to 1} f(x)=no\ \ existe$, $\lim_{x\to 2} f(x)=1$

c) $\lim_{x\to 3} g(x)=-\infty$, $\lim_{x\to 2^+} g(x)=-2$, $\lim_{x\to +\infty} g(x)=0$, $\lim_{x\to -\infty} g(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 0^-} g(x)=+\infty$,

$\lim_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$, $\lim_{x\to 1^+} g(x)=no\ existe$, $\lim_{x\to 2} g(x)=no\ existe$

Ejercicio 2. Calcular los siguientes límites a la función $f(x)=\begin{cases} x^2-3 & si\ x<-5 \\ 2x^2 & si\ -5\le x<1 \\ \log_2 x & si\ 1\le x<4 \\ 2 & si\ x\ge 4 \end{cases}$

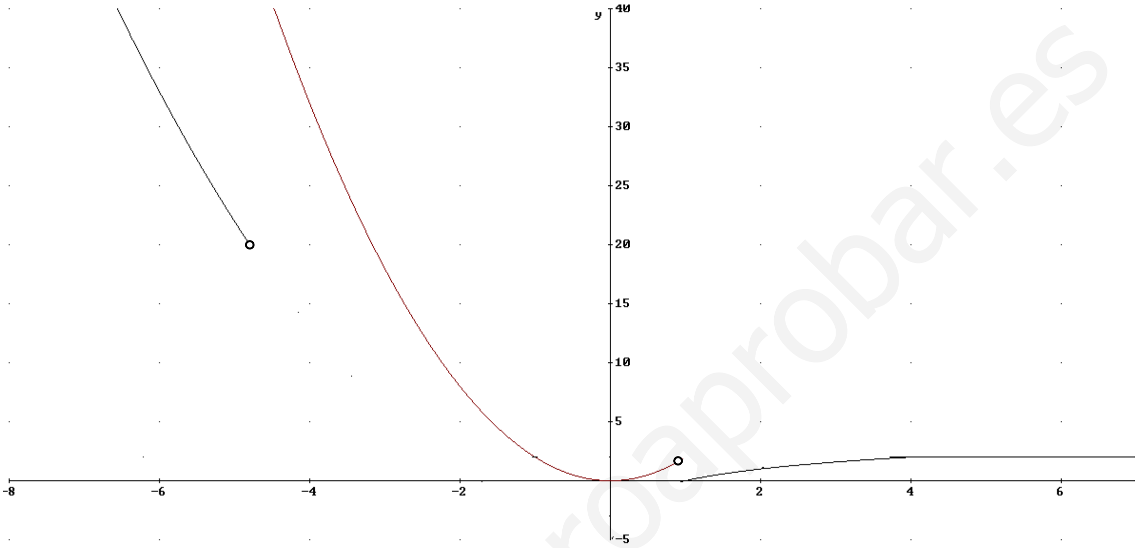
a) $\lim_{x\to -5} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to -5^-} f(x) = \lim_{x\to -5^-} x^2-3=22 \\ \lim_{x\to -5^+} f(x) = \lim_{x\to -5^+} 2x^2=50 \end{cases}$ = no existe al ser los laterales distinto

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

b) $\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x^2 = 2 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \log_2 x = 0 \end{cases} = \text{no existe al ser los laterales distinto}$

c) $\lim_{x\to 4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \log_2 x = 2 \\ \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} 2 = 2 \end{cases} = 2$

Veamos la gráfica de la función:



3. Distintos tipos de límites

3.1 Límites infinitos cuando x tiende a un número real (asíntota vertical)

En este apartado vamos a estudiar el caso de funciones que cuanto más se aproxima x a un valor x_0, bien por la izquierda, por la derecha o por los dos, la función se hace infinitamente grande (tiende a $+\infty$) o pequeña (tiende a $-\infty$). Cuando esto ocurre se dice que la función f(x) tiene asíntota vertical en $x=x_0$ Veamos los siguientes casos:

Definición: Una función f(x) tiene limite $+\infty$ cuando x tiende a x_0 por la izquierda si cuando al acercamos a x_0 con $x<x_0$ la función crece de forma infinita. Se escribe como:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$$

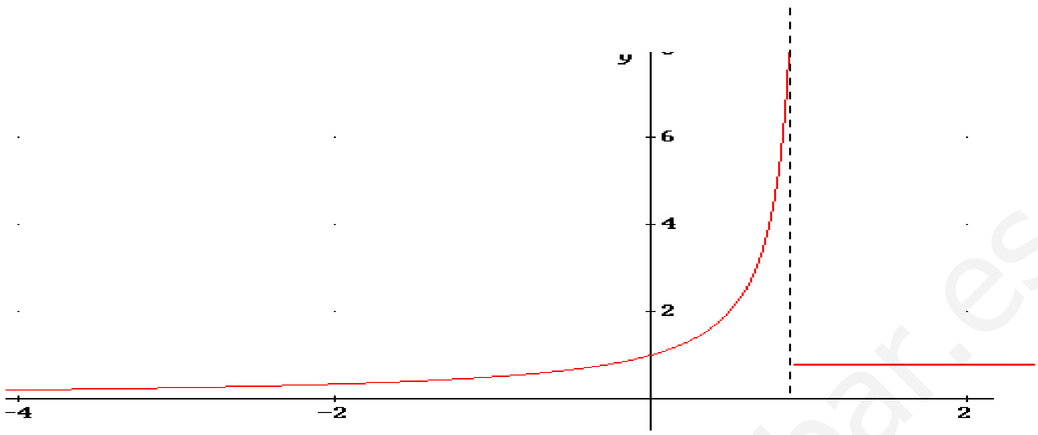
Ejemplo: f(x)= $\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & si \quad x<1 \\ 2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ ya que cuanto más se aproxime x a 1 por la izquierda entonces x-1 más pequeño y positivo y por tanto f(x) más grande. Es decir, cuando $x\to 1^-$ entonces la función $f(x)\to +\infty$.

En cambio $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Cuando esto ocurre la función se aproxima a la asíntota vertical x=1. Es decir cuando la función se aproxima a 1 por la izquierda, ésta se acerca infinitamente a la recta x=1, que es paralela al eje OY. Veamos la gráfica:



Definición: Una función f(x) tiene limite +∞ cuando x tiende a x_0 por la derecha si cuando al cercamos a x_0 con $x>x_0$ la función crece de forma infinita. Se escribe como:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$$

Definición: Una función f(x) tiene limite +∞ cuando x tiende a x_0 si cuando al cercamos a x_0 con $x>x_0$ y $x<x_0$ la función crece de forma infinita. Esto ocurre cuando los dos límites laterales valen ∞. Se escribe como:

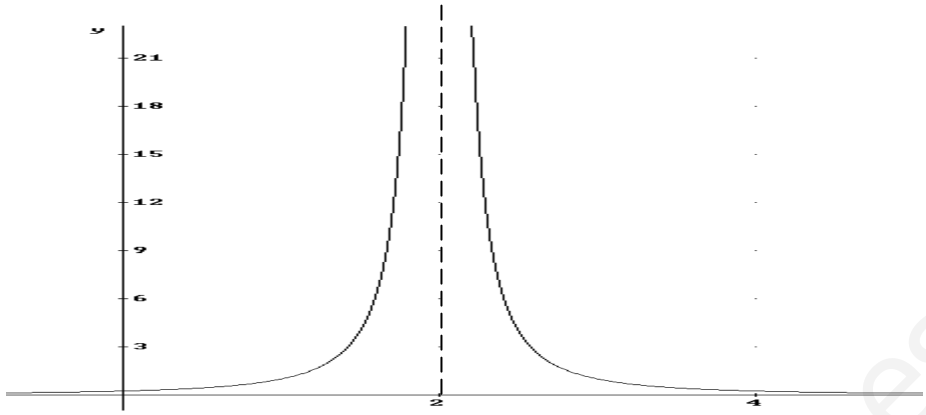
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

Ejemplo: f(x)=$\dfrac{1}{(x-2)^2}$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{1}{0^+} = \infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{1}{0^+} = \infty \end{cases} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Veamos la gráfica de la función y así podremos interpretar el significado del límite:



De igual forma que hemos estudiado el límite a +∞ , el límite a -∞ es equivalente., sólo hay que cambiar crecimiento infinito por decrecimiento infinito

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$$

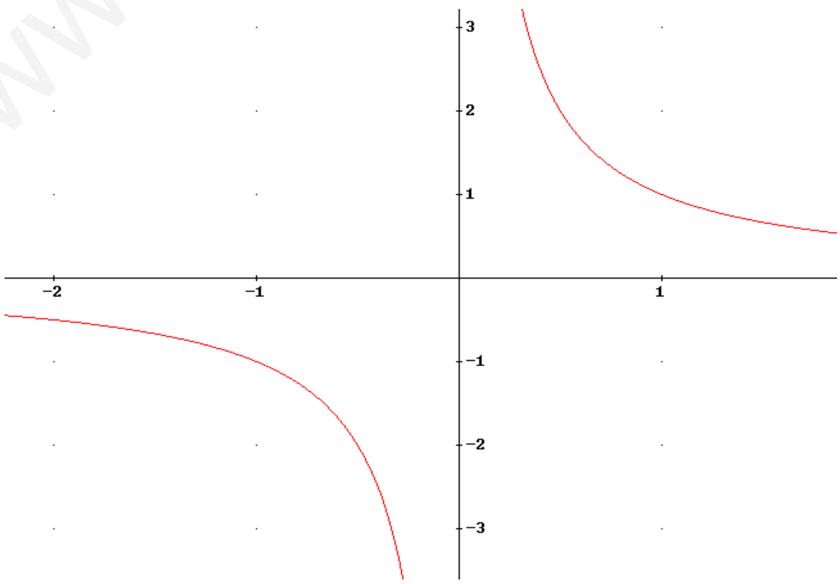
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

Muchas veces las funciones f(x) tienden a +∞ por un lado de x_0 y a -∞ por el otro lado de x_0; cuando esto ocurre el $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ no existe, ya que para existir debe coincidir los límites laterales. Si bien aunque el límite no exista la función si tiene asíntota vertical.

Ejemplo:

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$ → $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \textit{no existe}$ →Asíntota Vertical x=0

Veamos la gráfica:



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Definición: La función f(x) tiene asíntota vertical en x_0 cuando se cumpla alguno de estos 6 límites:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \ , \ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \ , \ \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \ , \ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \ , \ \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

3.2 Límites finitos cuando x tiende a infinito (asíntota horizontal)

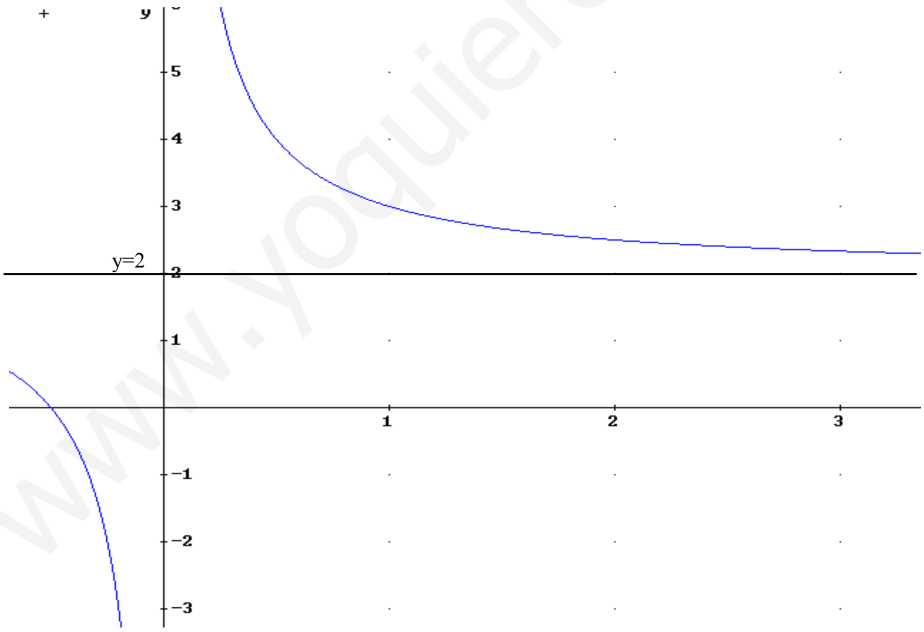
En este apartado estudiamos el comportamiento de algunas funciones en las que, cuando la x toma valores muy grandes o muy pequeños, la función se aproxima cada vez más a un valor L. Si esto ocurre se dice que f(x) tiende a L cuando x tiende a +∞ o a -∞. Veamos la definición:

Definición: Una función f tiene por límite un número real L cuando x tiende a +∞, si se cumple que cuanto mayor es el valor de x el valor de la función se aproxima más a y=L. Se escribe como

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

Ejemplo:

y=f(x)=(2x+1)/x → $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$



Definición: Una función f tiene por límite un número real L cuando x tiende a -∞, si se cumple que cuanto menor es el valor de x el valor de la función se aproxima más a y=L. Se escribe como

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

La función anterior y=f(x)=(2x+1)/x cumple también que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Definición: Una función f(x) tiene una asíntota horizontal en $y=y_0$ si se cumple una de las siguientes condiciones (o las 2):

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$

Cuando esto ocurre la función tiene una asíntota horizontal y=L. Es decir, cuando x se hace infinitamente grande ($x\to\infty$) o infinitamente pequeño ($x\to-\infty$), la función se acerca a la recta paralela al eje OX y=L

3.3 Límites infinitos cuando x tiende a infinito

En este último apartado estudiaremos 4 casos:

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

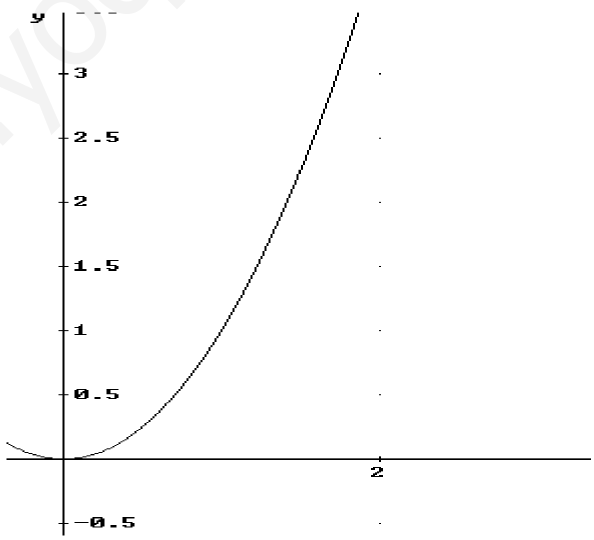
b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ → cuando x se hace muy grande el valor de la función también.

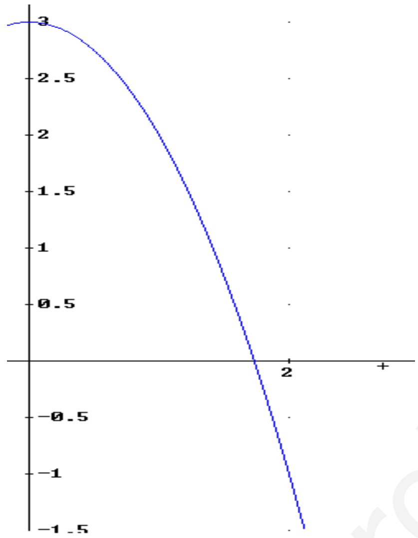
Ejemplo: $\lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty$



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

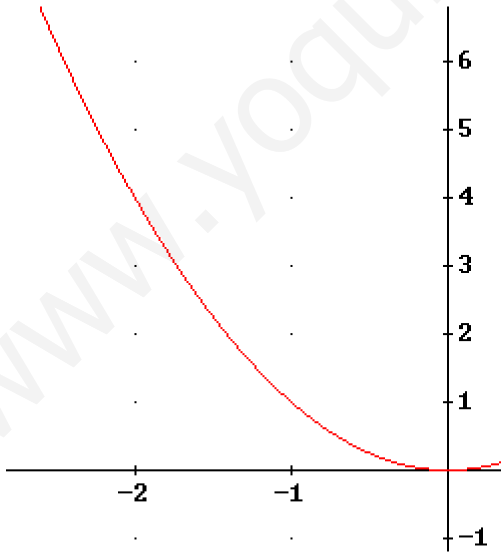
b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ → cuando x se hace muy grande el valor de la función muy pequeña (negativa).

Ejemplo: y=-x^2 $\lim_{x\to\infty} -x^2 = -\infty$



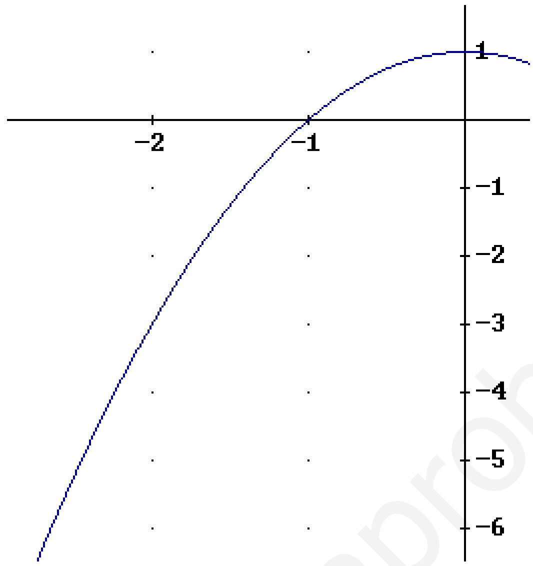
c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ → cuando x se hace muy pequeña (negativa) el valor de la función se hace muy grande.

Ejemplo*:* y=f(x)=x^2, $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$



d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ → cuando x se hace muy pequeña (negativa) el valor de la función también.

Ejemplo: y=f(x)=-x^2+1 $\lim_{x\to-\infty} -x^2+1 = -\infty$



Ejercicio 3. Calcular las asíntotas verticales y horizontales de las siguientes funciones. Trata de bocetar la gráfica de la función:

a) $f(x) = \dfrac{5x+2}{x+3}$

b) $g(x) = \dfrac{x^2+2}{x^3-4x}$

Solución

a) $f(x) = \dfrac{5x+2}{x+3}$

A.V.: Verticales cuando el límite es infinito (donde se anula el denominador): x=-3:

$$\lim_{x\to-3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to-3^+} f(x) = \dfrac{-3}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x\to-3^-} f(x) = \dfrac{-3}{0^-} = \infty \end{cases}$$ el limite no existe pero hay AV en x=-3

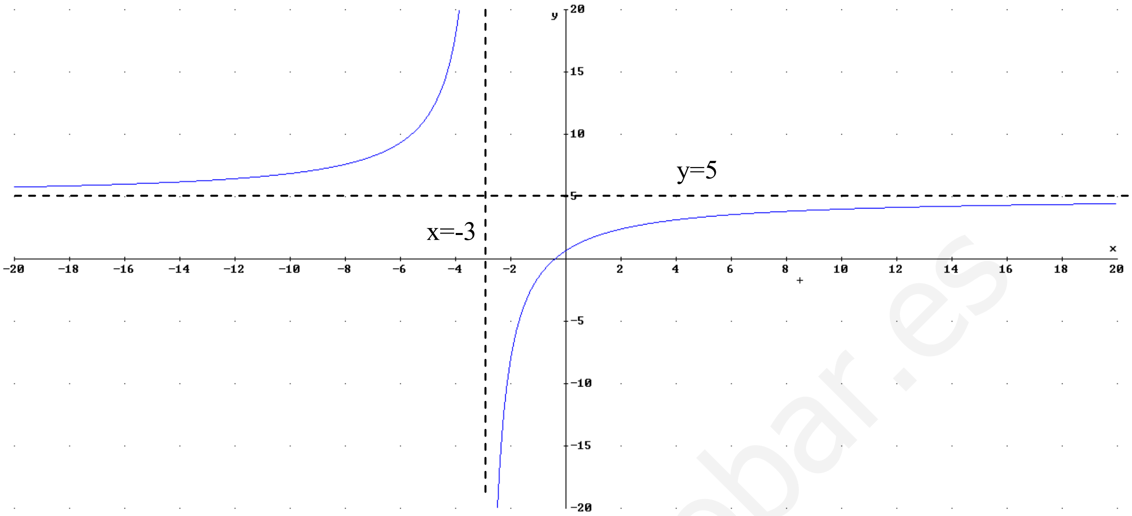
A.H.: Cuando el límite en ∞ y/o -∞ es un número:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{x} = 5$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{x} = 5$$

Lugo tiene asíntota horizontal y=5, tanto cuando x→∞ como cuando x→-∞.

Veamos la gráfica:



b) $g(x)=\dfrac{x^2+2}{x^3-9x}$

A.V.: x^3-9x=0 → x(x^2-4)=0 → x=0, x=9, x=-9. Son asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2}{x(x-3)(x+3)}= \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\dfrac{2}{0^+\cdot(-9)}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\dfrac{2}{0^-\cdot(-9)}=\infty \end{cases}$$

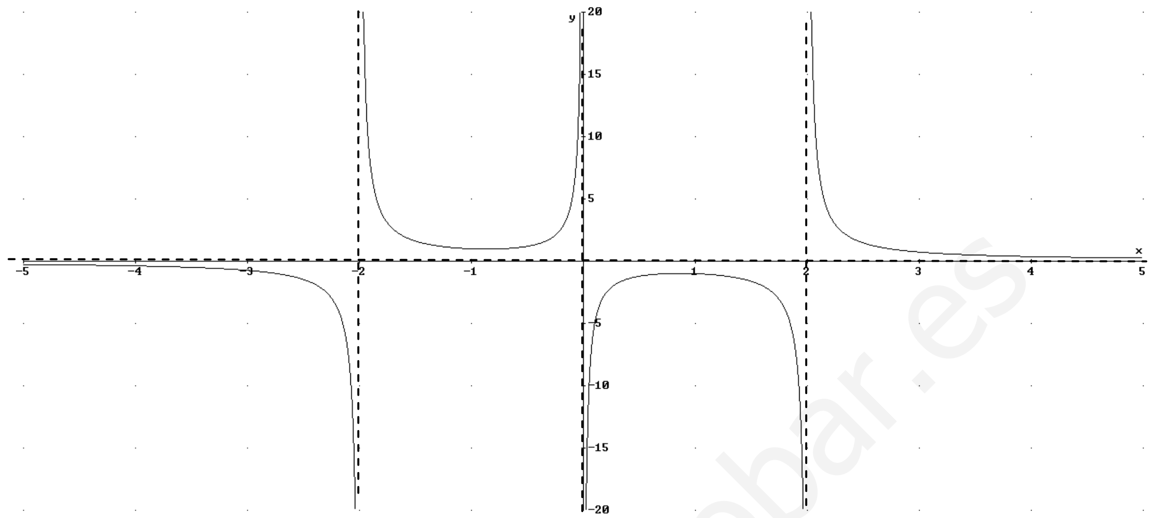
$$\lim_{x\to 3} g(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2}{x(x-3)(x+3)}= \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+} g(x)=\dfrac{11}{3\cdot 0^+\cdot 6}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^-} g(x)=\dfrac{11}{3\cdot 0^-\cdot 6}=-\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -3} g(x)=\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2}{x(x-3)(x+3)}= \begin{cases} \lim\limits_{x\to -3^+} g(x)=\dfrac{11}{-3\cdot(-6)\cdot 0^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^-} g(x)=\dfrac{11}{-3\cdot(-6)\cdot 0^-}=-\infty \end{cases}$$

A.H. : $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2}{x^3-4x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2}{x^3-4x}=0$

La asíntota horizontal es y=0, tanto para cuando x tiene a +∞ como a -∞

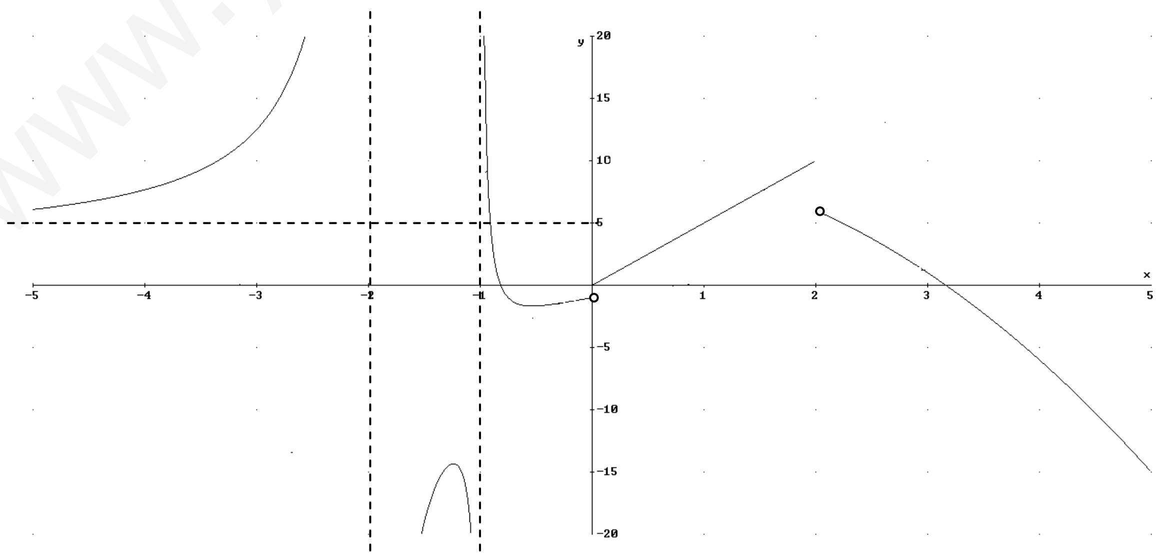
Veamos la gráfica:



Ejercicio 4. Representar una función que cumpla las siguientes premisas:

a)

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=5$	g) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$
b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=5$	f) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$
c) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\infty$	h) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=10$
d) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-\infty$	i) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=6$
e) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$	j) f(0)=0
f) $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\infty$	k) f(2)=10



b)

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

b) $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$

c) $\lim_{x\to-10^-} f(x)=2$

d) -10∉Dom(f(x))

e) $\lim_{x\to-3} f(x)=\infty$

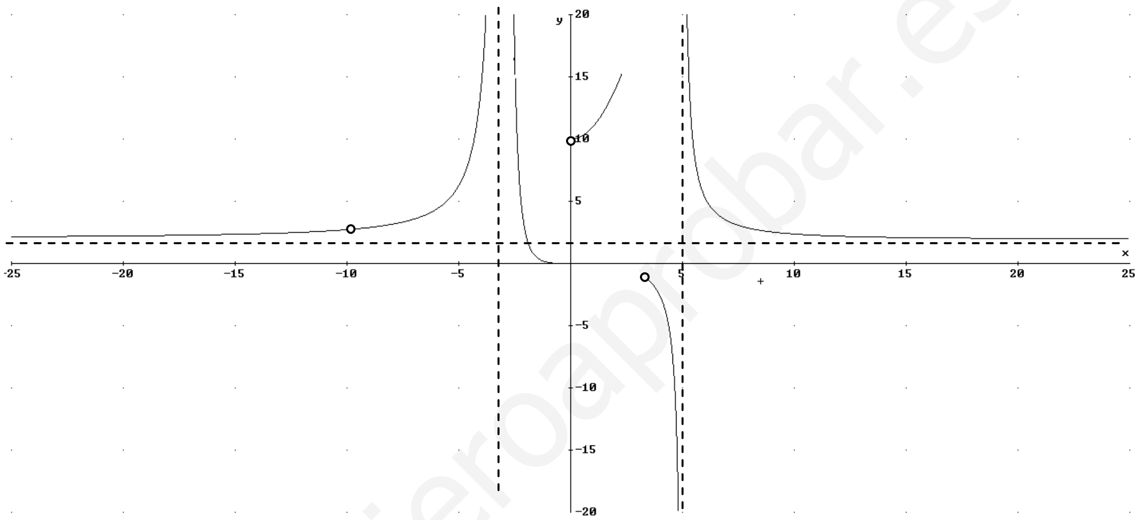
f) $\lim_{x\to5^-} f(x)=-\infty$

g) $\lim_{x\to-5^+} f(x)=\infty$

h) $\lim_{x\to0^-} f(x)=0$

i) $\lim_{x\to0^+} f(x)=10$

j) f(0)=10



4. Cálculo de límites

4.1 Operaciones con límites. Indeterminaciones

Al haber límites cuyo valor es ∞ y -∞, tendremos que ver cómo operan los números reales con ±∞. Veámoslo:

***Suma y diferencia*:**

1) ∀k∈R k±∞=±∞

2) ∞+∞=∞

3) -∞-∞=-∞

Producto:

1) ∀k∈R^+ (k>0) k·∞=∞ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty} 3x=+\infty$

2) ∀-k∈R^- (-k<0) k·∞=-∞ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty} -3x=-\infty$

3) ∀k∈R^+ (k>0) k·(-∞)=-∞ → ejemplo $\lim_{x\to-\infty} 3x=-\infty$

4) ∀-k∈R^- (-k<0) -k·(-∞)=∞ → ejemplo $\lim_{x\to-\infty} -3x=+\infty$

Cociente:

1) $\forall k\in R$ $\frac{k}{\pm\infty}=0$ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$

2) $\forall k\in R^{+}$ $\frac{\pm\infty}{k}=\pm\infty$ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{4}=-\infty$

3) $\forall -k\in R^{-}$ $\frac{\pm\infty}{-k}=\mp\infty$ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{-4}=-\infty$

Exponente:

1) $\forall k\in R$ k>1 $k^{+\infty}=+\infty$ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty}2^{x}=+\infty$

2) $\forall k\in R$ 0<k<1 $k^{+\infty}=0$ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=0$

3) $\forall k\in R$ k>1 $k^{-\infty}=0$ →ejemplo $\lim_{x\to-\infty}2^{x}=0$

4) $\forall k\in R$ 0<k<1 $k^{-\infty}=+\infty$ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=+\infty$

Indeterminaciones:

1) ∞-∞ , -∞+∞ → ejemplo $\lim_{x\to\infty}x-x^{2}$

2) 0·(±∞) → ejemplo $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-2}(x^{2}+3x)$

3) $\frac{k}{0}$ → ejemplo $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$

4) $\frac{\pm\infty}{0}$ → ejemplo $\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x^{2}}}{x}$

5) $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ → ejemplo $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2}+2}{x}$

6) $\frac{0}{0}$ → ejemplo $\lim_{x\to0}\frac{x^{2}+2x}{x}$

7) 1^{∞} → ejemplo: $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

4.2 Resolución de límites sin indeterminaciones.

En este apartado vamos a ver como se resuelven los límites en los que no hay indeterminaciones. Es sencillo sólo consiste en sustituir el valor de la x por el valor del límite y operar conforme a lo explicado en el apartado anterior (4.1). Veamos algunos ejemplos:

1. $\lim_{x\to\infty} 2^{x+1} = 2^{\infty+1} = 2^{\infty} = \infty$
2. $\lim_{x\to 10} \frac{x^2-100}{2x+1} = \frac{0}{21} = 0$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3}{-2} = \frac{\infty-3}{-2} = \frac{\infty}{-2} = -\infty$
4. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\infty+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\infty} = 3^{\infty} = \infty$
5. $\lim_{x\to\infty} (1)^{2x+1} = (1)^{\infty+1} = 1$ *nota: la indeterminación 1^{∞} es cuando tiende a 1, no cuando es 1.*
6. $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x^2+3}\right)^{2x} = 1^{\infty}(ind)$

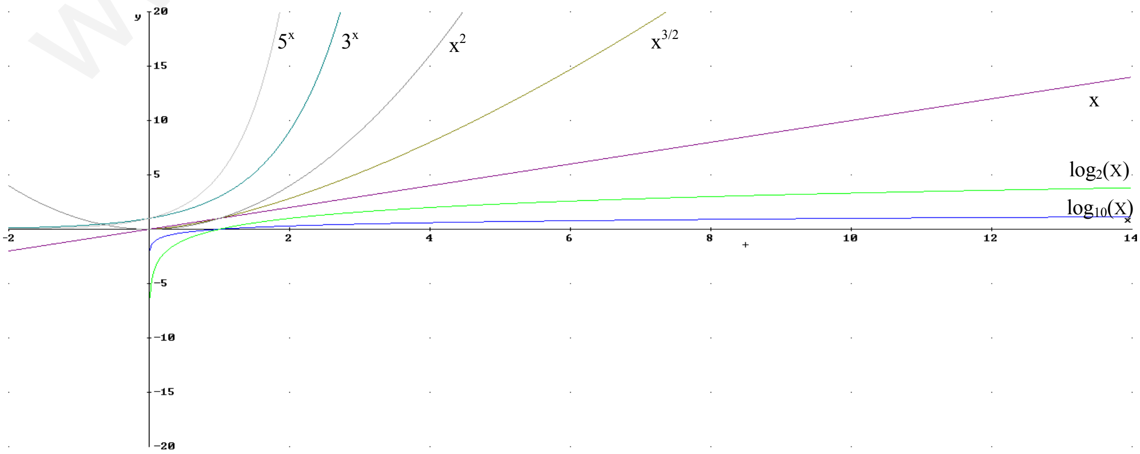
4.3 Resolución indeterminaciones del tipo ∞-∞

Las indeterminaciones de este tipo es cuando una o varias funciones tienden a +∞ y otra u otras a -∞. Para resolver estas indeterminaciones no tenemos más que comparar el crecimiento de las funciones, de tal forma que prevalece aquella cuya tendencia a +∞ o -∞ se mayor al resto.

Orden de crecimiento a ∞ (de menor a mayor):

$\log_{a1}(x)<\log_{a2}(x)<x<x^{3/2}<x^2<\ldots<x^n<(b_2)^x<(b_1)^x$
donde $a_1>a_2$ y $b_1>b_2$. Tanto a como b mayores que 1

Todas estas funciones tienden a ∞, pero crece mucho más rápido las funciones exponenciales que las polinómica, y estas que los logaritmos… Veámoslo:



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejemplos:

$a)\ \lim_{x\to\infty} x^3 - 2x^2 - \log_3(x) = \infty - \infty - \infty = \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$

$b)\ \lim_{x\to\infty} x^3 - 2^x + \log_3(x) = \infty - \infty + \infty = \lim_{x\to\infty} -2^x = -\infty$

$c)\ \lim_{x\to\infty} x^3 - 2^x + \log_3(x) = \infty - \infty + \infty = \lim_{x\to\infty} -2^x = -\infty$

$d)\ \lim_{x\to\infty} x^{103} - 3^x + 2^x = \infty - \infty + \infty = \lim_{x\to\infty} -3^x = -\infty$

4.4.Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Las situaciones más simples en las que aparece es al calcular los límites infinitos de fracciones polinómica. Estas indeterminaciones se resuelven dividiendo el numerador y el denominador por la máxima potencia de x del denominador

Ejemplos: $\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-3x+2}{x^3+3x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{5x^2-3x+2}{x^3}}{\frac{x^3+3x-5}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3+3x+2}{-x^2+3x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-x^3+3x+2}{x^2}}{\frac{-x^2+3x-5}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{-1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2+3x+2}{-2x^2+3x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-3x^2+3x+2}{x^2}}{\frac{-2x^2+3x-5}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{-2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$

Conclusión:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} ... + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0}$

a) n>m → $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} ... + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0} = 0$

b) m>n → $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} ... + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0} = \begin{cases} -\infty & \text{signo(P(x))} \neq \text{signo(Q(x))} \\ +\infty & si\ \text{signo(P(x))} = \text{signo(Q(x))} \end{cases}$

c) m=n→ $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} ... + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0} = \frac{a_n}{a_n}$

Ejercicio 5. Calcular los siguientes límites de funciones.

a) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^2-3}{-3x^3-3}=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{-3x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$

b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^2-3}{x^2-3}=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2-2x}{-3x^4+4x}=\frac{\infty}{-\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{-3x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{-3x}=\frac{1}{-\infty}=0$

d) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^4-3x}+5x^2-1}{5x^2-3x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^4}+5x^2}{5x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2}+5\right)x^2}{5x^2}=\frac{\left(\sqrt{2}+5\right)}{5}$

(nota el grado dentro de una raíz se divide entre el índice de la raíz, así $\sqrt{2x^4}$ tiene grado 2.

e) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3-3x}+2x-3}{15x^2+12x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^3}}{15x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{3/2}}{15x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{15x^{1/2}}=\frac{1}{\infty}=0$

Estos no son los únicos tipos de límites en donde aparece la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, veamos otros casos diferentes

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}...+a_0}{k^x}=0 \quad (k>1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{k^x}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_0}=+\infty \quad (k>1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}...+a_0}{\log_k x}=+\infty \quad (k>1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_k x}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_0}=0 \quad (k>1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_0}{\log_k x}=\infty \quad (k>1 \ y \ b_n>0)$$

4.5. Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$

Aparece este tipo de límites principalmente en 2 casos diferentes:

1) *Cociente de funciones polinómica:* Se resuelven descomponiendo factorialmente numerador y denominador (aplicando Ruffini con raíz la del límite, ya que es el valor donde sea anulan los dos polinomios), simplificando los factores comunes.

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^3-7x^2+14x-8}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x^2-5x+4)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+3)}{(x^2-5x+4)}=\frac{5}{-2}$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x-2}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2+2x+1)}{(x+1)(x^2-x-2)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x^2+2x+1)}{x^2-x-2}=\frac{0}{0}=$

$=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)}{(x-2)}=\frac{0}{-3}=0$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-3x^2}{2x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(x-3)}{x(2x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x-3)}{(2x-1)}=\frac{0}{-1}=0$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-3x}{2x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x^2-3)}{x(2x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x^2-3)}{(2x-1)}=\frac{-3}{-1}=3$

nota: cuando el límite tiende a 0 en vez de Ruffini sacamos factor común, pues la raíz es cero, y por tanto el factor es (x-0)=x.

2) *Cociente con funciones racionales:* Se resuelven multiplicando numerador y denominado por la expresión conjugada de la que lleva raíz,(cambiando el signo):

Ejemplos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{\sqrt{x+4}-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x)(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x)(\sqrt{x+4}+2)}{x+4-4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x)(\sqrt{x+4}+2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)(\sqrt{x+4}+2)}{1}=-4$$

4.6. Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{k}{0}$

Este límite puede ser +∞, -∞ o no existir por ser los límites laterales diferentes. Se calcula a partir de los límites laterales (son siempre asíntotas verticales):

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-1}{x-3}=\frac{k}{0}\quad \begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x^2-1}{x-3}=\frac{k}{0^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x^2-1}{x-3}=\frac{k}{0^-}=-\infty\end{cases}\quad \textit{no existe el límite}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-1}{(x-3)^2}=\frac{k}{0}\quad \begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x^2-1}{(x-3)^2}=\frac{k}{0^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x^2-1}{(x-3)^2}=\frac{k}{0^+}=+\infty\end{cases}\quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-1}{(x-3)^2}=+\infty$$

4.7. Resolución de indeterminaciones del tipo 0·∞

Se resuelven transformándolas en indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

***Ejemplo**:*

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{3}{\sqrt{x^4-2}}\cdot(2x-3)=0\cdot\infty=\lim_{x\to -\infty}\frac{3(2x-3)}{\sqrt{x^4-2}}=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{x\to -\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^4}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{6}{x}=0$$

4.8. Resolución de indeterminaciones del tipo ∞ -∞

Las indeterminaciones de este tipo ya las vimos en el apartado 4.2. En este apartado vimos que el límite era ∞ o -∞, dependiendo qué función tendía más rápido a ∞. En el apartado no consideramos cuando eran funciones con crecimiento semejante; esto ocurre cuando tenemos una raíz con un polinomio de grado n y un polinomio restando de grado la mitad (n/2). Si esto ocurre lo que se hace es multiplicar numerador y denominador por la expresión conjugada, eliminando así la indeterminación del tipo ∞-∞ y quedando expresión del tipo ∞/∞.

***Ejemplo**:*

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+5x}-(x+3)=\infty-\infty\ (\text{mismo grado})=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5x}-(x+3)\right)\left(\sqrt{x^2+5x}+(x+3)\right)}{\sqrt{x^2+5x}+(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-(x^2+6x+9)}{\sqrt{x^2+5x}+(x+3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x-9}{\sqrt{x^2+5x}+(x+3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1-\frac{9}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+1+\frac{3}{x}}=-\frac{1}{2}$$

4.9. Resolución de indeterminaciones del tipo 1^{∞}

Estas indeterminaciones están relacionadas con el número e. El valor decimal del número e es: e=2,718281… es un número irracional que debe su nombre al matemático suizo Euler.

Este número es el límite de la siguiente expresión: $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}}$. Demos valores:

x=1→ 2

x=10→ 2,59

x=1000→ 2,7169…

x=10^6 → 2,718280…

En la práctica todo límite de la forma $\lim_{x\to x_0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=0$ cuando $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$. La forma de resolver esta indeterminación será buscar esta expresión:

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x}{x^2+4}\right)^{x^2}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-3x}{x^2+4}-1\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3x-4}{x^2+4}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(\underbrace{\left(1+\frac{-3x-4}{x^2+4}\right)^{\frac{x^2+4}{-3x-4}}}_{e}\right)^{\frac{-3x-4}{x^2+4}}\right)^{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{x^2(\frac{-3x-4}{x^2+4})}=e^{\lim_{x\to\infty}x^2\frac{-3x-4}{x^2+4}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^3-4x^2}{x^2+4}}=e^{-\infty}=0$$

Ejercicio 6. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to2}\left(\frac{4x+2}{5x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{4x+2}{5x}\right)^{\frac{1}{x-2}}=1^{\infty}=\lim_{x\to2}\left(1+\frac{4x+2}{5x}-1\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to2}\left(1+\frac{2-x}{5x}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to2}\left(\left(\underbrace{\left(1+\frac{2-x}{5x}\right)^{\frac{5x}{2-x}}}_{e}\right)^{\frac{2-x}{5x}}\right)^{\frac{1}{x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to2}e^{\frac{2-x}{5x}\cdot\frac{1}{x-2}}=e^{\lim_{x\to2}\frac{-1}{5x}}=e^{\frac{-1}{10}}=\frac{1}{\sqrt[10]{e}}$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

b) $\lim_{x\to 0}\left(1-x^3+2x^2\right)^{\frac{1}{x^4}}$

$$\lim_{x\to 0}\left(1-x+2x^2\right)^{\frac{1}{x^4}} = 1^{\infty} = \lim_{x\to 0}\left(1+\left(-x+2x^2\right)\right)^{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to 0}\left(\left(\underbrace{\left(1+\left(-x+2x^2\right)\right)^{\frac{1}{-x+2x^2}}}_{e}\right)^{-x+2x^2}\right)^{\frac{1}{x^4}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{-x+2x^2}{x^4}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{-1+2x}{x^3}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{-1}{0}} = ind \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{-1+2x}{x^3}} = e^{\frac{-1}{0^+}} = e^{-\infty} = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{-1+2x}{x^3}} = e^{\frac{-1}{0^-}} = e^{\infty} = \infty \end{cases} \text{no existe el limite}$$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(-x^3\right)^{\frac{2x+3}{x-1}}$

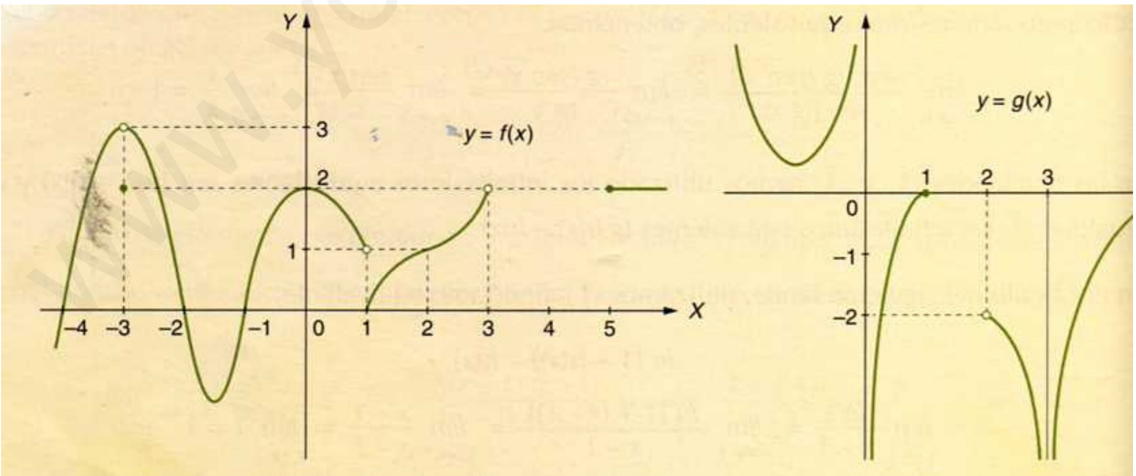
$$\lim_{x\to\infty}\left(-x^3\right)^{\frac{2x+3}{x-1}} = (-\infty)^2 = \infty$$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(x^2-x\right)^{\frac{-2x^2+3}{x-1}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-x\right)^{\frac{-2x^2+3}{x-1}} = \infty^{-\infty} = \frac{1}{\infty^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Ejercicios

Ejercicio 7. Calcula, en las siguientes funciones representadas, las siguientes cuestiones:



a) f(-3)=2, f(-2)=0, f(0)=2, f(4) $4\notin$ Dom(f(x))

b) $\lim_{x\to -3} f(x)=3$, $\lim_{x\to 0} f(x)=2$, $\lim_{x\to 3^-} f(x)=2$, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = no\ existe$, $\lim_{x\to 3} f(x) = no\ existe$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)=0$, $\lim_{x\to 1} f(x)=no\ existe$, $\lim_{x\to -2} f(x)=0$

c) $\lim_{x\to 3} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2^+} g(x) = -2$, $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$, $\lim_{x\to -\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} g(x) = +\infty$,

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^+} g(x) = no\ existe$, $\lim_{x\to 2} g(x) = no\ existe$

Ejercicio 8: Calcular el límite:

$$\lim_{x\to 2} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}} = \begin{cases} e^{\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}} = e^{-\infty} = 0 \\ e^{\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}} = e^{\infty} = \infty \end{cases} \to \lim_{x\to 2} e^{\frac{1}{x-2}} = no\ existe$$

Ejercicio 9: Calcula cuánto debe valer "a" para que la siguiente función, f(x), sea convergente en x=1: $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x\leq 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x>1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3-a$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$. El límite $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe siempre que a=1.

Ejercicio 10: Siendo f(x)=$\sqrt{2x+3}$ calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3} = \frac{\sqrt{11}-3}{1} = \sqrt{11}-3$$

Ejercicio 11: Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x\to +\infty} x^{-4} = 0$, **b)** $\lim_{x\to -\infty} 4x^4 = \infty$, **c)** $\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^3} = \frac{3}{0}(ind)\begin{cases} \lim_{x\to 0^+}\frac{3}{x^3} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^-}\frac{3}{x^3} = -\infty \end{cases} no\ existe$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{x^{-2}}{5} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{5x^2} = \frac{1}{0}(ind)\begin{cases} \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{5x^2} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{5x^2} = +\infty \end{cases} = \infty$ **e)** $\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{3} = 0$, **f)** $\lim_{x\to -\infty}\frac{2}{x^5} = 0$

g) $\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{2}{x^2+1}+\frac{3}{x+2}\right] = 0+0 = 0$, **h)** $\lim_{x\to +\infty} 3^{-x} = 3^{-\infty} = 0$ **i)** $\lim_{x\to -\infty} 3^{-x} = 3^{\infty} = \infty$

j) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{\infty} = 0$ **k)** $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x^3}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-2}}{x}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}} = \frac{\infty}{1} = \infty$

l) $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^4-3x-1}{x^3+3} = -\infty$ **m)** $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-1}{x^3-1} = 0$ **n)** $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3-x+6}{x^2+3x+2} = -\infty$

o) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{2}{3}$ **p)** $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^3+3x^2+2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-3)}{x(x+1)(x+2)}=\frac{-5}{2}$

q) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x-2)}=\frac{-1}{0}\begin{cases}\lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x-2}=\frac{-1}{0^-}=\infty\\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{x-2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\end{cases}$ no existe

r) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)}=2$

s) $\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2-\sqrt{4-x})(2+\sqrt{4-x})}{x(2+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{4-4+x}{x(2+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\sqrt{4-x}}=\frac{1}{4}$

t) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{1+x-(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2}=1$

u) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+6x-9}{x-3}=\frac{18}{0}=\begin{cases}\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+6x-9}{x-3}=\frac{18}{0^+}=+\infty\\ \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2+6x-9}{x-3}=\frac{18}{0^-}=-\infty\end{cases}$ no existe

v) $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+6x-3}{2x^2-5x}=\frac{-3}{0}\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\frac{2x^2+6x-3}{2x^2-5x}=\frac{-3}{(0^+)^2-0^+}=\frac{-3}{(0^+)^2+0^-}=\frac{-3}{0^-}=\infty\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{2x^2+6x-3}{2x^2-5x}=\frac{-3}{0^+}=-\infty\end{cases}$ no existe

w) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2-(x-2)}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}=\frac{4}{\infty}=0$

x) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x-1}\right)^{3x+2}=1^\infty=e^{\lim_{x\to\infty}(3x+2)\left(\frac{5x+1}{5x-1}-1\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x+4}{5x-1}\right)}=e^{\frac{6}{5}}$

y) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)^{\frac{3}{x-1}}=1^\infty=e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x-1}\right)\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}-1\right)}=e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x-1}\right)\left(\frac{x^2(x-1)}{x^2+1}\right)}=e^{\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{x^2+1}}=e^{\frac{3}{2}}$

z) $\lim_{x\to 2}(x-1)^{\frac{3}{x-2}}=1^\infty=e^{\lim_{x\to 2}\frac{3}{x-2}(x-2)}=e^3$ **aa)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1}+\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$

ab) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-5-(4x^2-12x+9)}{\left(\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x-14}{\left(\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)\right)}=\frac{\infty}{\infty}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12-\frac{14}{x}}{\sqrt{4-\frac{5}{x^2}}+(2-\frac{3}{x})}=\frac{12}{4}=3$$

ac) $\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{2x-4}}{x-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{2}\sqrt{x-2}}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}=\frac{\sqrt{2}}{0^+}=+\infty$

Ejercicios PAU

Septiembre 2004. Prueba B. C-4. Determínese el valor del parámetro a para que se verifique $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax+1}-x)=2$.(1 punto)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+ax+1-x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(ax+1)}{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}=\frac{a}{\sqrt{1}+1}=\frac{a}{2}=2\ \rightarrow\ a=4$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

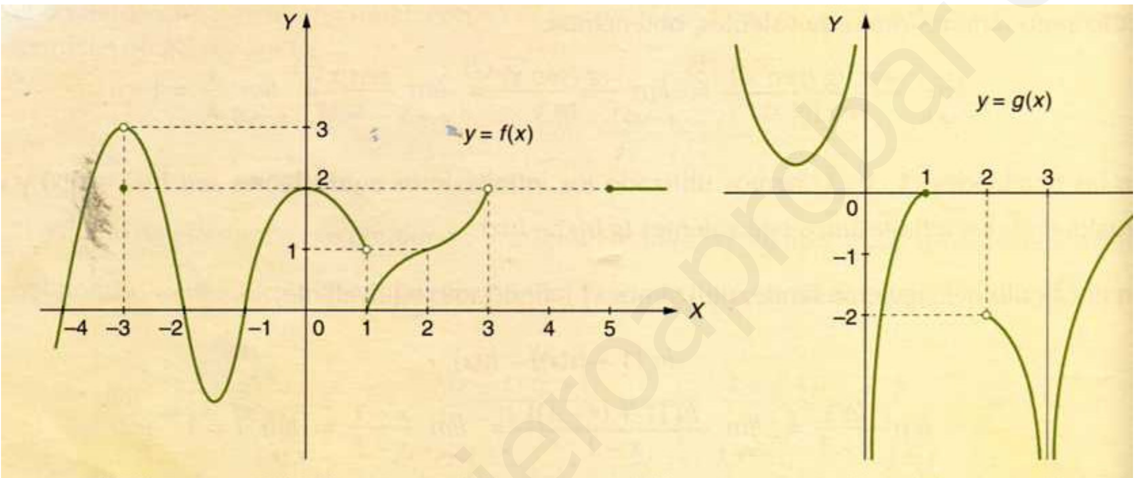
5. Definición de continuidad

Veamos la definición de la continuidad:

Definición: Una función f(x) es continua en un punto x_0 si en dicho punto se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. Existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y no vale +∞ ni -∞ (es decir es convergente en x_0)
2. La función definida en x_0, es decir $x_0 \in$ Dom(f(x))
3. Los dos valores anteriores coinciden: $\lim_{x\to x_0} f(x)$=f(x_0).

Ejemplo:



1) Dom(f(x))=(-∞,3)∪[5,∞)

Continua en todos los puntos del dominio menos en

a) x=-3 → $\lim_{x\to -3} f(x)$ =3≠f(3)=2

b) x=1 → $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe pues los límites laterales son distintos

c) x=5 → $\lim_{x\to 5} f(x)$ no existe pues no existe el límite por la izquierda

2) Dom(g(x))=(-∞,0)∪(0,1]∪(2,3)∪(3,∞)

Continua en todos los puntos del dominio menos en

a) x=0 → $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe pues los límites laterales son distintos

b) x=1 → $\lim_{x\to 1} g(x)$ no existe pues no existe el límite por la derecha

c) x=2 → $\lim_{x\to 2} g(x)$ no existe pues no existe el límite por la izquierda

d) x=3 → $\lim_{x\to 3} g(x) = -\infty$ pero 3∉ Dom(g(x))

Definición: Una función f(x) es continua en un intervalo (a,b) si en todos los puntos del intervalo es continua. Esto ocurre cuando al dibujar la gráfica "no levantamos el boli de la hoja para dibujarla"

En el ejemplo anterior f(x) continua en (-∞,-3), (-3,1), (1,3) y (5,∞). La función g(x) en (-∞,0), (0,1), (2,3) y (3,∞).

Ejercicio 12. Calcular la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2-1} & si \ \ x \leq 0 \\ 2x+3 & si \ \ 0 < x < 1 \\ 4x+1 & si \ \ x > 1 \end{cases}$$

Pasos:

1) Estudiar la continuidad de los "trozos" en sus dominios de definición:

- $\frac{1}{x^2-1}$ es continua en R-{-1,1}, ya que el denominador se hace cero y el límite en x=1 y x=-1 vale ∞ (asíntota vertical). Pero de los dos valores sólo x=-1 pertenece al dominio de definición, x≤ 0.
- 2x+3 y 4x+1 son rectas y por tanto continuas en todos los reales.

Luego por ahora la función no continua en x=-1

2) Estudiar la continuidad en los puntos donde la función cambia de expresión analítica, en nuestro ejemplo x=0 y x=1.

<u>En x=0</u>

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2-1} = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x+3 = 3 \end{cases} \text{ no existe el limite}$$

Luego la función no continua en x=0 tampoco.

<u>En x=1</u>

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 2x+3 = 5 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 4x+1 = 5 \end{cases} = 5$$

Aunque el límite existe la función no continua pues 1∉Dom(f(x)). Ya que para x=1 la función no definida

Luego la función no continua en x=1 tampoco

La función tiene tres puntos de discontinuidad en x=-1, x=0, x=1.

6. Tipos de discontinuidades

***Definición**:* Una función f(x) es discontinua en un punto x_0 si no es continua en dicho punto.

Existen dos tipos de discontinuidades:

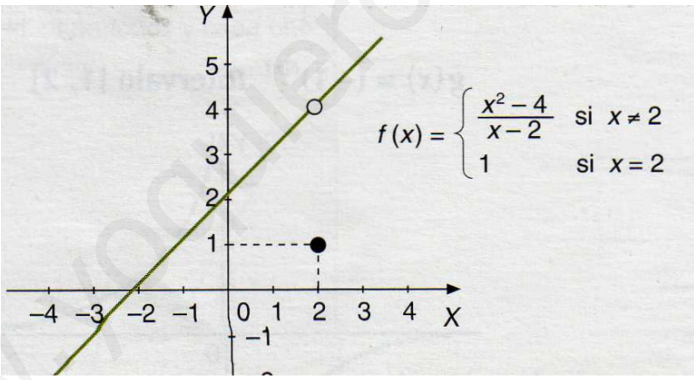
a) Discontinuidad evitable
b) Discontinuidad no evitable

***Discontinuidad evitable*:** Una función f(x) presenta una discontinuidad evitable en el punto x_0 si cumple las siguientes condiciones:

1. La función convergente, es decir el límite de la función en x_0 existe, y es un numero → $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$
2. Una de las dos siguientes condiciones:
   a. o el límite no coincide con $f(x_0)$
   b. o bien la función no está definida en x_0 (es decir $x_0 \notin Dom(f(x))$

Ejemplos:

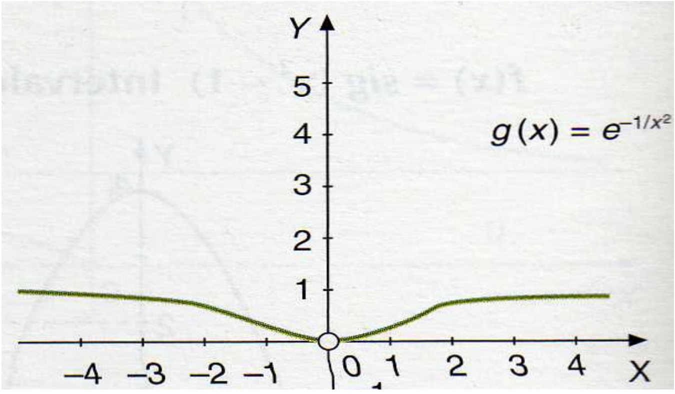
1)



$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \neq f(2) = 1$. Esta discontinuidad se evita redefiniendo la función en x=2, haciendo que en este punto la función tome el mismo valor que el límite es decir f(2)=4

Así la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & si \quad x \neq 2 \\ 4 & si \quad x = 2 \end{cases}$ si es continua pues $\lim_{x \to 2} f(x) = 4 = f(2)$

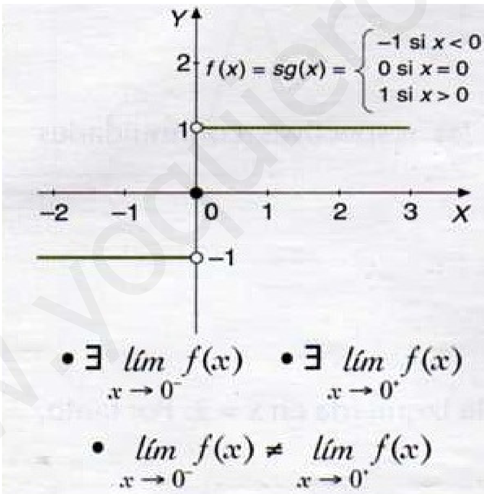
2)



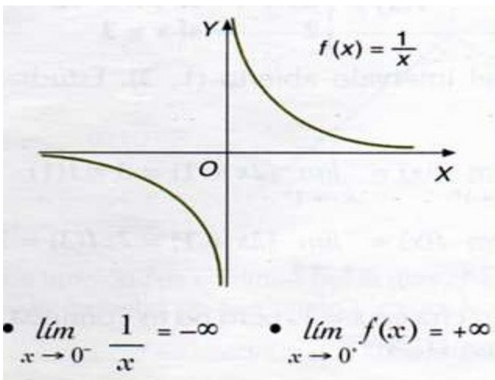
$\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ pero $0 \notin$ Don(g(x)). Esta discontinuidad se evitaría si redefinimos la función tal que en x=0 esta valga lo mismo que el límite: g(x)= $\begin{cases} e^{-1/x^2} & si \;\; x \neq 0 \\ 0 & si \;\; x = 0 \end{cases}$

Discontinuidad no evitable: Es aquella en la que el límite en el punto o no existe o es infinito. Pueden ser a su vez de 2 tipos:

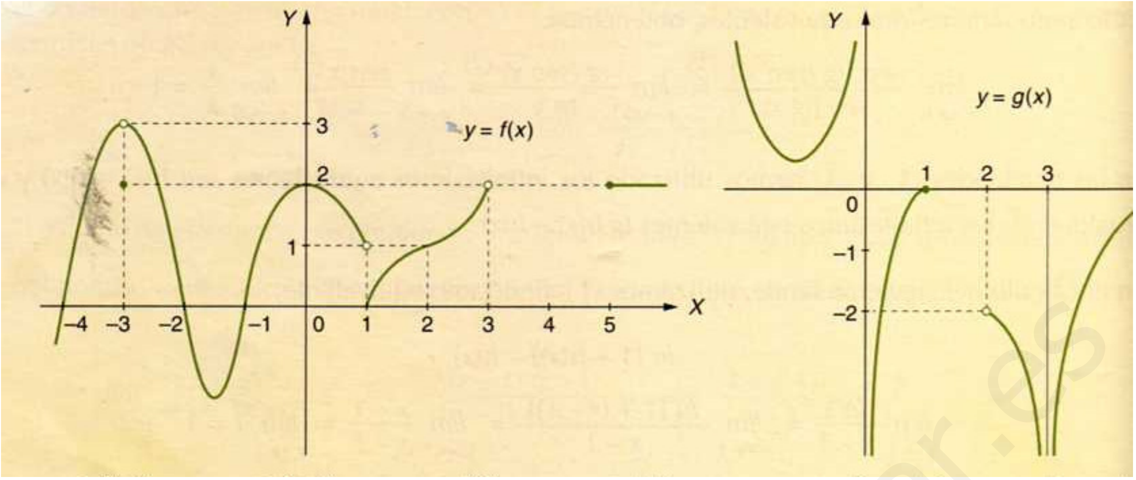
1) *Salto finito en x_0*: los límites laterales no coinciden pero son números reales $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$



2) *Salto infinito en x_0:* cuando los dos límites laterales en x_0 o al menos uno de ellos es +∞ o -∞.



Ejercicio 13. Decir de las siguientes funciones los tipos de discontinuidades de las siguientes funciones



f(x): x=-3 evitable, x=1 no evitable de salto finito. Entre [3,5) la función no definida

g(x): x=0 y x=3 no evitable de salto infinito. Entre (1,2] función no definida.

Ejercicio 14. Decir que tipo de discontinuidad hay en la función del ejercicio 12

La función tiene tres puntos de discontinuidad en x=-1, x=0, x=1.

- En x=-1 no evitable de salto infinito
- En x=0 no evitable de salto finito
- En x=1 evitable

7. Continuidad de las funciones elementales. Operaciones con funciones continuas

Las funciones elementales, por lo general, son continuas en todos los puntos del dominio. Las discontinuidades más importantes aparecen en funciones definidas a trozos (discontinuidades evitables o de salto finito), y en funciones con denominador en el valor donde se anula éste (discontinuidad de salto infinito).

Operaciones de funciones continuas: Sean f(x) y g(x) funciones continuas en x_0

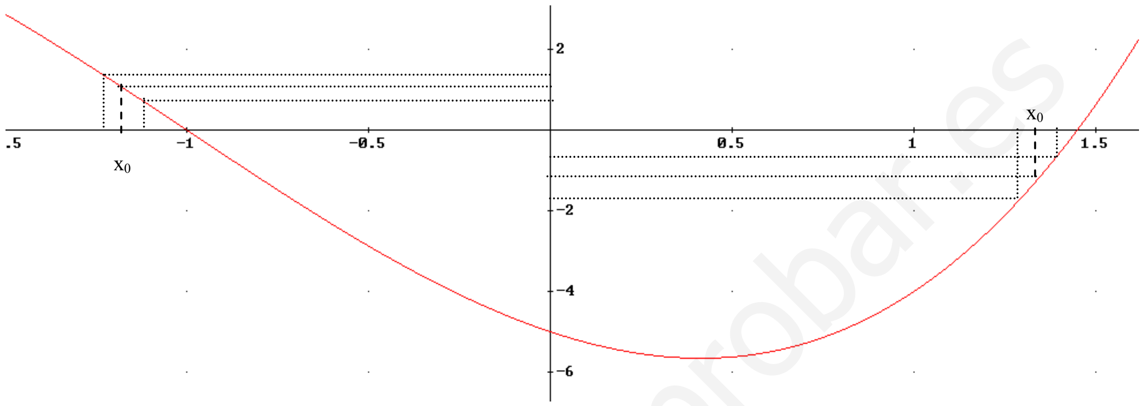
1) Las funciones suma y resta $(f \pm g)(x)$ son continua en x_0
2) La función producto $(f \cdot g)(x)$ es continua en x_0
3) La función división $(f/g)(x)$ es continua en x_0 si $g(x_0) \neq 0$
4) Si g(x) es continua en x_0 y f(x) es continua en $g(x_0)$ entonces la función compuesta $(f \circ g)(x)$ es continua en x_0.

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

8. Teoremas de Continuidad

8.1. Teorema de conservación del signo

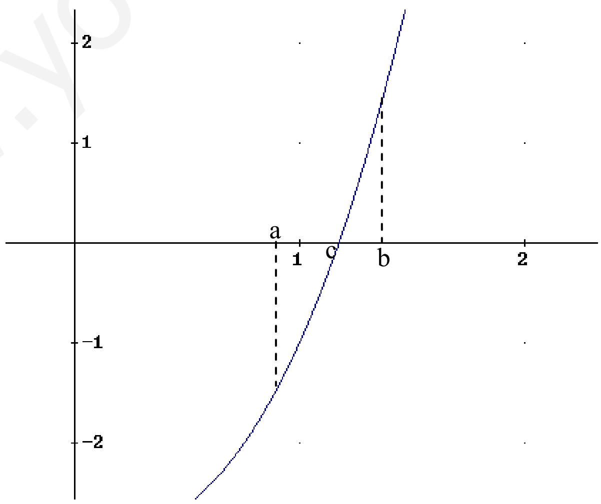
Teorema de conservación del signo: si una función f(x) es continua en el punto x_0 de manera que $f(x_0)\neq 0$, se cumple que en un entorno del punto la función conserva el signo, Esto es si $f(x_0)>0$ se cumple que en un entorno de x_0 la función positiva, y si $f(x_0)<0$ entonces en un entorno de x_0 la función es negativa.



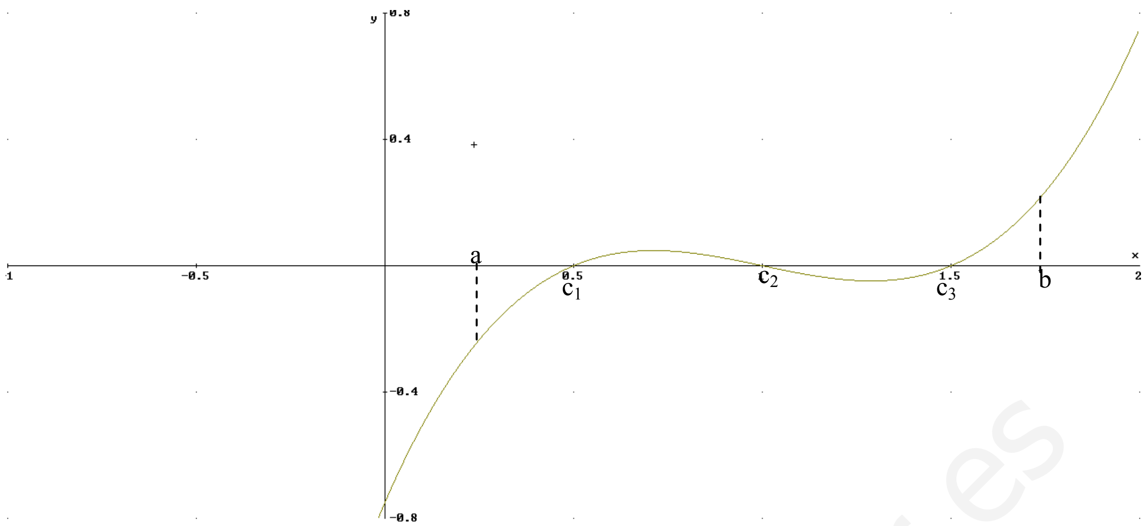
8.2 Teorema de Bolzano

Teorema de Bolzano: Si una función f(x) es continua en un intervalo [a,b] tal que f(a) y f(b) tienen distinto signo ($f(a)\cdot f(b)<0$), entonces existe al menos un punto $c\in(a,b)$ tal que f(c)=0.

Veámoslo gráficamente:



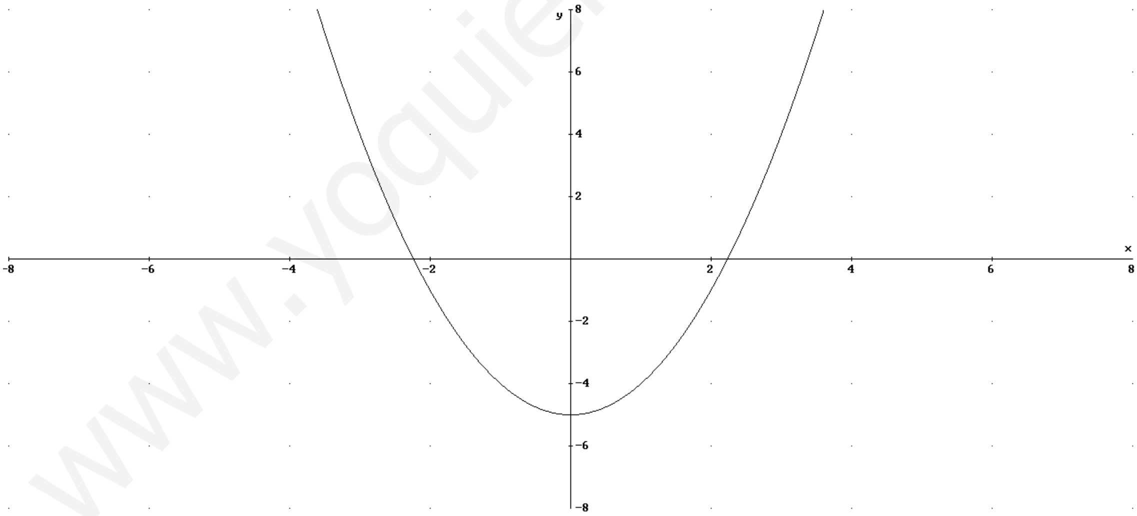
 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)



Vemos que el teorema de Bolzano nos asegura al menos una valor c tal que f(c)=0, pero como vemos puede ocurrir que no sea única. Para asegurar que sólo es única debemos además de aplicar Bolzano ver que la función en el intervalo (a,b) es siempre creciente o decreciente.

Nota: existen multitud de funciones que en el intervalo donde están definidas no cumplen Bolzano y cortan con el eje. El teorema de Bolzano asegura que existe el punto de corte, pero si no cumple Bolzano no se puede decir si exista o no. Veamos dos ejemplos:

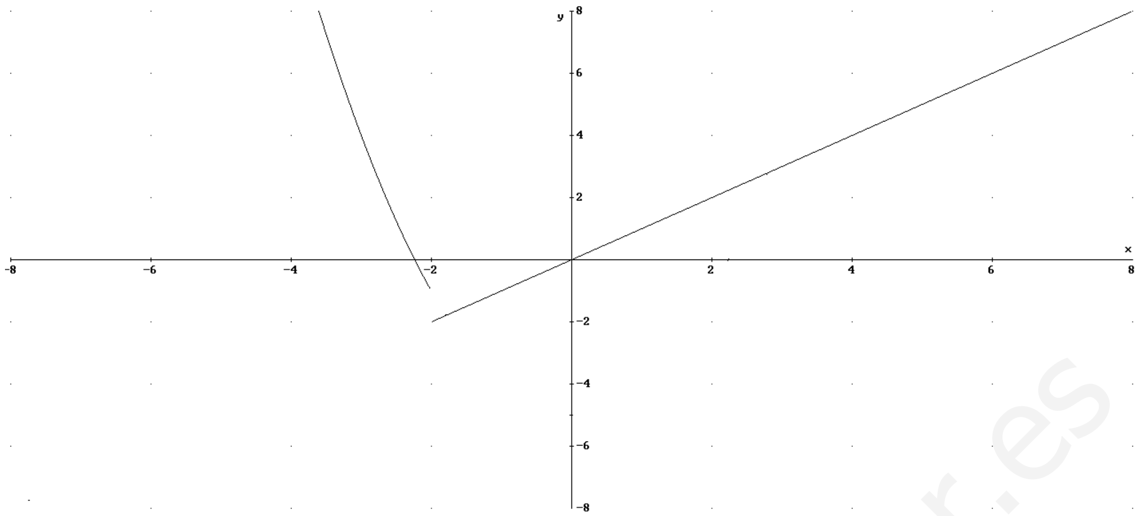
a) $f(x)=x^2-5$ en el intervalo [-3,3] no cumple Bolzano pues f(3)>0 y f(-3)>0 y en cambio si corta al eje OX



b) $f(x)=\begin{cases} x^2-5 & si \;\; x<2 \\ x & si \;\; x\geq 2 \end{cases}$ en [-4,2]. La función no continua en x=2:

$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2 \end{cases}$ no existe el limite, no continua en x = 2 y en cambio corta eje OX

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)



Ejercicio 15. Encontrar un intervalo donde la función f(x)=$\frac{x^5+x^4-1}{x-3}$ corte al eje x, es decir $f(x_0)=0$.

Tenemos que la función es continua en R-{3}. Busquemos un intervalo, que no contenga x=3, tal que el signo de sus extremos sea diferente.

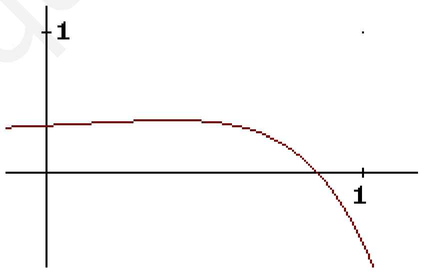
f(0)= 1/3>0 f(1)=-1/2<0

Así la función f(x) cumple Bolzano en [0,1]:

- es continua en este intervalo
- f(0)·f(1)<0

Luego $\exists$ c$\in$(0,1) : f(c)=0.

Veamos la función:



Ejercicio 16: Decir un intervalo de x donde la función f(x)=x^4-x+3 valga 8.

Tenemos que buscar una función igualada a cero: x^4-x+3=8 $\rightarrow$$x^4$-x-5=0. Si llamamos a x^4-x-5=g(x), tenemos que buscar un intervalo donde g(x)=0, es decir buscar el intervalo donde cumpla Bolzano:

1) Primera condición, continuidad: g(x) es continua en R,

2) Tenemos que buscar un intervalo [a,b] tal que g(a) y g(b) distinto signo. Sea [1,2] se cumple g(1)=-5 y g(2)=9 luego cumple Bolzano.

Existe c$\in$(1,2) tal que g(c)=0, y por tanto g(c)=5.

Ejercicios

Ejercicio 17: Estudia la continuidad de las siguientes funciones

a) f(x)= $\begin{cases} 5-\dfrac{|x|}{x} & si \;\; x\neq 0 \\ 5 & si \;\; x=0 \end{cases}$

El valor absoluto puede dividirse en dos partes: cuando lo que está dentro del valor es negativo este cambia de signo, y si es positivo no se cambia.

f(x)= $= \begin{cases} 5-\dfrac{-x}{x} & si \; x<0 \\ 5 & si \;\; x=0 \\ 5-\dfrac{x}{x} & si \;\; x>0 \end{cases} = \begin{cases} 6 & si \;\; x<0 \\ 5 & si \;\; x=0 \\ 4 & si \;\; x>0 \end{cases}$

$\lim_{x\to o} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to o^+} f(x) = 4 \\ \lim_{x\to o^+} f(x) = 6 \end{cases}$ *no existe*, discontinuidad de salto finito

f(x) es por tanto continua en R-{0}

b) g(x)= $\begin{cases} x^2-1 & si \;\; x\leq 2 \\ x+1 & si \;\; x>2 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, donde cada uno de ellos es un polinomio, que son continuos en R; De esta forma en el único punto que tenemos que estudiar la continuidad es en x=2, donde f(x) cambia de expresión analítica:

$\lim_{x\to 2} g(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^+} x+1 = 3 \\ \lim_{x\to 2^-} x^2-1 = 3 \end{cases} = 3$ =f(2).

Luego g(x) continua en R.

c) h(x)= $\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & si \;\; x\neq 3 \\ 6 & si \;\; x=3 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, uno de ellos es una fracción algebraica, así que en los puntos donde se anule el denominador puede no ser continua. Como coincide el punto donde se anula el denominador con el cambio de expresión analítica (x=3) sólo hay que estudiar la continuidad en este punto.

$\lim_{x\to 3} h(x) = \lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6$=f(3)=6

La función h(x) es continua en R

d) l(x)= $\begin{cases} 2x-1 & si \;\; x>-1 \\ 3 & si \;\; x\leq -1 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, en cada uno de ello la función es un polinomio, así que el único punto donde hay que estudiar la continuidad es en x=-1, allí donde cambia de expresión analítica:

$\lim\limits_{x\to -1} l(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} l(x) = 3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} l(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} 2x-1 = -3 \end{cases} \to \textit{No existe}$, luego no es continua en x=-1, de salto finito.

De esta forma l(x) continua en R-{-1}.

Ejercicio 18: Calcula el valor de k para que las siguientes funciones sean continuas en todo R

a) f(x)= $\begin{cases} sen(3x) & si \;\; x\leq \pi/2 \\ 2k+\cos(2x) & si \;\; x>\pi/2 \end{cases}$

Es una función definida a trozos; en cada uno de ellos las funciones son expresiones trigonométricas, continuas en R. Luego el único punto donde puede presentar discontinuidad es en x=π/2, allí donde la función cambia de expresión analítica. Veamos si f(x) es continua en π/2

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} 2k+\cos(2x) = 2k-1 \\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} sen(3x) = -1 \end{cases}$$

El límite existe si los límites laterales son iguales, esto ocurre si k=0. Además cuando k=0 se cumple f(π/2)=-1,y por tanto la función es continua en x=π/2

De esta forma la función es continua en R si k=0

b) g(x)= $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-2} & si \;\; x\neq 2 \\ k & si \;\; x=2 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, en uno de ellos la función es una fracción algebraica que puede no ser continua en los puntos donde se anual el denominador (x=2). Como este punto coincide con el punto donde la función cambia de expresión analítica, es el único punto donde tenemos que estudiar la continuidad de g(x).

$\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{4}{0}\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{4}{0^+} = \infty \end{cases}$ el límite no existe, así que indiferentemente del valor de k la función g(x) no es continua en x=2

c) k(x)= $\begin{cases} 1+|x| & si\ x<0 \\ k & si\ x=0 \\ \frac{3}{2}x+1 & si\ x>0 \end{cases}$

Como |x| está definido para valores negativos (x<0), es equivalente a sustituir |x| por –x:

k(x)= $\begin{cases} 1-x & si\ x<0 \\ k & si\ x=0 \\ \frac{3}{2}x+1 & si\ x>0 \end{cases}$

Es una función definida a trozos; en cada uno de ellos las funciones son polinomios, y estos son continuos en R. Luego el único punto donde puede presentar discontinuidad es en x=0, allí donde la función cambia de expresión analítica.

$$\lim_{x\to 0} k(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} 1+|x| = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{2}x+1 = 1 \end{cases} = 1$$

Para que sea continua ha de cumplir que k(0)= $\lim_{x\to 0} k(x)$. Por tanto k(x) será continua si k(0)=k=1 → k=1

e) $m(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2}{x-2} \ si\ x>3 \\ \frac{x+3}{x-4} + k\, si\, x \le 3 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, en cada uno de ellos las funciones son fracciones algebraicas, que no son continuas en los puntos donde se anulan el denominador. En la primera de ellas ocurre en x=2, pero como esa expresión analítica sólo existe para x>3, nuca tomará ese valor. La segunda se anula para x=4, pero como la expresión definida para x≤3 nunca tomará ese valor. Así que sólo hay que estudiar la continuidad en x=3, donde la función cambia de expresión analítica:

$$\lim_{x\to 3} m(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} \frac{x+3}{x-4} + k = -6+k \\ \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2+2}{x-2} = \frac{11}{1} = 11 \end{cases}$$ El límite existe si k=17. Además si k=17 m(3)=11 y por tanto continua en 3 y en todo R.

Ejercicio 19: Hallar el dominio y la continuidad de las siguientes funciones:

a) f(x)=|x^2-6x+5|

El dominio de la función f(x)=|x^2-6x+5| y su continuidad es todo R, ya que el valor absoluto de f(x) es continuo en los mismos puntos en los que sea continua la función x^2-6x+5, que es un polinomio.

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

b) $g(x)=\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}-2\sqrt{2}$.

El dominio de una raíz cuadrada son todos los puntos donde el radicando es positivo o cero. Como g(x) está definida a partir de suma la de tres funciones, el dominio será la intersección de los tres dominios. Veamos uno a uno por separado:

$\sqrt{4+x}$ Dom=[-4,∞)

$\sqrt{4-x}$ Dom=(-∞,4]

$2\sqrt{2}$ Dom=R

Dom(g(x))= [-4,∞)∩(-∞,4]∩R=[-4,4]

En los puntos del dominio la función es continua, pues el límite de la función coincide con el valor en el punto.

Ejercicio 20: Determinar los parámetros a y b para que la siguiente función sea continua en todo R

$$f(x)=\begin{cases} xe^{x^2} & si\ x\leq 0 \\ ax+b & si\ 0<x\leq 1 \\ 1+x\ln(x) & si\ x\geq 1 \end{cases}$$

Es una función definida a trozos, y en cada trozo la función es continua en su dominio de definición, ya que el único que no es continua en todo R es $1+x\ln(x)$, pero como está definida para x≥1 en este intervalo es continua.

Tendremos que ver la continuidad en x=0 y x=1 para asegurar que la función f(x) continua en todo R.

· Continuidad en x=0

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} xe^{x^2}=0\cdot 1=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} ax+b=b \end{cases}$$ El límite existe si b=0, además para este valor de b f(0)=0 y por tanto la función será continua

· Continuidad en x=1

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(1+x\ln(x))=1+1\cdot 0=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} ax=a \end{cases}$$ El límite existe si a=1, además para este valor f(a)=1 y por tanto la función será continua

Si a=1 y b=0 la función será continua en R

Ejercicio 21: Sean las funciones $f(x) = \begin{cases} 1 \ \ si \ \ x \in [0,1) \\ x \ \ si \ x \in [1, \infty) \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x+1 \ \ si \ x \in [0,2) \\ x \quad \ si \ \ x \in [2, \infty) \end{cases}$ estudiar la continuidad de f+g, f·g, f/g

Estudiemos la continuidad de las funciones f(x) y g(x)

Fácilmente se puede comprobar que f(x) es continua en todo el dominio de definición $[0,\infty)$, y g(x) continua en todos los puntos de definición menos en x=2, donde los límites laterales no coinciden, es decir en $[0,2)\cup(2,\infty)$.

a) (f+g)(x) por las propiedades de continuidad será continua en $[0,\infty)\cap([0,2)\cup(2,\infty))=$

$=[0,2)\cup(2,\infty)$

b) (f·g)(x) por las propiedades de continuidad será continua en $[0,\infty)\cap([0,2)\cup(2,\infty))=$

$=[0,2)\cup(2,\infty)$

c) (f/g)(x) por las propiedades de continuidad será continua en $[0,\infty)\cap([0,2)\cup(2,\infty))=$

$=[0,2)\cup(2,\infty)$, ya que g(x) no se anula para ningún valor de x

Ejercicio 22: Hallar y clasificar las discontinuidades de las siguientes funciones

a) $\mathbf{f(x)} = \dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$

Será continua en R menos en los puntos donde se anula el denominador es decir x=0 y x=2, por tanto $0,2 \notin$ Dom(f(x)). Veamos el límite en estos puntos para discernir el tipo de discontinuidad.

· En x=0

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-4}{x^2-2x} = \frac{-4}{0} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2-4}{x^2-2x} = \dfrac{-4}{-2\cdot 0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^{-+}} \dfrac{x^2-4}{x^2-2x} = \dfrac{-4}{-2\cdot 0^-} = -\infty \end{cases} \rightarrow salto \ \inf inito \ en \ x=0$$

· En x=2

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow evitable$$

b) $g(x) = \begin{cases} 2-x \ \ si \ x \le 0 \\ e^{-x} \quad si \ \ x > 0 \end{cases}$

Tanto 2-x como e^{-x} son continuas para todo R, luego la única posible discontinuidad puede ocurrir en x=0.

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 2-x = 2 \end{cases}$$ Discontinuidad de salto finito.

c) $f(x)=\begin{cases} 2 \ \ si \ x=0 \\ e^{-x} \quad si \ \ x\neq 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} e^{-x}=1\neq f(0)=2$ → Evitable

Ejercicio 23: Estudiar la continuidad de f(x)

$$f(x)=\begin{cases} \ln(-x) & si \quad x<-2 \\ sen(\pi x) & si \quad -2\leq x\leq 2 \\ 0 & si \quad 2<x<4 \\ x^2-12 & si \quad x\geq 4 \end{cases}$$

Función definida a trozos y en cada uno de ellos la función es continua en su dominio de definición, (ln(-x) es continua si x<0). Veamos la continuidad en los puntos donde cambia la expresión analítica:

En x=-2 → $\lim_{x\to -2} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to -2^+} f(x)=sen(-2\pi)=0 \\ \lim_{x\to -2^-} f(x)=\ln(2) \end{cases}$ Discontinua de salto finito

En x=2→ $\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 2^+} f(x)=0 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=sen(2\pi)=0 \end{cases}$ Continua en x=2

En x=4→ $\lim_{x\to 4} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 4^+} f(x)=16-12=4 \\ \lim_{x\to 4^-} f(x)=0 \end{cases}$ Discontinua de salto finito

Ejercicio 24: Demuestra:

a) x=xsen(x)+cos(x) tiene solución en [-π,π]:

Definimos f(x)= xsen(x)+cos(x)-x tal que

1. Es continua en R y por tanto en [-π,π].
2. f(-π)=-1+π>0, f(π)=0+1-π<0.

De esta forma cumple Bolzano → ∃c∈(-π,π): f(c)=0, es decir, la ecuación tiene solución en este entorno.

b) 3sen(x)=e^{-x}cos(x) en algún valor de x.

Definimos f(x)=e^{-x}cos(x)-3sen(x) tal que

1. es continua en R.
2. Tomamos el intervalo [0,π/2] → f(0)=1>0 f(π/2)=0-3<0.

Cumple Bolzano→ ∃c∈(0,π/2): f(c)=0, es decir la ecuación solución en este entorno.

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio 25: La función cotg(x) tiene distintos signos en los extremos del intervalo [3π/4, 5π/4] y sin embargo no corta el eje x. ¿Entonces contradice esto Bolzano?

No contradice Bolzano pues cotag(x) no es continua en $\pi \in [3\pi/4, 5\pi/4]$

Ejercicio 26: Demostrar $f(x)=x^3-8x+2$ corta al eje OX en (0,2). ¿se puede decir lo mismo de $\frac{2x-3}{x-1}$?

f(x) cumple:

1. Continua en (0,2)
2. f(0)=2>0, f(2)=-6<0

Luego cumple Bolzano → $\exists c \in (0,2)$: f(c)=0

No podemos decir lo mismo de $\frac{2x-3}{x-1}$, pues en $x=1 \in (0,2)$ no es continua.

Ejercicio 27: Sea f(x) una función que cumple f(-2)<0 y f(0)>0 ¿Es siempre cierto que existe un valor c en (-2,0) tal que f(c)=0

Si f(x) es continua en el intervalo [-2,0] podemos asegurar que se cumple dicha afirmación (por el teorema de Bolzano). Sino no es así no podemos asegurar tal afirmación. Lo cual no contradice que alguna función discontinua en donde $f(a)\cdot f(b)<0$ esta corte al eje x en (a,b)

Ejercicio 28: Estudiar el dominio y discontinuidad de $f(x)=\ln((x+2)/x^2)$

Pasos:

1) Dominio de $(x+2)/x^2$ → R-{0}

2) Al ser un logaritmo→ $(x+2)/x^2>0$: Como x^2 siempre positivo tenemos que ver cuándo (x+2)>0, esto ocurre en el intervalo (-2,∞)

De esta forma el dominio será (-2,∞) menos el punto x=0→Dom(f(x))=(-2,0)∪(0,∞).

En todos los puntos del dominio la función es continua pues, el límite existe y coincide con el valor de la función en el punto.

Ejercicio 29: Hallar a y b para que f(x) cumpla Bolzano en [-π,π]. Hallar c que cumple Bolzano

$$f(x)=\begin{cases}\cos(x) & si\ \ -\pi\leq x\leq 0\\ a+x^2 & si\ \ 0<x<1\\ \dfrac{b}{x} & si\ 1\leq x\leq \pi\end{cases}$$

Para que cumpla Bolzano tenemos que obligar a la función a que sea continua en [-π,π], y por tanto en x=0 y x=1

En x=0 : $\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 0^-} f(x)=\cos(0)=1\\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=a+0=a\end{cases}$ → a=1

En x=1: $\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 1^-} f(x)=1^2+1=2\\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{b}{1}=b\end{cases}$ → b=2

Si a=1 y b=2 la función es continua en [-π,π], veamos ahora que cumple la segunda condición:

f(-π)=-1<0

f(π)=1/π>0

Luego cumple Bolzano ∃c∈(-π,π): f(c)=0

Busquemos el valor c:

a) Veamos si c∈[-π,0]→ cos(c)=0 → c=-π/2

b) Veamos si c∈[0,1]→1+x^2=0 no solución

c) Veamos si c∈[1,π]→2/x=0 no solución

Ejercicio 30: Demuestra que la ecuación π^x =e tiene solución en (0,1), ¿lo cumple también ϕ^x=e?

a) π^x=e solución en (0,1)→ definimos f(x)=π^x-e, se cumple:

a) Continua en [0,1]

b) Además f(0)=1-e<0 y f(1)=π-e>0

Al cumplir Bolzano ∃c: (0,1): f(c)=0, y por tanto la ecuación tiene solución en (0,1)

b) ϕ^x=e solución en (0,1) → definimos f(x)= ϕ^x-e, se cumple:

a) continua en [0,1]

b) pero f(0)=1-e<0 y f(1)= ϕ-e<0

Luego no cumple Bolzano y no podemos asegurar que la ecuación tenga solución.

Ejercicios de la P.A.U.

Junio de 2004.Prueba A

C-2: Demuéstrese que las gráficas de las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=\frac{1}{x}$ se cortan en un punto si $x>0$

Si se cortan $f(x)=g(x)$.

Definimos $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-1/x$. Si $h(x)=0$ entonces $f(x)=g(x)$ y las funciones se cortarán.

Veamos que $h(x)$ cumple Bolzano, y por tanto $h(x)=0$:

a) Es continua para $x>0$ (no se anula el denominador).
b) Busquemos un intervalo donde cumpla Bolzano, por ejemplo $[0.1,1]$: $h(0.1)=e^{0.1}-1<0$; $h(1)=e-1>0$

Luego cumple Bolzano $\exists c\in(0.1,1)$: $h(c)=0$, y por tanto $f(c)=g(c)$, cortándose en c estas dos funciones

Junio de 2005. Prueba B

C-3.- Estúdiese, según los valores de los números reales α y β, la continuidad de la función *f* definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\alpha}{1+e^{1/x}} & \text{si } x\neq 0\\ \beta & \text{si } x=0\end{cases}.$$

La función $\dfrac{x+\alpha}{1+e^{1/x}}$ es continua en R-{0}, pues $1+e^{1/x}$ nunca se anula. El único problema está en x=0, al anularse el denominador del exponente. Por otro lado en x=0 la función cambia de expresión analítica, luego es el único punto donde tenemos que estudiar la continuidad:

Continua en x=0 si $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=\beta$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x+\alpha}{1+e^{1/x}}=\frac{\alpha}{1+e^{1/0}}=(ind)=\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x+\alpha}{1+e^{1/x}}=\dfrac{\alpha}{1+e^{1/0^+}}=\dfrac{\alpha}{\infty}=0\\ \lim_{x\to 0^-}\dfrac{x+\alpha}{1+e^{1/x}}=\dfrac{\alpha}{1+e^{1/0^-}}=\dfrac{\alpha}{1}\end{cases}$$

Para que exista el límite α=0. Si α=0 $\lim_{x\to 0} f(x)$=0.

Por otro lado para ser continua f(0)= $\lim_{x\to 0} f(x)$ → β=0

Luego si β=0 y α=0 la función será continua en x=0, y por lio tanto en todo R.

Septiembre de 2006. Prueba A

PR2. b) Pruébese que la ecuación $3x = e^x$ tiene alguna solución en $(-\infty,1]$

Definamos la función $f(x)=3x-e^x$; si demostramos que $f(x)=0$ en $(-\infty,1]$, entonces se cumplirá la ecuación. Para esto apliquemos Bolzano:

a) f(x) es continua en R y por tanto continua en todo el intervalo
b) busquemos el intervalo [a,b] comprendido en $(-\infty,1]$ y tal que $f(a)\cdot f(b)<0$. Por ejemplo [0.5, 1]: $f(1)=3-e<0$, $f(0.5)=1.5-e^{0.5}>0$.

Así f(x) cumplirá Bolzano en [0.5, 1], y por lo tanto, existe al menos un valor $c\in(0.5,1)$, luego $c\in(-\infty,1]$ tal que $f(c)=0$, es deci se cumple la ecuación.

Junio de 2007.Prueba A

C-4. Demostrar que las curva f(x)=sen(x) y g(x)=1/x se cortan en algún punto del intervalo $(2\pi, 5\pi/2)$

Si f(x) y g(x) se cortan en algún punto → f(x)=g(x) → sen(x)=1/x . Para poder aplicar Bolzano pasamos 1/x al otro miembro → $\underbrace{sen(x)-\frac{1}{x}}_{h(x)}=0$. De esta forma resolver la ecuación es lo mismo que ver que h(x)=0.

Apliquemos Bolzano a h(x) en el intervalo marcado $(2\pi,5\pi/2)$:

a) Continua en $[2\pi,5\pi/2]$, ya que h(x) es continua en todos los reales menos en el 0, y $0\notin[2\pi,5\pi/2]$.

b) $h(2\pi)=sen(2\pi)-1/(2\pi)=-1/(2\pi)<0$, $h(5\pi/2)=sen(5\pi/2)-1/(5\pi/2)=1-2/(5\pi)>0$

Luego cumple Bolzano, y por lo tanto, existe un punto $c\in(2\pi,5\pi/2)$ tal que h(c)=0, y por ello en este punto se cumple la igualdad f(c)=g(c), cortándose las dos gráficas

Junio de 2007.Prueba B

PR-2 (b) Demostrar que existe algún número real c tal que $c+e^{-c} = 4$.

Si modificamos la igualdad → $\underbrace{x+e^{-x}-4}_{f(x)}=0$ tendremos que la ecuación solución si existe un punto c tal que f(x)=0,es decir si podemos aplica Bolzano:

a) Continua en R, luego podemos tomar cualquier intervalo para aplicar Bolzano

b) Busquemos el intervalo f(0)=1-4<0. Si tomamos x=4, como e^{-x} siempre es positivo entonces $f(4)=4+e^{-4}-4>0$.

Luego cumple Bolzano en [0.4], y por lo tanto, existe $c\in(0,4)$ tal que f(c)=0, y entonces $c+e^{-c}=4$ solución en (0,4).

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

C1. Hallar a y b para que f(x) continua en todo R

$$f(x)=\begin{cases} a+x\ln(x) & si\ \ x>0 \\ b & si\ x=0 \\ \dfrac{sen(\pi x)}{x} & si\ \ x<0 \end{cases}$$

La función xln(x) es continua si x>0 y $\frac{sen(\pi x)}{x}$ es continua en x<0, pues no toma el valor x=0. De esta forma, en cada trozo las funciones son continuas en los dominios de definición. Por esta razón sólo hay que estudiar la continuidad en x=0

Continuidad en x=0. Será continua si $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = (*) = \pi \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = (*) = a \end{cases}$ → el límite existe si a=π y valdrá $\lim_{x\to 0} f(x)$=π

(*) Calcularemos estos límites en el tema 12 (Teorema de L'Hopital)

f(0)=b, como $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ →b=π

De esta forma si a=π y b=π la función es continua en x=0, y por lo tanto en todo R.

Tema 12. Derivabilidad de funciones.

1. Tasa de Variación media. Derivada en un punto. Interpretación

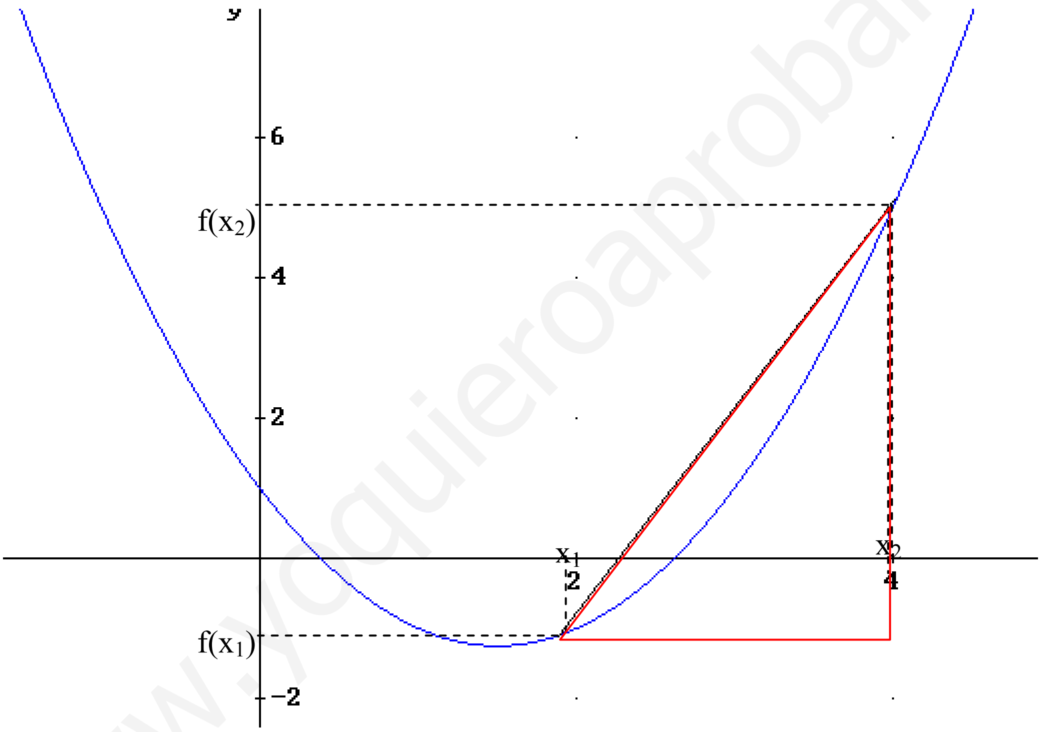
1.1 Tasa de variación Media

Definición: se llama tasa de variación media de una función f(x) entre los valores x_1 y x_2 al cociente entre el incremento que experimenta la variable dependiente "y", y la variable independiente "x":

$$T_{vm}(x_1,x_2,f(x))=\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{x_1,x_2}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Interpretemos gráficamente su significado:

Ejemplo: $f(x)=x^2-3x+1$



Veamos la tasa de variación media entre 2y 4: $\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{2,4}=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{5-(-1)}{4-2}=3$

Para interpretar $\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{x_1,x_2}$ fijémonos en el triángulo rectángulo rojo de la imagen, donde los catetos son $(f(x_2)-f(x_1))$ y (x_2-x_1). De esta forma $\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{x_1,x_2}$ es el cociente de los dos catetos, y así $\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{x_1,x_2}$ es la tangente del ángulo que forma la recta que une los puntos $(x_1,f(x_1))$ y $(x_2,f(x_2))$ con el eje x, y por tanto $\left[\frac{\Delta f}{\Delta x}\right]_{x_1,x_2}$ es la pendiente de dicha recta

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

1.2 Definición de derivada de una función en un punto

Definición: la derivada de una función f(x) en el punto x_0, se denota como $f'(x_0)$, es la tasa de variación instantánea, es decir:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Generalmente suele ser más fácil calcular esta derivada a partir de la segunda igualdad de la definición.

Una *función es derivable en un punto* cuando el límite existe, aunque este sea ∞ o -∞.

Ejemplos:

a) $f(x)=x^2+1$ en x=2

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left((2+h)^2+1\right)-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+4}{1}=4$$

La función f(x) es derivable en x=2 y f'(2)=4

b) $f(x)=|x-1|=\begin{cases} x-1 & si\ x>1 \\ -x+1 & si\ x\leq 1\end{cases}$ en x=1

$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h-1)-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$

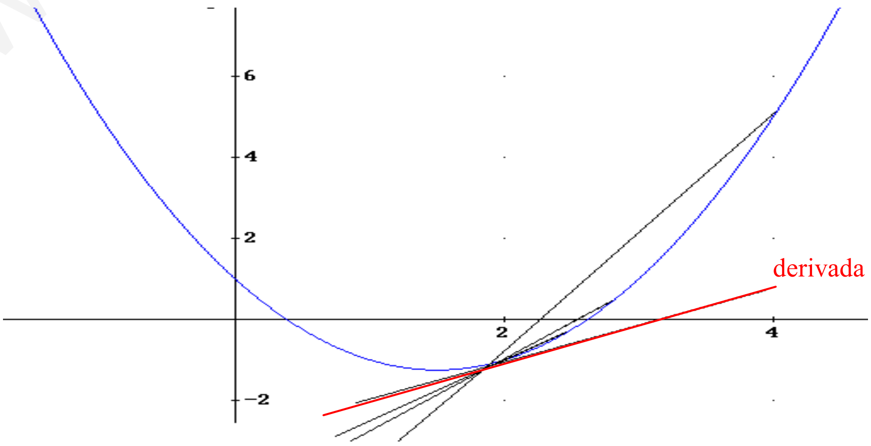
$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-(1+h)+1-0}{h}=\lim_{h\to 0^{-+}}\frac{-h}{h}=-1$

No existe el límite por tanto la función f(x) no es derivable en x=1.

Nota: las funciones *valor absoluto* no son derivables en los puntos de x donde se anulan. En estos puntos las derivadas laterales son de distinto signo.

1.3 Interpretación geométrica de la derivada

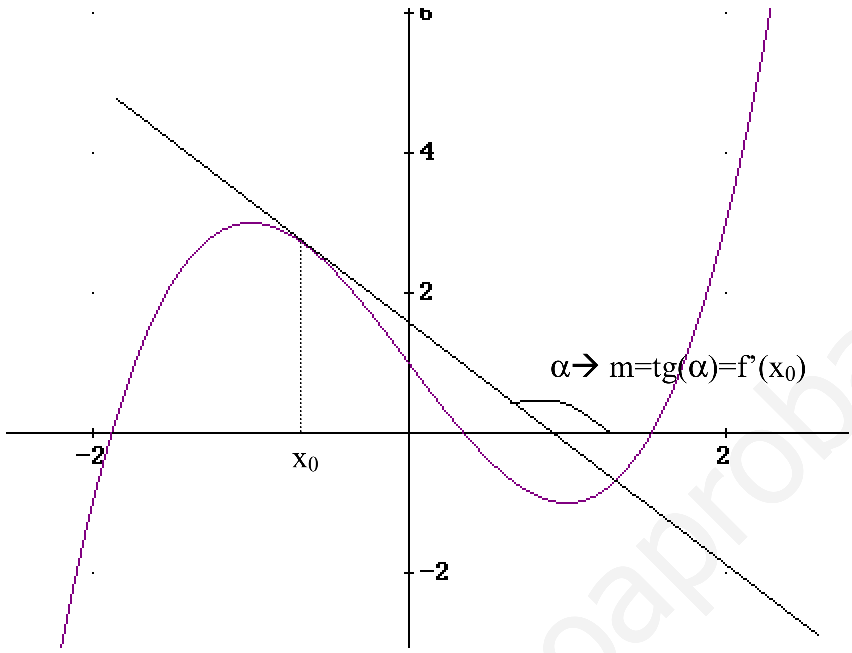
En el apartado 1.1 vimos que la tasa de variación media se interpretaba como la pendiente de la recta que unía los dos puntos. La derivada es el límite de la variación media cuando los puntos se acercan infinitamente, veamos esto de forma gráfica en x=2



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Como vemos en la gráfica anterior si nos acercamos infinitamente al punto la recta que une los dos puntos tiende a ser la recta tangente a la función.

Por tanto ***la derivada en x_0 de f(x), es decir $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto (x_0, $f(x_0)$).***



Conclusión: *$f'(x_0)=tg(\alpha)=m_{recta\ tangente\ en\ xo}$*

Conociendo la pendiente de la recta y el punto por el que pasa (x_0,f(x_0)) es fácil calcular la ecuación de la recta tangente y normal (la pendiente es -1/m=-1/f'(x_0)):

· ***Ecuación de la recta tangente a la función f(x) en x_0:***

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

· ***Ecuación de la recta normal a la función f(x) en x_0:***

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

Ejemplo: calcular la recta tangente y normal a la curva $y=f(x)=x^2+3x$ en el punto de abscisa $x_0=1$

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2+3(1+h)-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+5h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+5}{1}=5$$

$m_{recta\ tang}=f'(1)=5$ y el punto es P (1,f(1) $\rightarrow$ P(1,4)

recta tangente $\rightarrow$ y-f(1)=f'(1)(x-1)   y-4=5(x-1)   y=5x-1

recta normal $\rightarrow$ $y-f(1)=-\frac{1}{f'(1)}(x-1)$ $y-4=-\frac{1}{5}(x-1)$ $y=-\frac{1}{5}x+\frac{21}{5}$

2. Continuidad y derivabilidad

Teorema: toda función f(x) derivable en un punto, es continua en este punto. El contrario no siempre es cierto para toda función.

Ejemplo: como vimos la función $f(x)=x^2+1$ era derivable en x=2 (existe el límite $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$) luego es continua en x=2

Nota: Todas las funciones polinómicas, son continuas y derivables en todos los puntos.

Veamos otros dos ejemplos donde el recíproco al teorema no es cierto, son continuas y no derivables:

a) $f(x)=|x-1|=\begin{cases} x-1 & si\ x>1 \\ -x+1 & si\ x\leq 1\end{cases}$ en x=1 es continua → $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=0$

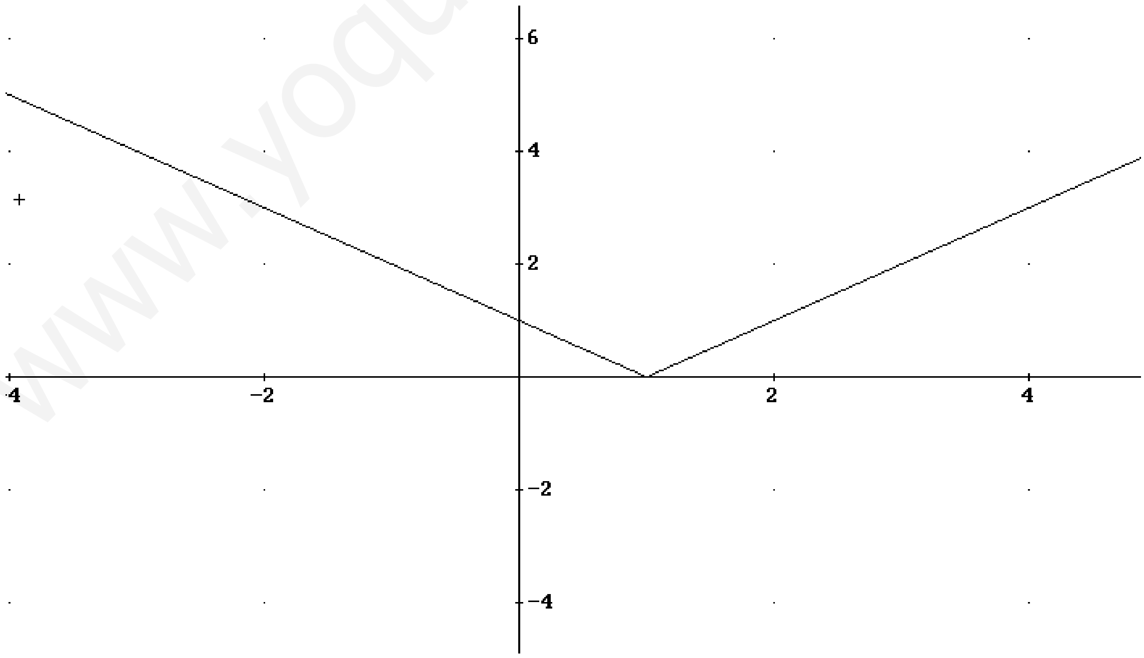
en x=1 no es derivable (ver página 3)

b) $g(x)=\sqrt[3]{x^2}$ en x=0 es continua pero no es derivable :

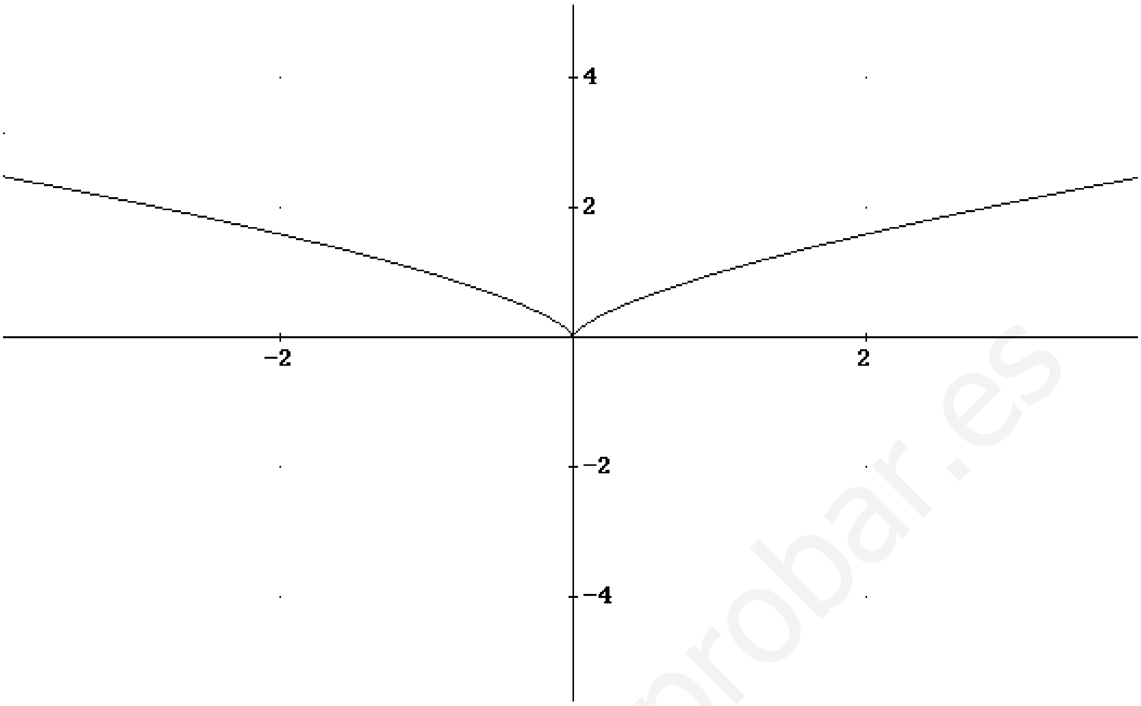
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^2}-0}{h}=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}h^{-1/3}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{h}}=+\infty \\ \lim\limits_{h\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0^{-+}}h^{-1/3}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{1}{\sqrt[3]{h}}=-\infty\end{cases}$$

Veamos la representación gráfica de estas dos funciones no derivables, y veremos su interpretación gráfica:

a) f(x)=|x-1|



b) g(x)= $\sqrt[3]{x^2}$



Gráficamente vemos que en los puntos donde la función no es derivable existe un "**pico**" o punto anguloso que nos indica el cambio de pendiente de la recta tangente en dichos puntos (límites laterales son diferentes).

Ejercicio 1: Sea la función f(x)=$\begin{cases} \sin x & si\ \ x \leq 0 \\ x^2 + ax + b & si\ x > 0 \end{cases}$ calcular a y b para que f(x) sea continua y derivable.

La función está definida a trozos pero tanto sen(x) como $-x^2$+ax+b son continuas y derivables en todos los puntos, luego punto donde hay que estudiar la continuidad y derivabilidad es x=0 donde la función cambia de expresión algebraica

a) Continuidad:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = sen(0) = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{continua\ \ si} b = 0$$

Luego si b=0 independientemente del valor de a la función es continua

b) Derivabilidad

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{-h^2+ah-0}{h} = a \\ \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{sen(h)-0}{h} = (L'Hopital) = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{derivable\ \ si} a = 1$$

Otro método más sencillo: cuando la función es continua podemos derivarla (veremos cómo se deriva en el apartado 4) :

$$f'(x)=\begin{cases}\cos(x) & si\ \ x\leq 0\\ -2x+a & si\ \ x>0\end{cases}$$

La función será derivable en el punto x=0 si existe el límite $\lim_{x\to 0} f'(x)$, aunque este sea infinito.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^+} f'(x)=a\\ \lim_{x\to 0^-} f'(x)=\cos(0)=1\end{array}\right\}\xrightarrow{derivable\ si} a=1$$

3. Función derivada. Derivadas sucesivas

3.1 Función derivada

Cuando la función f(x) es continua podemos obtener su función derivada f'(x). La función derivada, f´(x), para cada valor de x nos da el valor de la derivada en ese punto, es decir la pendiente de la recta tangente en dicho punto.

$$\begin{array}{ll} f: R\longrightarrow R & \qquad f': R\longrightarrow R\\ \quad x\longrightarrow f(x) & \qquad \quad x\longrightarrow f'(x)\end{array}$$

A la función f'(x) se le llama ***función derivada*** de f(x), tal que si somos capaces de calcular esta función la derivada de f(x) en un punto x_0 es f´(x_0), es decir la imagen de f´(x) en el punto x=x_0.

A partir de definición de derivada la función f(x) se obtiene aplicando la definición de derivada para una x genérica:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Calculo de alguna función derivada:

1) f(x)=x^2-3x →

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-3(x+h)-x^2+3x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2hx-3xh}{h}=2x-3$$

2) f(x)=K (cte)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

Si bien para el cálculo de la función derivada veremos en el siguiente apartado la tabla de derivadas y las reglas necesarias para realizar cualquier tipo de derivada.

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

3.2 Derivadas de orden superior

En todos los puntos del dominio de f'(x) (donde f(x) es derivable) podemos considerar otra función f ''(x), que asigna a cada punto de x el valor de la derivada de f'(x) en este punto.

$$f'': R \longrightarrow R \qquad\qquad f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$
$$x \longrightarrow f''(x)$$

La función así definida recibe el nombre de ***segunda derivada*** de f(x), f´´(x). De forma análoga podemos definir la tercera derivada f´´´(x), cuarta $f^{(IV}(x)$, etc.

4. Derivada de funciones elementales. Operaciones con derivadas

4.1 Derivadas de las funciones elementales

Se puede calcular a partir de la definición vista en el apartado anterior la función derivada de las funciones elementales. Veamos en la siguiente tabla la derivada de algunas funciones elementales.

Derivada elementales		
Función	**Función derivada**	**Ejemplo**
f(x)=K	f´(x)=0	f(x)=-e → f´(x)=0
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}} \rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	
$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x\ln(a)$	$f(x)=5^x \rightarrow f'(x)=5^x\ln(5)$
f(x)=ln(x)	f´(x)=1/x	
$f(x)=\log_a(x)$	$f'(x)=\frac{1}{x\ln(a)}$	$f(x)=\log_3(x) \rightarrow f'(x)=\frac{1}{x\ln(3)}$
f(x)=sen(x)	f´(x)=cos(x)	
f(x)=cos(x)	f´(x)=-sen(x)	
f(x)=tg(x)	$f'(x)=1+tg^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$	
f(x)=arc sen(x)	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
f(x)=arc cos(x)	$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	
f(x)=arc tg(x)	$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$	

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

4.2 Operaciones con derivadas

Aplicamos la definición de la derivada y las propiedades de los límites se obtienen las reglas que permiten derivar funciones que son resultado de operar con otras funciones derivables.

Para ver las propiedades de las derivadas veamos otra tabla:

Propiedades de las derivadas	
Propiedad	**Ejemplo**
Suma: (f+g)´(x)=f´(x)+g´(x)	$(x^2-x+\cos(x)+e^x)'=2x-1-\text{sen}(x)+e^x$
Constante por una función: (kf)´(x)=kf´(x)	$(5\text{arc sen}(x))'=\dfrac{5}{\sqrt{1-x^2}}$
Producto: (f·g)´(x)=f´(x)·g(x)+f(x)·g´(x)	$(5x\cdot\text{sen}(x))'=5\text{sen}(x)+5x\cdot\cos(x)$
Cociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$	$\left(\dfrac{7x}{\ln(x)}\right)'=\dfrac{7\ln(x)-7x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2(x)}=\dfrac{7\ln(x)-7}{\ln^2(x)}$
Función compuesta(g∘f)´(x)=(g(f(x))´=g´(f(x)·f´(x)	$\left(e^{\cos^2(x^3)}\right)'=e^{\cos^2(x^3)}\cdot 2\cdot\cos(x^3)\cdot(-sen(x^3))\cdot 3x^2$

A partir de las derivadas elementales y de las propiedades de las derivadas es sencillo calcular la derivada de toda función, sólo hay que aplicar las propiedades con orden.

Ejercicio 2: calcular las derivadas siguientes

a) $D[(x^2-3)^5]=5(x^2-3)^4\cdot 2x=10x\cdot(x^2-3)^4$

b) $D[(3x)^{1/3}]=\dfrac{1}{3}(3x)^{-2/3}\cdot 3=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x)^2}}$

c) $D[x\cdot 4^x]=4^x+x\cdot 4^x\cdot\ln(4)$

d) $D[(e^{2x}+3)^4]=4\cdot(e^{2x}+3)^3\cdot(2\cdot e^{2x})=8\cdot(e^{2x}+3)^3\cdot(e^{2x})$

e) $D[\ln(2-3x^2)^4]=\dfrac{1}{(2-3x^2)^4}\cdot 4(2-3x^2)^3(-6x)=\dfrac{-24x}{2-3x^2}$

f) $D\left[\dfrac{2}{(x^3-3x^2)^6}\right]=\left[\dfrac{-2\cdot 6\cdot(x^3-3x^2)^5(3x^2-6x)}{(x^3-3x^2)^{12}}\right]=\dfrac{-12\cdot(3x^2-6x)}{(x^3-3x^2)^7}$

g) $D\left[\dfrac{1}{\sqrt{4-5x^2}}\right]=\dfrac{-\frac{1}{2}(4-5x^2)^{-1/2}\cdot(-10x)}{4-5x^2}=\dfrac{5x}{(4-5x^2)\cdot\sqrt{4-5x^2}}=\dfrac{5x}{\sqrt{(4-5x^2)^3}}$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

h) $D\left[(4x+2)\sqrt{4x-2}\right]=4\sqrt{4x-2}+(4x+2)\cdot\frac{4}{2\sqrt{4x-2}}=4\sqrt{4x-2}+(4x+2)\cdot\frac{2}{\sqrt{4x-2}}=\frac{24x-4}{\sqrt{4x-2}}$

i) $D[\text{sen}^4(x)]=4\cdot\text{sen}^3(x)\cdot\cos(x)$

j) $D[\text{sen}(x^4)]=\cos(x^4)\cdot 4x^3$

k) $D\left[\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^3\right]=3\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2\cdot\left(1-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)=3\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

l) $D[\text{sen}^2(x^2)]=2\text{sen}(x^2)\cdot\cos(x^2)\cdot 2x= 4x\cdot\text{sen}(x^2)\cdot\cos(x^2)$

m) $D\left[arc\,sen\left(\sqrt{x-1}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2-x}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}$

n) $D\left[\sqrt{\frac{1+7x}{1-7x}}\right]=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+7x}{1-7x}}}\cdot\frac{7\cdot(1-7x)-(-7)\cdot(1+7x)}{(1-7x)^2}=\frac{14}{2\cdot(1-7x)^2}\sqrt{\frac{1-7x}{1+7x}}=\frac{7}{\sqrt{(1+7x)(1-7x)^3}}$

o) $D\left[arc\,tg(\sqrt{x})\right]=\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\cdot(1+x)\sqrt{x}}$

p) $D\left[\ln\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)\right]=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)-\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)^2}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2}=\frac{1}{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$=\frac{1}{x\sqrt{x}-x+x-\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}$

q) $D\left[sen^3(2x)\cdot\cos^2(3x)\right]=3\cdot sen^2(2x)\cdot\cos(2x)\cdot 2\cdot\cos^2(3x)-sen^3(2x)\cdot 2\cos(3x)\cdot sen(3x)\cdot 3=$

$=6\cdot sen^2(2x)\cdot\cos(2x)\cdot\cos^2(3x)-6\cdot sen^3(2x)\cdot\cos(3x)\cdot sen(3x)$

r) $D\left[arc\,sen(tg(x))\right]=\frac{1+tg^2(x)}{\sqrt{1-tg^2(x)}}$

Ejercicios del tema

Ejercicio 3: Estudiar la derivabilidad de $y=f(x)=\sqrt[3]{3x^2-x^3}$.

La función es continua en R, pues es una raíz cúbica que existe para números negativos. Veamos la derivabilidad:

$$f'(x)=\frac{1}{3}(3x^2-x^3)^{-2/3}(6x-3x^2)=\frac{2x-x^2}{\sqrt[3]{9x^4+x^6-6x^5}}=\frac{2-x}{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}=$$

Se anula el denominador en x=0 y x=3, estudiemos la derivabilidad en estos puntos

x=0

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{2-x}{\sqrt[3]{9x+x^3-6x^2}}=\begin{cases} f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2-x}{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}=\dfrac{2}{0^+}=\infty \\ f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2-x}{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty \end{cases}$$ No derivable

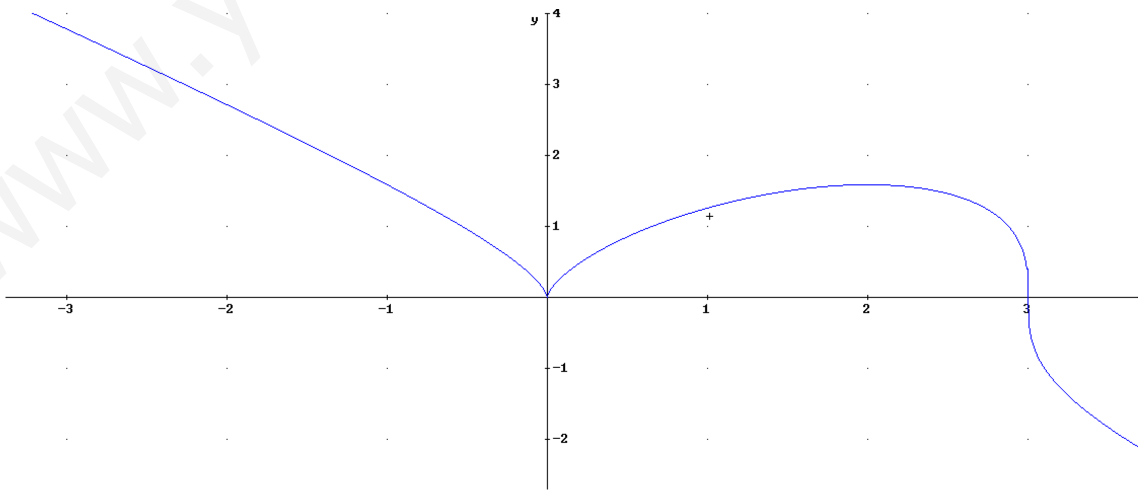
x=3

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{2-x}{\sqrt[3]{9x+x^3-6x^2}}=\begin{cases} f'(3^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2-x}{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty \\ f'(3^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2-x}{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}=-\dfrac{1}{0^+}=-\infty \end{cases}$$ derivable m=-∞,

es decir la tangente es una recta paralela al eje OY.

Nota: una función derivable en un punto si existe la derivada, aunque esta sea infinito.

Veamos la gráfica para interpretar los resultados en x=0 y x=3



Ejercicio 4: estudiar la derivabilidad de $y = g(x) = \frac{x}{1+e^{1/x}}$ en x=0.

Veamos primero la continuidad:

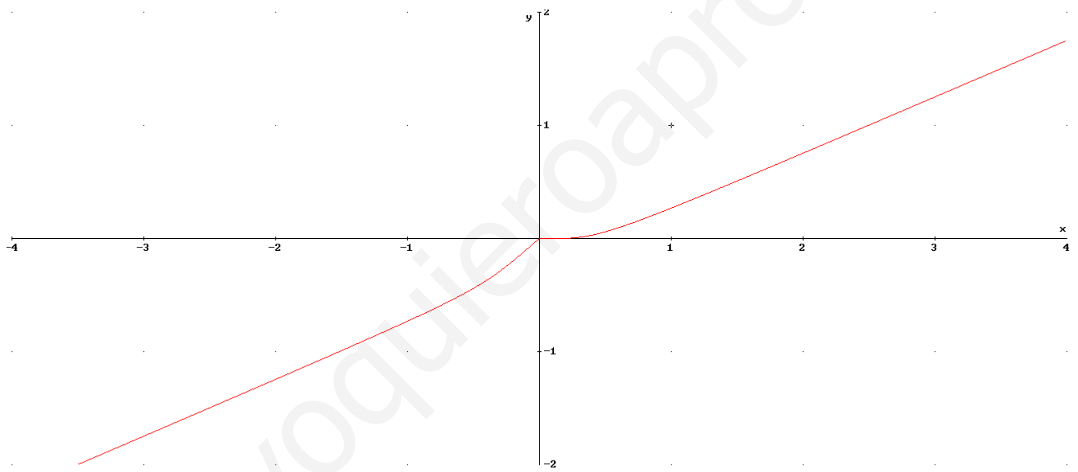
$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{1+e^{1/x}} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{1+e^{1/x}} = \dfrac{0}{1+\infty} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1+e^{1/x}} = \dfrac{0}{1+0} = 0 \end{cases} \text{ Continua}$$

Veamos ahora la derivabilidad por la definición:

$$g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{1+e^{1/h}}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{(1+e^{1/h})} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1}{(1+e^{1/h})} = \dfrac{1}{1+\infty} = 0 \\ \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{1}{(1+e^{1/h})} = \dfrac{1}{1+0} = 1 \end{cases}$$

No es derivable en x=0

Veamos la gráfica:



Ejercicio 5: Deriva la función f(x)= ln(cos(x))+x·e^{2x}

$$f'(x) = -\frac{sen(x)}{\cos(x)} + e^{2x} + 2x\cdot e^{2x} = -tg(x) + e^{2x}(1+2x)$$

Ejercicio 6: Calcula un punto de la función f(x)=x^2+x+5 en la que la recta tangente sea paralela a la recta y=3x-2

Si la rectas son paralelas misma pendiente, luego la recta tangente tiene pendiente m=3, por tanto buscamos el punto donde f'(x)=3 → f'(x)=2x+1=3 → x=1→ P(1,f(1))=(1,7)

Ejercicio 7: Hallar b y c para que f(x) sea continua y derivable en (0,2)

$$f(x)=\begin{cases} x^3-12x+1 & si\ 0\leq x\leq 1 \\ 20x^2+bx+c & si\ 1<x\leq 2 \end{cases}$$

1. Continuidad: las funciones definidas en los dos trozos son polinomios y por tanto el único punto hay que estudiar la continuidad es en x=1.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-10 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=20+b+c \end{cases} \quad -10=20+b+c$$

2. Derivabilidad: si b y c cumplen la anterior ecuación f(x) continua y podemos calcular la derivada en todos los puntos del dominio

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-12 & si\ 0\leq x\leq 1 \\ 40x+b & si\ 1<x\leq 2 \end{cases}$$

Volvemos a tener dos polinomios, así que el único punto donde tenemos que estudiar la continuidad es en x=1:

$$\lim_{x\to 1} f'(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=-9 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=40+b \end{cases} \quad -9=40+b$$

Resolviendo el sistema b=-49 y c=19

Ejercicio 8: Dada la función f(x) a) hallar a, b para que f(x) sea continua. b) Calcular los puntos donde es derivable)

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si\ \ x\leq 0 \\ \sqrt{ax+b} & si\ \ 0<x\leq 2 \\ \dfrac{-x}{2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}} & si\ \ x>2 \end{cases}$$

a) Las funciones x^2+2 y $\dfrac{-x}{2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ son continuas en R. La función $\sqrt{ax+b}$ será continua en (0,2] dependiendo de a y b. Veamos los valores de a y b para que sea continua en 0 y 2

$$\underline{x=0} \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\sqrt{b} \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=2 \end{cases} \rightarrow b=4$$

$$\underline{x=2} \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\sqrt{2a+4} \end{cases} \rightarrow a=-1$$

Para estos valores de a y b $\sqrt{-x+4}$ es continua en (0,2] ya que –x+4 en este intervalo es mayor de cero.

Luego si a=-1 b=4 la función f(x) continua en R, y podemos calcular f'(x)

b) f'(x)= $\begin{cases} 2x & si\ x \leq 0 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{-x+4}} & si\ \ 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} & si\ x > 2 \end{cases}$

Derivabilidad en x=0 → $f'(0) = \begin{cases} f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0 \\ f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$ → No derivable

Derivabilidad en x=2 → $f'(2) = \begin{cases} f'(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} \\ f'(2^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$ → derivable en x=2

Luego f(x) derivable en R-{0}

Ejercicio 9: Calcular los puntos donde la recta tangente a $y=2x^3+3x^2-30x-6$ paralela a la recta y=6x-5

Si es paralela tienen misma pendiente, es decir m=6. Como la pendiente de la recta tangente es f'(x) se tiene que cumplir que f'(x)=6

$f'(x)=6x^2+6x-30=6$ → $x_1=2$, $x_2=-3$.

$P_1(2,f(2))=(2,-38)$

$P_2(-3,f(-3))=(-3,57)$

Ejercicio 10: Dada la función $f(x)=x^2-4x+3$ encontrar los puntos donde la recta tangente a esta función sea paralela a la recta que corta la curva en x=1, x=4

Si son paralelas tienen la misma pendiente, calculemos las dos pendientes

Pendiente recta secante en x01, x=4→ m=$\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1} = \dfrac{3-0}{3} = 1$

Pendiente rectas tangentes f'(x)=2x-4

Luego 2x-4=1 → x=5/2 P(5/2,-3/4)

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio 11: Hallar los valores de a y b para que la recta tangente a la curva con función $y=x^2+bx+c$ en el punto P(3,0) sea perpendicular a y=-0.5x+3

Primera condición la curva pasa por P, es decir f(3)=0 → 9+3b+c=0

Segunda condición al ser perpendicular la pendiente de la recta tangente será la inversa con signo menos m=-1/(-0.5)=2 para la recta tangente en x=3→ f'(3)=2 → 6+b=2

b=4,c=-21

Ejercicio 12: Estudiar la derivabilidad de f(x)=x/(1+|x|), y calcular f''(x)

a) f(x) es continua en todo R pues el denominador no se anula y la función valor absoluta es continua en R. Calculemos la derivada, para esto primero ponemos la función definida a trozos conforme a los valores del x que cambian el signo de |x|:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-x} & si\ \ x\leq 0\\ \dfrac{x}{1+x} & si\ \ x>0\end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)^2} & si\ \ x\leq 0\\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & si\ \ x>0\end{cases}$$

El único punto donde hay que estudiar la derivabilidad es en x=0, donde cambia de expresión analítica, ya que los denominadores no se anulan en ningún punto donde estén definidas.

$$\lim_{x\to o} f'(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to o^+} f'(x)=1\\ \lim\limits_{x\to o^-} f'(x)=1\end{cases} \lim_{x\to o} f'(x)=1.$$

Función derivable en R, pues $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ continua si x<0, $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ continua si x>0 y f'(0)=1.

Como es derivable en R podemos definir la segunda derivada:

b) $f''(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{(1-x)^3} & si\ \ x\leq 0\\ \dfrac{2}{(1+x)^3} & si\ \ x>0\end{cases}$ en x=0 la función f(x) no es dos veces derivable pues

$$\lim_{x\to o^+} f''(x)=2\neq \lim_{x\to o^-} f''(x)=-2$$

Ejercicio 13 Sea f(x) a) estudiar los valores de a que hacen continua f(x), b) ver para estos valores si la función es derivable:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ \ x\leq a \\ 2ax-2a+1 & si\, x>a \end{cases}$$

a) Los dos trozos de definición de f(x) son polinomios luego continuos en todo R y en por tanto en su dominio de definición. Sólo nos falta por estudiar la continuidad en a:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=a^2+1 \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=2a^2-2a+1 \end{cases} \rightarrow a^2+1=2a^2-2a+1 \rightarrow a^2-2a=0 \rightarrow a=0, a=2$$

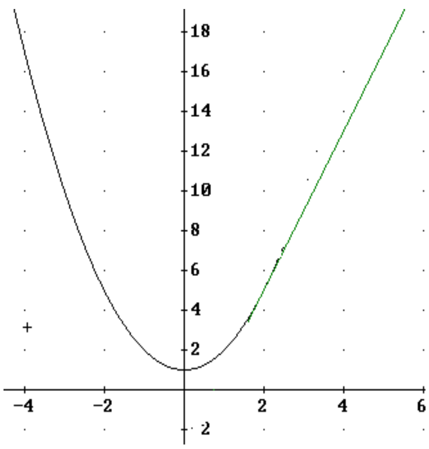
b) a=0 → $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ \ x\leq 0 \\ 1 & si\, x>0 \end{cases}$ → $f'(x)=\begin{cases} 2x & si\ \ x\leq 0 \\ 0 & si\, x>0 \end{cases}$

$f'(0^+)=f'(0^-)=0$

Luego es derivable en x=0. Veamos la gráfica

a=2 → $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ \ x\leq 2 \\ 4x-3 & si\, x>2 \end{cases}$ → $f'(x)=\begin{cases} 2x & si\ \ x\leq 2 \\ 4 & si\, x>2 \end{cases}$

$f'(2^-)=f'(2^+)=4$, luego es derivable en x=2. Veamos la gráfica:



Ejercicios de la P.A.U.

Septiembre 2004. Prueba A.

PR-2

a) Sea *f* la función dada por $f(x)=x^2-3|x|+2$, estúdiese la derivabilidad de *f* en $x = 0$ mediante la definición de derivada

a) $f(x)=x^2-3|x|+2=\begin{cases} x^2-3x+2 & si\ x\geq 0 \\ x^2+3x+2 & si\ x<0 \end{cases}, \quad x\in R.$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h^2-3h+2-2}{h}=-3 \\ \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h^2+3h+2-2}{h}=3 \end{cases}$$ No derivable x=0.

Septiembre 2005. Prueba A

PR-2. a) Estúdiese la derivabilidad de $f(x)=\begin{cases} \ln(1+x^2) & x>0 \\ x^2 & x\leq 0 \end{cases}$

Primero tenemos que estudiar la continuidad de f(x): los dos trozos de la función son continuos, pues el argumento del logaritmo es siempre positivo. De esta forma sólo tenemos que ver la continuidad en x=0

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\ln(1)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0 \end{cases}$$ f(0)=0,

luego es continua en R y podemos calcular la función derivada en todos los puntos:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^2}, & x>0 \\ 2x, & \mathrm{x}\leq 0 \end{cases}$$

Los dos trozos son continuos pues uno es un polinomio y el otro es un denominador que nunca se anula. Sólo tenemos que calcular la derivabilidad en x=0:

$f'(0^+)=f'(0^-)=0$ luego es derivable en x=0 y por tanto en R

Junio 2006. Prueba B.

C-3. Sea $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Determínense *a*, *b*, *c* y *d* para que la recta y+1=0 sea tangente a la gráfica de *f* en el punto (0,-1), y la recta x-y-2=0 sea tangente a la gráfica de *f* en el punto (1,-1).

a) Recta y=-1 → m=0 y Pasa por (0,-1)

f(0)=**d=-1**

f'(0)=**c=0**

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

b) Recta y=x-2 → m=1 y Pasa por (1,-1)

f(1)=a+b-1=-1

f'(1)=3a+2b=1

a=1, b=-1

Septiembre 2006. Prueba B.

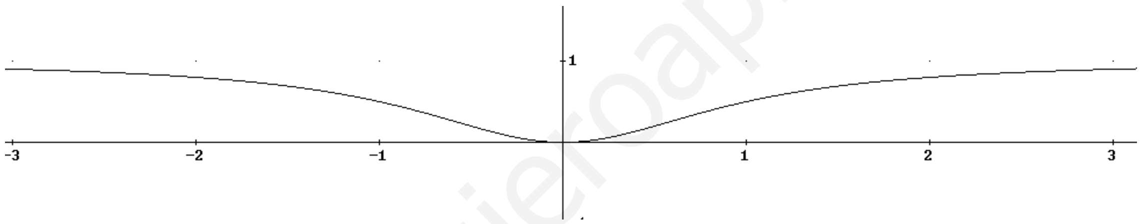
C-3 Calcúlense las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ en el punto $x=0$.

$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2+1)-2x\cdot x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ la pendiente de la recta paralela es m=f'(0)=0, es decir paralela al eje x, y la de la recta normal es m=∞, paralela al eje y. Las dos pasan por el punto P(0,f(0)) →P(0,0)

a) Tangente en x=0 (y-0)= 0x+0 → y=0 (eje X)

b) Normal x=0 (eje Y)

Veamos la gráfica de f(x):



Septiembre 2007. Prueba A

C-3.- Determinar en qué puntos de la gráfica de la función $y=x^3-3x^2+x+1$, la recta tangente a la misma es paralela a la recta y=x+7.

Si las rectas son tangentes misma pendiente. La pendiente de la recta y=x+7 es m=1. La pendiente de la recta tangente es igual a $f'(x)=3x^2-6x+1$. Obliguemos a que la pendiente sea 1 y calculemos el valor de la coordenada x de los puntos buscados:

$3x^2-6x+1=1$ →x(3x-6)=0 →$x_1=0$, $x_2=2$

$P_1(0,f(0))$→ $P_1(0,1)$

$P_2(2,f(2))$→ $P_1(2,-1)$

Junio 2008. Prueba A

C-2.- Determinar el valor de a para que la recta tangente a la función $f(x)=x^3+ax$ en el punto x = 0 sea perpendicular a la recta y + x = −3.

Si la recta tangente es perpendicular a y=-x-3, entonces la pendiente es m=-1/-1=1. La pendiente de las rectas tangente en x=0 es $f'(0)=3\cdot0^2+a=a$. Igualando la derivada al valor de m obtenemos que a=1.

Prueba B

PR-2 Dada la función f(x)=$\begin{cases} \frac{sen(x^2)}{x} & si \quad x>0 \\ x^2-2x & si \quad x\leq 0 \end{cases}$, se pide a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función f(x)

Continuidad: sólo hay que estudiar la continuidad en x=0 que es donde la función cambia de expresión analítica y donde se anula en denominador de la primera.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{sen(x^2)}{x} = 0 \ (L'Hopital \ tema \, siguiente) \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \end{cases}$$

f(x) es por tanto continua en R

Derivabilidad: como es continua en R podemos definir la función derivada en todos los puntos:

$$f'(x)= \begin{cases} 2\cos(x^2) - \frac{sen(x^2)}{x^2} & si \quad x>0 \\ 2x-2 & si \quad x\leq 0 \end{cases}$$

Sólo hay que estudiar la derivabilidad en x=0

$$f'(0^+)= \lim_{x\to 0^+} 2\cos(x^2) - \frac{sen(x^2)}{x^2} = 2 - \lim_{x\to 0^+} \frac{sen(x^2)}{x^2} = 2-1=1 \ (L'Hopital \ tema \, 4)$$

f'(0$^-$)=-2

Luego no es derivable en x=0

La función f(x) es derivable en R-{0}

Tema 13. Aplicaciones de las derivadas

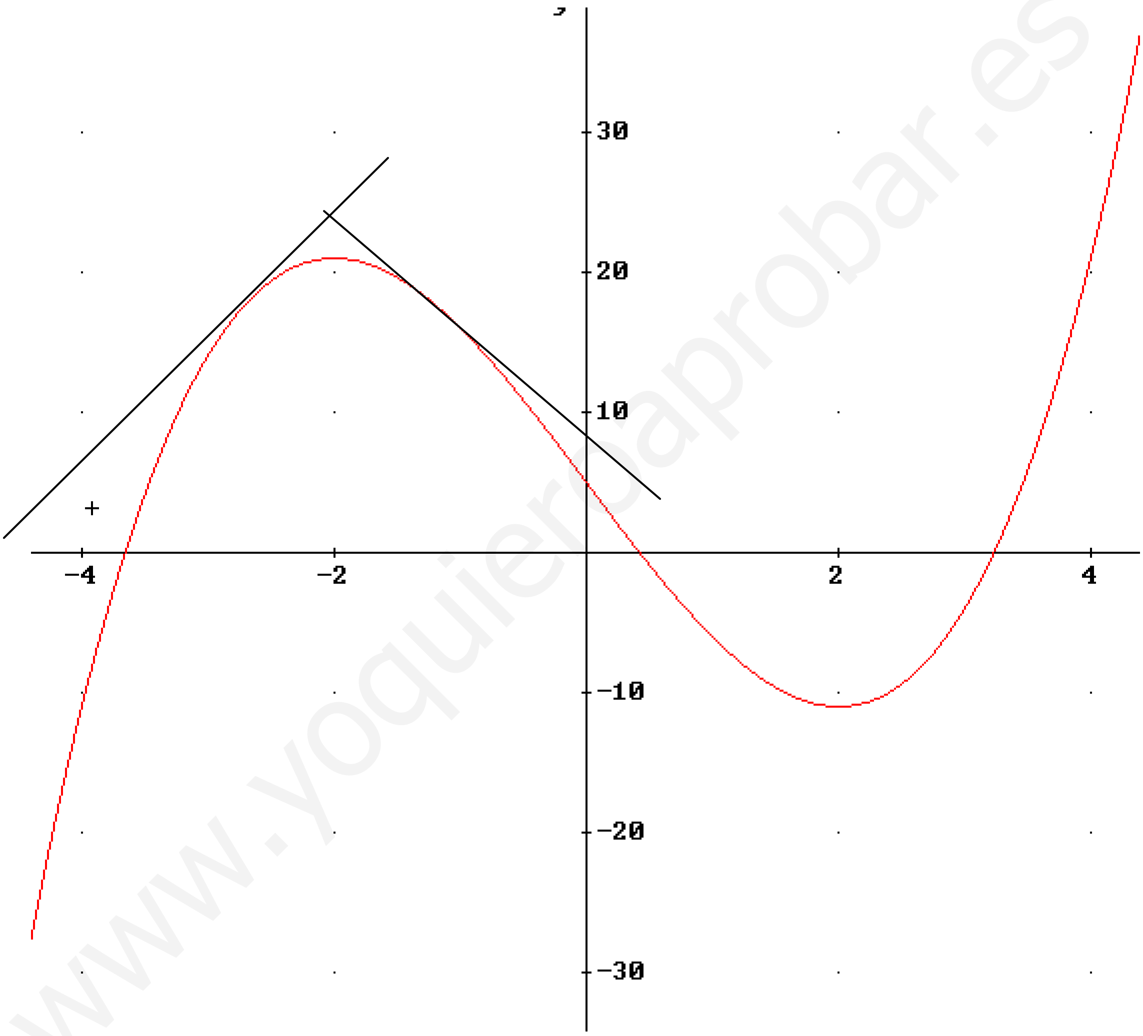
1. Monotonía. Crecimiento y decrecimiento de una función

En el tema anterior relacionamos las derivadas con la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica descrita por la función, es decir, $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica f(x) en $x=x_0$.

Vamos a relacionar el signo de $m=f'(x_0)$ con el crecimiento o decrecimiento de la función; para esto nos valemos del siguiente ejemplo:

$y=f(x)=x^3-12x+5$

$f'(x)=3x^2-12=3\cdot(x-2)\cdot(x+2)$



	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,\infty)$
Signo f'(x)	+	0	-	0	+
Crecimiento	↗		↘		↗

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Claramente vemos que cuando $f'(x_0)>0$ la recta tangente es creciente, pues la pendiente es positiva, y por lo tanto f(x) es creciente en x_0. De igual forma si $f'(x_0)<0$ la recta tangente es decreciente, pues su pendiente es negativa, y por lo tanto f(x) es decreciente en x_0

Conclusión:

a) Si $f'(x_0)>0$ la función f(x) es estrictamente creciente en x_0

b) Si $f'(x_0)<0$ la función f(x) es estrictamente decreciente en x_0

2. Extremos relativos

Antes de relacionar los extremos relativos con la derivada definámoslos.

Definición: Extremo relativo de una función f(x) es todo punto x_0 tal que, para todo entorno del punto $E(x_0,r)$, se cumple que la función en este intervalo crece y decrece. Según crezca antes o después de x_0, distinguimos dos tipos de extremos relativos:

a) Máximo relativo en x_0: la función crece hasta x_0 y decrece a partir de x_0.

b) Mínimo relativo en x_0: la función decrece hasta x_0 y crece a partir de x_0.

Está claro que si x_0 es un extremo relativo de f(x), en este punto la gráfica ni crece ni decrece, luego una condición necesaria es que $f'(x_0)=0$, así la pendiente de la recta tangente es m=0, siendo por tanto paralelo al eje x. Pero está no es la única condición. Es necesario, que además, se cumpla una segunda condición que además nos permite discernir si es máximo o mínimo relativo:

- Sea x_0 un punto de una función en el que se cumple
  a) $f'(x_0)=0$
  b) $f''(x_0)<0$

  entonces $(x_0,f(x_0))$ es ***máximo relativo***
- Sea x_0 un punto de una función en el que se cumple
  a) $f'(x_0)=0$
  b) $f''(x_0)>0$

  entonces $(x_0,f(x_0))$ es ***mínimo relativo***

En la práctica, si se cumple que $f'(x_0)=0$ y viendo el crecimiento de la función antes y después del punto podemos ver si es punto relativo y si es máximo o mínimo.

En el caso de que $f'(x_0)=0$ pero también $f''(x_0)=0$, no podemos asegurar que este punto sea extremo relativo y hay que estudiar las derivadas de orden superior.

Ejercicio 1: Estudiar la monotonía, y los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $y=f(x)=2x^3-15x^2+36x-12$

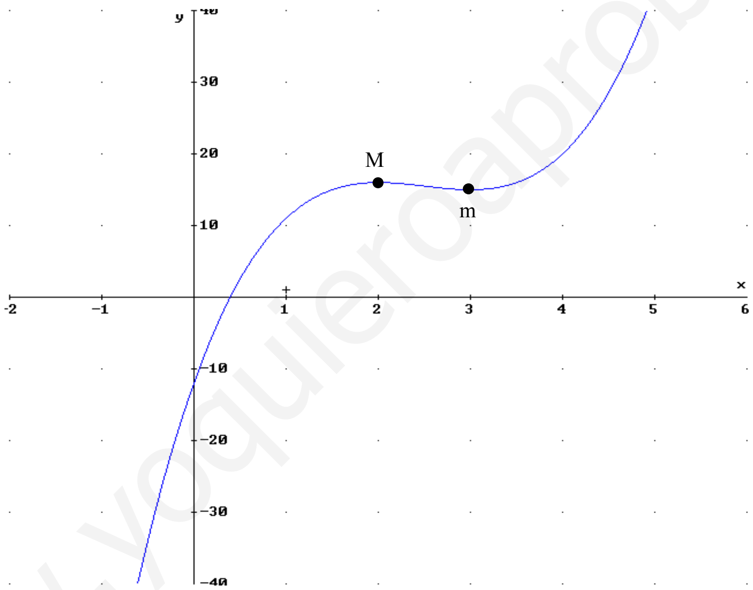
Veamos el signo de la derivada: $f'(x)=6x^2-30x+36$

$f'(x)=0 \rightarrow x^2-5x+6=(x-2)\cdot(x-3)=0 \rightarrow x=2,\ x=3$

$f''(x)=12x-30$

	$(-\infty,2)$	2	$(2,3)$	3	$(3,\infty)$
Signo f'(x)	+	0	-	0	+
Crecimiento	↗	(2,f(2))=(2,16)	↘	(3,f(3))=(3,15)	↗
		f''(2)<0 Máximo		f''(3)>0 Mínimo	

Máximo M(2,f(2))=(2,16)   Mínimo m(3,f(3))=(3,15)



b) $y=x/\ln(x)$

Primero estudiemos el dominio. Veamos los puntos que no pertenecen al dominio

a) $x>0$ (por el logaritmo neperiano)

b) Denominador es cero: $\ln(x)=0 \rightarrow x=e^0=1$, asíntota vertical

Dom(f(x))=$(0,\infty)-\{1\}$

$$f'(x)=\frac{\ln(x)-x\frac{1}{x}}{\ln^2(x)}=\frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}=0 \rightarrow \ln(x)-1=0 \rightarrow x=e^1$$

Además de los puntos donde se anula la primera derivada hay que añadir los puntos que no pertenecen al dominio, ya que en ellos puede cambiar el crecimiento. En este caso añadimos x=1.

	(0,1)	1	(1,e)	e	(e,∞)
Signo f'(x)	-		-	0	+
Crecimiento	↘	$\notin Dom(f(x))$	↘	(e,f(e))=(e,e)	↗
				f''(e)=1/e>0 Mínimo	

Mínimo m(e,f(e))=(e,e)

c) $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 12}{x - 4}$

Dominio=R-{4}

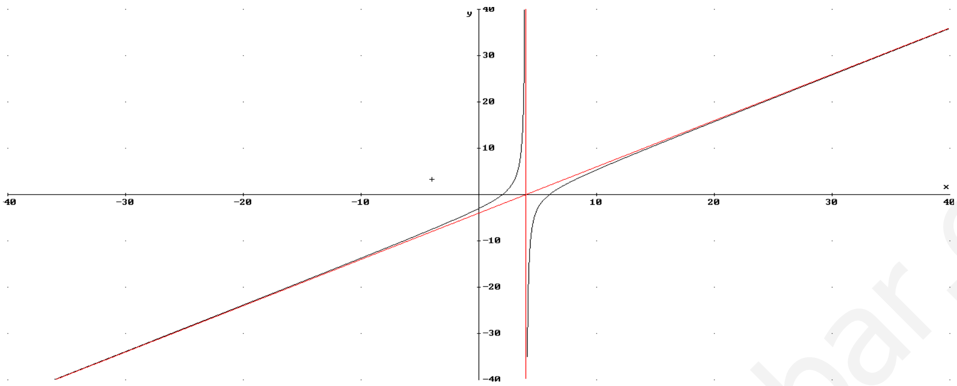
f ´(x)=$\dfrac{x^2 - 8x + 20}{(x-4)^2}$,

f ''(x)=$\dfrac{8x - 32}{(x-4)^4}$

Signo de f'(x): $x^2 - 8x + 20 = 0$ No solución→ no extremos relativos (f'(x)>0)

Sólo tenemos que ver el crecimiento antes y después de x=4, que no pertenece al dominio:

	$(-\infty,4)$	4	$(4,\infty)$
Signo f'(x)	+	$\notin$ Dominio	+
Crecimiento	↗		↗



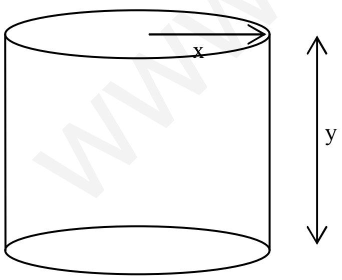
3. Optimización

En muchas situaciones se plantean problemas de optimización, es decir hacer que una función sea máxima o mínima para unas premisas impuestas.

Los casos de optimización que trabajaremos es cuando la función depende de una sola variable. Pasos a seguir para optimizar:

1. Expresar la función que deseamos optimizar en función todas variables.
2. Si la función tiene más de una variable relacionar las variables con los datos del problema y obtener una función de una sola variable.
3. Derivar la función, igualarla a cero y así obtener los puntos relativos
4. Comprobar, mediante la segunda derivada, si estos puntos son máximos o mínimos.

Ejemplo: Se quiere construir botes de enlatar de forma cilíndrica de 10 litros de capacidad. Calcular las dimensiones para que el gasto sea mínimo



$V=10=\pi x^2\cdot y \rightarrow y=10/(\pi x^2)$

El gasto es proporcional a la superficie:

Gasto(x,y)=K·Superficie=$K(2\cdot\pi x^2+2\pi x\cdot y)\rightarrow G(x)=K\cdot[2\pi x^2+2\pi x\cdot(10/\pi x^2)]=K[2\pi x^2+20/x]$

$G'(x)=K[4\pi x-20/x^2]=0$

$4\pi x-20/x^2=0 \rightarrow 4\pi x^3-20=0 \rightarrow$ **r=x**$=\sqrt[3]{5/\pi}$ **dm** $\rightarrow$ **h=y=**$\dfrac{10}{\pi\sqrt[3]{25\pi}}$ **dm**

$G''(x)=4\pi+40/x^3 \rightarrow G''(\sqrt[3]{5/\pi})>0$ **Mínimo**

Ejercicio 2: Descomponer el número 48 en dos sumandos tal que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea mínimo.

$48=x+y \rightarrow y=48-x$

$f(x,y)=5y^2+6x^2$

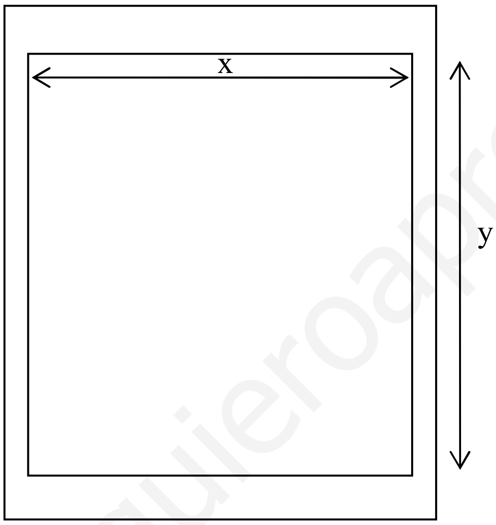
$f(x)=5\cdot(48-x)^2+6\cdot x^2=11520-480x+11x^2$

$f'(x)=-480+22x=0$

$\mathbf{x=240/11\ ,\ y=288/11}$

$f''(x)=22\quad f''(240/11)>0$ **Mínimo**

Ejercicio 3: Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm y laterales de 1 cm. Obtener las dimensiones que minimizan la superficie del papel



$x\cdot y=18 \rightarrow y=18/x$

$Area(x,y)=(x+2)\cdot(y+4) \rightarrow A(x)=(x+2)\cdot(18/x+4)=18+4x+36/x+8=26+4x+36/x$

$A'(x)=4-36/x^2=0 \rightarrow$ **x=3cm y=6cm**

$A''(x)=72/x^3\quad A''(3)>0$ **mínimo** $\rightarrow$ **Dimensiones: 5cm x 10cm**

4. Curvatura

Veamos las definiciones de los dos tipos de curvaturas posibles en una función:

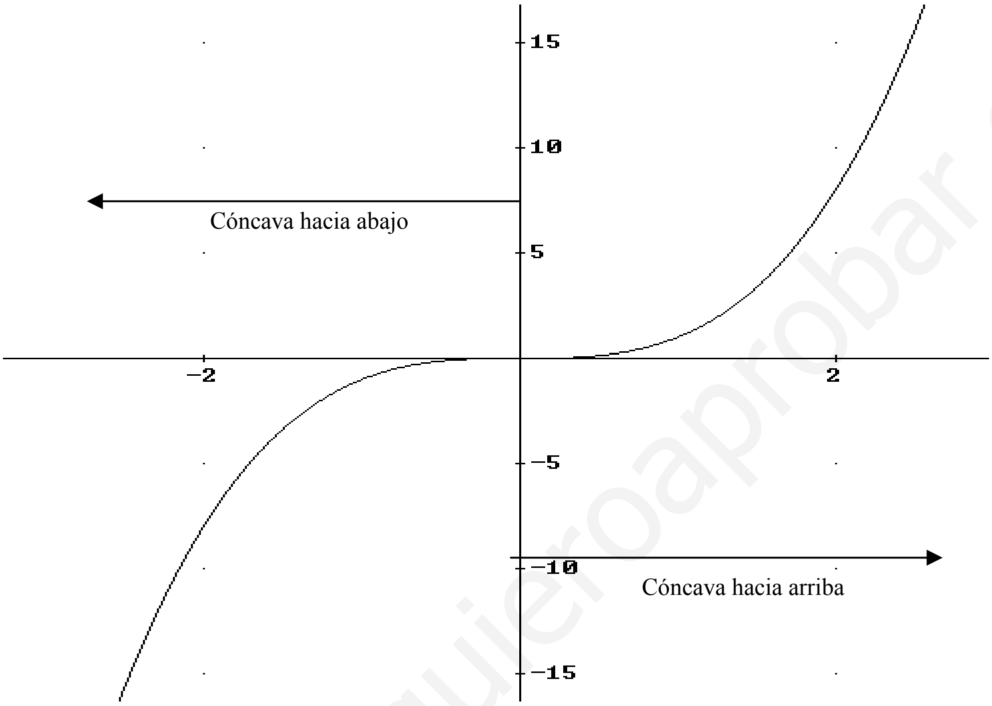
Definición 1: Una función es **cóncava hacia las y positivas o cóncava hacia arriba** en un punto $P(x_0,y_0)$, si la recta tangente en este punto está por debajo de los puntos próximos a P. Gráficamente tiene forma de $\cup$

Definición 2: Una función es **cóncava hacia las y negativas o cóncava hacia abajo** en un punto $P(x_0,y_0)$, si la recta tangente en este punto está por encima de los puntos próximos a P. Gráficamente tiene forma de $\cap$.

Podemos saber si una función es cóncava hacia arriba o hacia abajo a partir de la segunda derivada:

- Si **$f''(x_0)>0$**, entonces f(x) es **cóncava hacia arriba** en el punto $(x_0,f(x_0))$. (Recordar la curvatura de $y=f(x)=x^2$ y como $f''(x)=2>0$)
- Si **$f''(x_0)<0$**, entonces f(x) es **cóncava hacia abajo** en el punto $(x_0,f(x_0))$. (Recordar la curvatura de $y=f(x)=-x^2$ y como $f''(x)=-2<0$)

Ejemplo: $y=f(x)=x^3$ $f''(x)=6x$, si $x>0$ cóncava hacia arriba y si $x<0$ hacia abajo



5. Puntos de Inflexión

Uno de los puntos más importantes a la hora de representar una función son los puntos de inflexión; veamos que es un punto de inflexión:

Definición: Se dice que f(x) tiene **punto de inflexión** en **$(x_0,f(x_0))$** si en ese punto cambia la curvatura de la función, es decir pasa de ser cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o al revés. En este punto la recta tangente a la función corta a la función.

Vamos a ver la relación entre los puntos de inflexión y las derivadas de la función, en el siguiente teorema:

Si f(x) cumple en x_0 que la segunda derivada es nula (**$f''(x_0)=0$**) y además la tercera derivada es distinta de cero (**$f'''(x_0)\neq 0$**), entonces la función f(x) tiene un **punto de inflexión en $(x_0,f(x_0))$.**

En el caso de que tanto $f''(x_0)=0$ como $f'''(x_0)=0$, tendremos que recurrir a las derivadas de orden superior, y ver el orden de la primera no nula en x_0.

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejemplo: Estudia el crecimiento, puntos relativos, la curvatura y los puntos de inflexión de la función f(x)=$\frac{x-1}{x+1}$

Primero estudiemos el dominio Dom(f)=R-{-1}

f'(x)=$\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$

Vemos que siempre es positiva para todo valor de x que pertenezca al dominio:

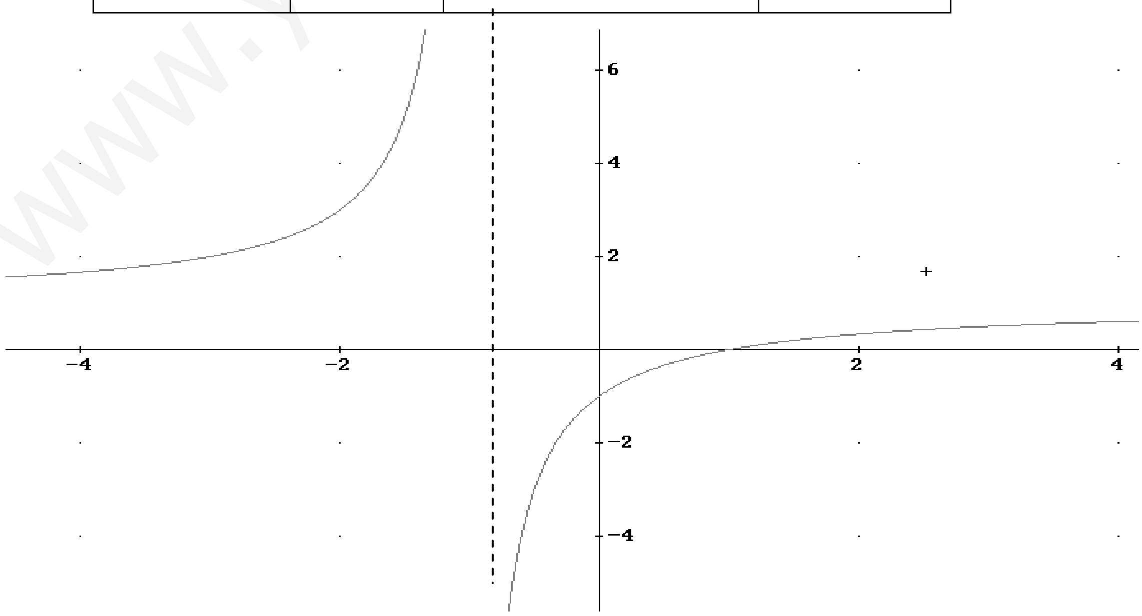
	(-∞,-1)	-1	(-1,∞)
Signo f'(x)	+	No existe $-1\notin$ Dom(f)	+
Crecimiento	↗		↗
		No Punto relativo	

Calculemos ahora la curvatura y los puntos de inflexión

f ''(x)=$\frac{-4(x+1)}{(x+1)^4}$

Como $(x+1)^4$ es positivo, sólo tenemos que estudiar el signo de (x+1), por eso no simplificamos la fracción. El signo de la segunda derivada es:

	(-∞,-1)	-1	(-1,∞)
Signo f''(x)	+	No existe $-1\notin$ Dom(f)	-
Cocavidad	∪		∩
		No P.I.	



Ejercicio 4: Estudiar monotonía y curvatura de f(x)=$\frac{x^2}{x^2-2x+1}$

Primero vemos el dominio de f(x), como x^2-2x+1=$(x-1)^2$, entonces →Dom(f)=R-{1}

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2-2x+1)-(2x-2)\cdot x^2}{(x^2-2x+1)^2}=\frac{2x-2x^2}{(x^2-2x+1)^2}=\frac{-2x\cdot(x-1)}{(x^2-2x+1)^2}$$

No simplificamos la fracción para que el signo del denominador sea siempre positivo (elevado a potencia par). El numerador se anula en x=0 y x=1∉ Dom(f)

	(-∞,0)	0	(0,1)	1	(1,∞)
Signo f'(x)	-	0	+	No existe	-
Crecimiento	↘	m(0,f(0))=(0,0)	↗	1∉ Dom(f)	↘
		f ''(0)<0 Mínimo			

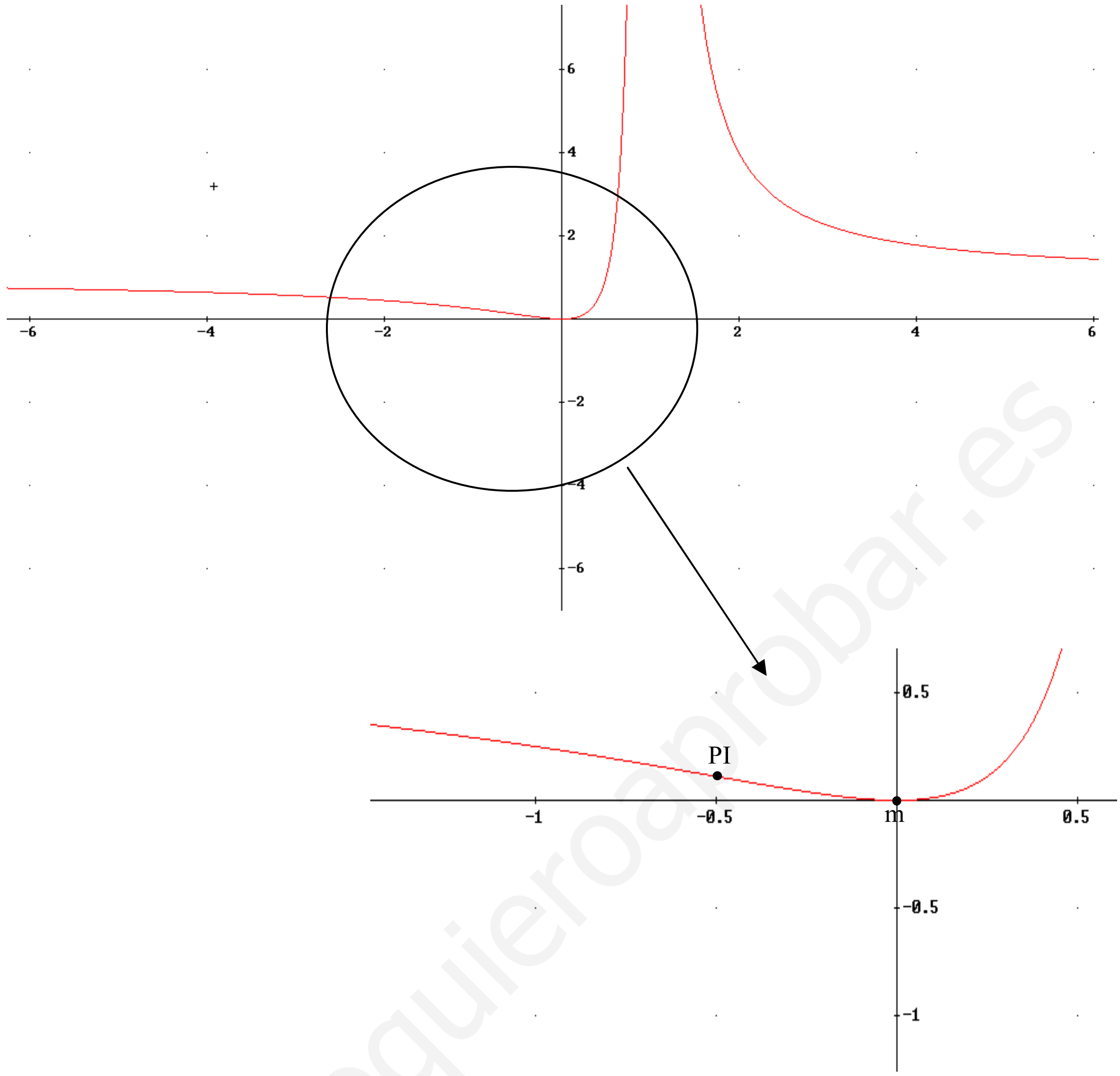
$$f''(x)=\frac{(2-4x)\cdot(x^2-2x+1)^2-2\cdot(x^2-2x+1)\cdot(2x-2)\cdot(2\cdot x-2x^2)}{(x^2-2x+1)^4}=$$

$$=\frac{(x^2-2x+1)\cdot\left[(2-4x)(x^2-2x+1)+8x^3-16x^2+8x\right]}{(x^2-2x+1)^4}=\frac{(x^2-2x+1)(-4x^3+6x^2-2)}{(x^2-2x+1)^4}=$$

$$=\frac{-2\cdot(x^2-2x+1)^2\cdot(2x+1)}{(x^2-2x+1)^4}=\frac{-4\cdot(x+1/2)}{(x^2-2x+1)^2}$$

Se anula en x=-1/2

	(-∞,-1/2)	-1/2	(-1/2,1)	1	(1,∞)
Signo f''(x)	-	0	+	No existe	+
Concavidad	∩	PI(-01/2,f(-1/2))= =(-0.5,1/9)	∪	1∉ Dom(f)	∪
		f '''(-1/2)≠0			



6. Propiedades de las funciones derivables, L'Hopital

Ya hemos visto en el tema anterior que hay límites que, para calcularlos, es necesario utilizar el teorema de L'Hopital, veamos en que consiste:

Teorema: Sean f(x) y g(x) continuas y derivables en x_0 que verifican:

a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

b) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ entonces se cumple:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla es válida para $x_0 \in R$, $+\infty$ o $-\infty$.

Esta regla se puede aplicar sucesivas veces si el límite sigue siendo ∞/∞ o $0/0$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejemplos:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=1$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{x-sen(x)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{6x^2}{1-\cos(x)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{12x}{sen(x)}=\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{12}{\cos(x)}=12$

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^2+2}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=0$

d) $\lim_{x\to 0^+}x\ln(x)=0\cdot\infty=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{1/x}=\frac{\infty}{\infty}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-x=0$

e)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)tg(x)=0\cdot\infty=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg(x)}{\frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}}=\frac{\infty}{\infty}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{\frac{-1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos^2(x)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{-2sen(x)\cos(x)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2}{-2(-sen^2(x)+\cos^2(x))}=1$$

<u>**Ejercicios PAU:**</u> Sólo veremos los que están relacionados con la optimización y con L'Hopital.

<u>**A) Optimización**</u>

Septiembre 2004. Prueba B.

PR2.- a) Dada la función f(x)=1/x+ln(x) definida en [1,e], calcular la recta tangente con mayor pendiente. Escribir ecuación de dicha recta

La pendiente de las rectas tangentes viene dada por la derivada de f(x)→

f '(x)=$-1/x^2$+1/x. Como tenemos que buscar el valor con mayor pendiente, la función a optimizar es f'(x), que llamaremos g(x), g(x)=f'(x). Optimicémosla

g'(x)=$\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}=\frac{2-x}{x^3}$=0 → 2-x=0 →x=2$\in$[1,e]

Veamos si es máxima o mínima: g''(x)=$2/x^3-6/x^4$ g''(2)=1/4-3/8<0 **máximo**

La pendiente máxima es m_{max}=g(2)=f '(2)=-1/4+1/2=1/4; esta es la pendiente de la recta tangente en el punto P(2,f(2))=(2,1/2+ln(2))

La recta tangente es por tanto: y-(1/2+ln(2))=1/4(x-2) → **y=0.25·x+ln(2)**

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Junio 2006. Prueba A.

PR-2 Considérense las funciones $f(x)=e^x$, $g(x)=-e^{-x}$. Para cada recta *r* perpendicular al eje *OX*, sean *A* y *B* los puntos de corte de dicha recta con las gráficas de *f* y *g*, respectivamente. Determínese la recta *r* para la cual el segmento *AB* es de longitud mínima.

Las rectas perpendiculares al eje OX son del tipo $x=x_0$. Corte con las gráficas

a) $f(x)=e^x \rightarrow A(x_0,e^{x_0})$
b) $g(x)=-e^{-x} \rightarrow B(x_0,-e^{-x_0})$

Longitud segmento AB → $d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|(0,e^{x_0}+e^{-x_0})\right|=\sqrt{\left(e^{x_0}+e^{-x_0}\right)^2}=e^{x_0}+e^{-x_0}$

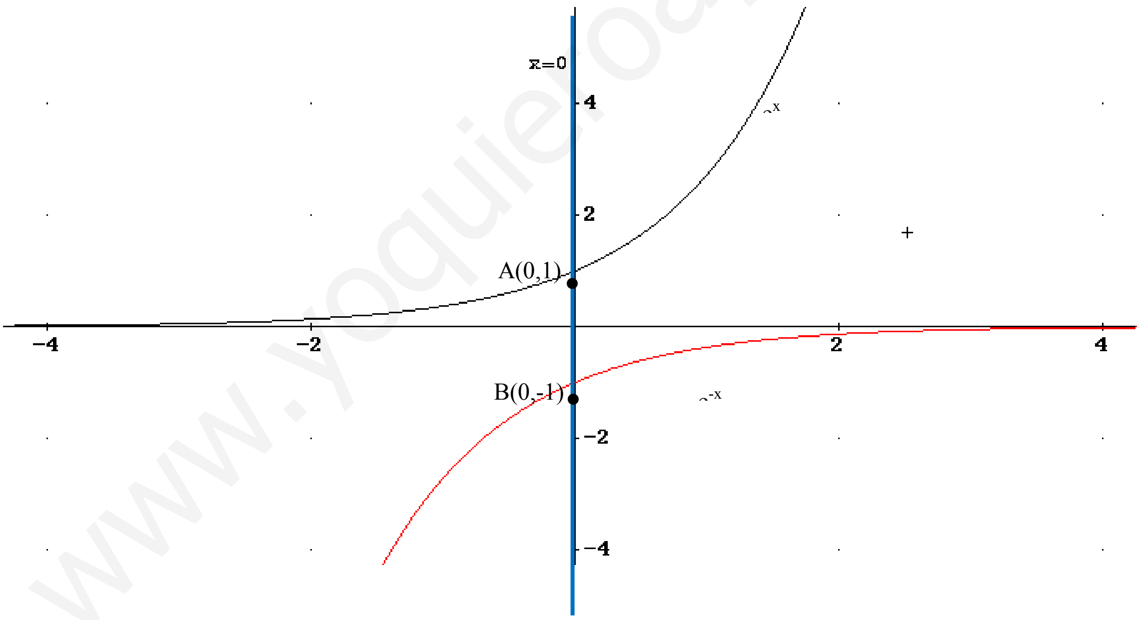
$d(x_0)=e^{x_0}+e^{-x_0}$. Como tiene que ser distancia mínima, calculemos la derivada de $d(x_0)$ e igualemos a cero

$d'(x_0)=e^{x_0}-e^{-x_0}=0 \rightarrow e^{x_0}=e^{-x_0} \rightarrow x_0=-x_0 \rightarrow \mathbf{x_0=0}$.

Veamos si es mínima o máxima $d''(x)=e^{x_0}+e^{-x_0}$ $d''(0)=2>0$ **Mínimo**

Por tanto la recta es $x=0$. Corta con $f(x)$ en $(0,e^0)=(0,1)$ y con $g(x)$ en $(0,-e^{-0})=(0,-1)$

Así la recta que minimiza la distancia entre las dos funciones es **x=0**



Septiembre 2008. Prueba B

PR-2. Hallar, de entre los puntos de la parábola de ecuación $y=x^2-1$, los que se encuentran a distancia mínima del punto $A(-2,-1/2)$

Los puntos de la parábola son $P(x, x^2-1)$. La distancia entre P y A es:

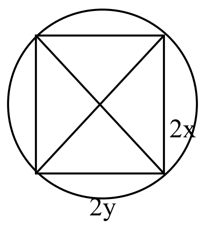
$$d(A,P)=\left|\overrightarrow{AP}\right|=\left(x+2,x^2-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{(x+2)^2+(x^2-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{x^2+4x+4+x^4-x^2+\frac{1}{4}}$$

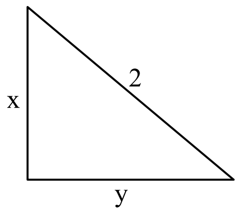
$d(x)=\sqrt{x^4+4x+\frac{17}{4}}$ → Nota si buscamos el valor que minimice la distancia se cumplirá también que para ese valor d^2 también será mínima: f(x)=(d(x))^2= $x^4+4x+\frac{17}{4}$

$f'(x)=4x^3+4$ → x=-1 → **P(-1,0)**

Veamos que es mínimo f´´(x)=12x^2, f´´(-1)=12>0, es mínimo

Ejercicio 5: calcular el rectángulo de área máxima inscrita en una circunferencia de radio 2cm:





Área(x,y)=4·x·y → A(y)=4y·$\sqrt{4-y^2}$

x=$\sqrt{4-y^2}$

A´(y)=4·$\sqrt{4-y^2}$ - $\frac{4y^2}{\sqrt{4-y^2}}$=0 → $\frac{16-4y^2-4y^2}{\sqrt{4-y^2}}=0$

y=$\sqrt{2}$ cm → x= $\sqrt{2}$ cm (cuadrado)

Veamos que es máxima: A´´($\sqrt{2}$)<0. Máximo

B) L'Hopital

PAU Septiembre 2006. Prueba A C-3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))-1+\cos(x)}{x^2}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{sen(x)}{\cos(x)}-sen(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-tg(x)-sen(x)}{2x}=\frac{0}{0}=$$
$$\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-(1+tg^2(x))-\cos(x)}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

PAU Junio 2006 (Prueba A) C-3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(2x))}{x^2}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2\cdot sen(2x)}{\cos(2x)}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-tg(2x)}{x}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-2(1+tg^2(2x))}{1}=-2$$

PAU Junio 2006 (Prueba B)C-4. Calcular a y b para que el límite sea 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos(x)}{sen(x^2)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2ax+b+sen(x)}{2x\cdot\cos(x^2)}=\frac{b}{0}(b=0\ \ para\ \lim ite\neq\infty)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2ax+sen(x)}{2x\cdot\cos(x^2)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2a+\cos(x)}{2\cos(x^2)-4x^2sen(x^2)}=\frac{2a+1}{2}=1\ \rightarrow a=1/2$$

PAU Septiembre 2004 (Prueba A) C-3

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{tg(2x)}{tg(6x)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to\pi/2}\frac{2\cdot(1+tg^2(2x))}{6\cdot(1+tg^2(6x))}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(1+tg^2(2x))}{3\cdot(1+tg^2(6x))}=\frac{1}{3}$$

PAU Junio 2004 (Prueba B) C-1

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sen\,(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\,(x)-x}{x\cdot sen\,(x)}\right)=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{sen\,(x)+x\cos(x)}=\frac{0}{0}=$$

$$\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-sen\,(x)}{\cos(x)+\cos(x)-xsen\,(x)}=\frac{0}{2}=0$$

PAU Septiembre 2005 (Prueba A) C-4. Calcular λ para que el límite valga -1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x^2)}{\cos^2(\lambda x)-1}=-1\rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x^2)}{\cos^2(\lambda x)-1}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot x\cdot\cos(x^2)}{-2\cdot\lambda\cdot sen(\lambda x)\cdot\cos(\lambda x)}=\frac{0}{0}\ \rightarrow\lambda^2=1\ \ \lambda=\pm 1.$$

$$\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\cos(x^2)-4x^2sen(x^2)}{2\cdot\lambda^2-4\cdot\lambda^2\cdot\cos^2(\lambda x)}=\frac{2}{-2\lambda^2}=-1$$

PAU Septiembre 2005 (Prueba B) C-3

$$\lim_{x\to 0}\ln(x)\cdot sen(x)=\infty\cdot 0=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{sen(x)}}=\frac{\infty}{\infty}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos(x)}{sen^2(x)}}=\lim_{x\to 0}-\frac{sen^2(x)}{x\cos(x)}=\frac{0}{0}=$$

$$\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}-\frac{2sen(x)\cdot\cos(x)}{\cos(x)-xsen(x)}=-\frac{0}{1}=0$$

PAU Junio 2005 (Prueba A) C-3

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln(x)}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)+1}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{e^x}=\frac{0}{\infty}=0$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

PAU Junio 2007 (Prueba A). C-2

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)+\frac{1+x}{1+x}+1}=\frac{1}{2}$$

PAU Septiembre 2007 (Prueba B) C-4

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x}-e^{-x})^{2}}{x^{2}}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot(e^{x}-e^{-x})(e^{x}+e^{-x})}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(e^{2x}-e^{-2x})}{2x}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}.$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot(e^{2x}+e^{-2x})}{2}=4$$

PAU Junio 2008 (Prueba A). C-1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen^{2}(2x)}{x^{3}+x^{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot sen(2x)\cdot\cos(2x)\cdot 2}{3x^{2}+2x}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\left(2\cdot\cos^{2}(2x)-2\cdot sen^{2}(2x)\right)}{6x+2}=\frac{8}{2}=4$$

PAU Septiembre 2008 (Prueba B). C-3: Calcular a para que el límite sea 8

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1-ax}{x^{2}}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot e^{ax}-a}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{a(e^{ax}-1)}{2x}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{a^{2}\cdot e^{ax}}{2}=\frac{a^{2}}{2}=8$$

a=±4

Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)