

1. Dada la siguiente función definida por trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Estudia razonadamente y, en su caso, explica el tipo de discontinuidad, en los puntos $x = 0$ y $x = 2$. **(1 punto)**

b) Representa gráficamente la función. **(1 punto)**

2. Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x - 5}$, halla la derivada de la función en el punto $x = 2$ y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. **(1 punto)**

3. Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica en lo posible el resultado:

a) $y = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x}}$ **(0,5 puntos)**

b) $y = \frac{\sqrt{1-x}}{4x-1}$ **(1 punto)**

c) $y = \frac{x \cdot \ln x}{e^{3x}}$ **(1 punto)**

4. Dada la función $f(x) = \frac{4x-3}{x^2-4x+3}$, hallar:

a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**

b) Las asíntotas. **(1 punto)**

c) Los intervalos donde la función es estrictamente creciente y estrictamente decreciente, así como los máximos y mínimos relativos de la función. **(2 puntos)**

d) Representación gráfica indicando en esta representación los puntos máximos y mínimo obtenidos. **(1 punto)**

Soluciones

1. Estudiemos la continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x-1} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x-1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

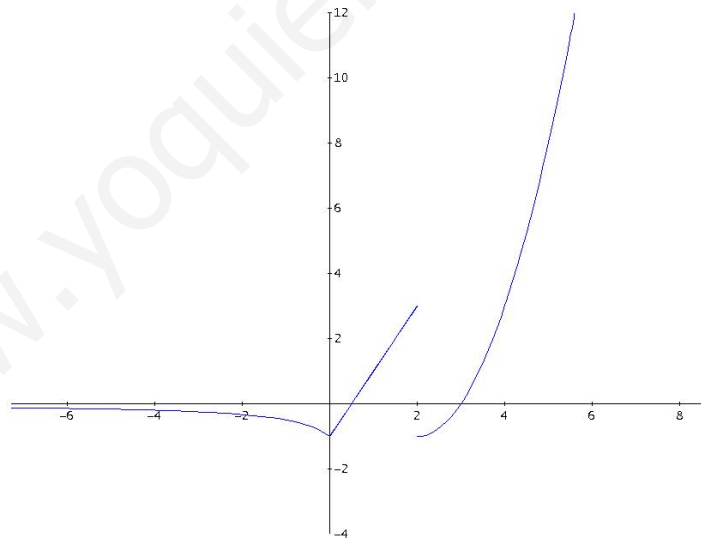
Además $f(0) = -1$. Por tanto se cumple que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = -1$ y, por tanto, f es continua en $x = 0$.

Estudiemos ahora la continuidad en $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x-1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4x + 3) = -1 \end{cases}$$

Como los límites laterales existen pero son distintos, no existe el límite de la función cuando x tiende a 2. Esto quiere decir que f no es continua en el punto $x = 2$. Hay una discontinuidad de salto finito (la longitud del salto es de 4 unidades).

Representación gráfica:



2. Hallemos la derivada de la función y la derivada en el punto $x = 2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x-3)(3x-5) - (2x^2-3x+1)3}{(3x-5)^2} = \frac{12x^2 - 20x - 9x + 15 - 6x^2 + 9x - 3}{(3x-5)^2} = \\ &= \frac{6x^2 - 20x + 12}{(3x-5)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{24 - 40 + 12}{(6-5)^2} = -4 \end{aligned}$$

Por tanto la recta tangente a la gráfica de la función en $x = 2$ es:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow y - 3 = -4(x - 2) \Rightarrow y - 3 = -4x + 8 \Rightarrow y = -4x + 11$$

3. a) Lo más fácil es escribir la función como una única potencia de exponente racional:

$$y = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x}} = y = \frac{x^3}{x^{1/3}} = x^{3-1/3} = x^{8/3}$$

Entonces la derivada es:

$$y' = \frac{8}{3}x^{8/3-1} = \frac{8}{3}x^{5/3} = \frac{8}{3}\sqrt[3]{x^5} = \frac{8}{3}x\sqrt[3]{x^2}$$

- b) Utilicemos la regla de derivación de un cociente:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-x}}(-1)(4x-1) - \sqrt{1-x} \cdot 4}{(4x-1)^2} = \frac{\frac{-4x+1}{2\sqrt{1-x}} - 4\sqrt{1-x}}{(4x-1)^2} = \\ &= \frac{\frac{-4x+1-8(1-x)}{2\sqrt{1-x}}}{(4x-1)^2} = \frac{\frac{4x-7}{2\sqrt{1-x}}}{(4x-1)^2} = \frac{4x-7}{2\sqrt{1-x}(4x-1)^2} \end{aligned}$$

- c) Para hacer esta derivada se combina la regla de derivación de un cociente con la regla de derivación de un producto:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x})e^{3x} - x \cdot \ln x \cdot e^{3x} \cdot 3}{(e^{3x})^2} = \frac{(\ln x + 1)e^{3x} - 3xe^{3x} \ln x}{(e^{3x})^2} = \\ &= \frac{e^{3x}(\ln x + 1 - 3x \ln x)}{(e^{3x})^2} = \frac{\ln x + 1 - 3x \ln x}{e^{3x}} \end{aligned}$$

4. a) Los números que anulan el denominador son $x = 1$ y $x = 3$. Por tanto se tiene que $\text{Dom}f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$.

Igualando $f(x)$ a 0 se obtiene el punto de corte con el eje X. Para ello basta que el numerador sea cero: $4x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$. Así pues el punto de corte con el eje X es $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$.

El punto de corte con el eje Y se obtiene haciendo $x = 0$. Entonces $y = -1$, y el punto de corte con el eje Y es $(0, -1)$.

- b) Los números que anulaban el denominador ($x = 1$ y $x = 3$) son también candidatos a asíntotas verticales. Veamos si lo son:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x-3}{x^2-4x+3} = \left[\frac{1}{0} \right] = \infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow 1^- \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow 1^+ \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x-3}{x^2-4x+3} = \left[\frac{9}{0} \right] = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 3^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 3^+ \end{cases}$$

De lo anterior se deduce que tanto $x = 1$ como $x = 3$ son asíntotas verticales.

Por otro lado: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-3}{x^2-4x+3} = 0$. Entonces $y = 0$ es una asíntota horizontal.

c) La derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{4(x^2 - 4x + 3) - (4x - 3)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \frac{4x^2 - 16x + 12 - 8x^2 + 16x + 6x - 12}{(x^2 - 4x + 3)^2} =$$

$$= \frac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

Entonces:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3/2 \end{cases} \quad (\text{posibles extremos relativos})$$

Hagamos una tabla:

| | $(-\infty, 0)$ | $(0, 1)$ | $(1, 3/2)$ | $(3/2, 3)$ | $(3, +\infty)$ |
|------|----------------|----------|------------|------------|----------------|
| f' | - | + | + | - | - |
| f | ↓↓ | ↑↑ | ↑↑ | ↓↓ | ↓↓ |

De la tabla se desprende que f es estrictamente creciente en $(0, 1) \cup (1, 3/2)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty, 0) \cup (3/2, 3) \cup (3, +\infty)$. Además f alcanza un mínimo relativo en $x = 0$ y un máximo relativo en $x = \frac{3}{2}$. Por cierto las coordenadas de este mínimo y este máximo son, respectivamente, $(0, -1)$ y $(\frac{3}{2}, -4)$. Para saber la coordenada y basta sustituir la coordenada x en la función inicial.

d) La representación gráfica queda como sigue:

