1. Dada la siguiente función definida por trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x-1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 2 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$$

   a) Estudia razonadamente y, en su caso, explica el tipo de discontinuidad, en los puntos $x = 0$ y $x = 2$. **(1 punto)**

   b) Representa gráficamente la función. **(1 punto)**

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{3x - 5}$, halla la derivada de la función en el punto $x = 2$ y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. **(1 punto)**

3. Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica en lo posible el resultado:

   a) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt[3]{x}}$ **(0,5 puntos)**

   b) $y = \dfrac{\sqrt{1-x}}{4x-1}$ **(1 punto)**

   c) $y = \dfrac{x \cdot \ln x}{e^{3x}}$ **(1 punto)**

4. Dada la función $f(x) = \dfrac{4x-3}{x^2 - 4x + 3}$, hallar:

   a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**

   b) Las asíntotas. **(1 punto)**

   c) Los intervalos donde la función es estrictamente creciente y estrictamente decreciente, así como los máximos y mínimos relativos de la función. **(2 puntos)**

   d) Representación gráfica indicando en esta representación los puntos máximos y mínimo obtenidos. **(1 punto)**

Soluciones

1. Estudiemos la continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x-1} = -1 \\[2ex] \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (2x-1) = -1 \end{cases}\right. \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = -1$$

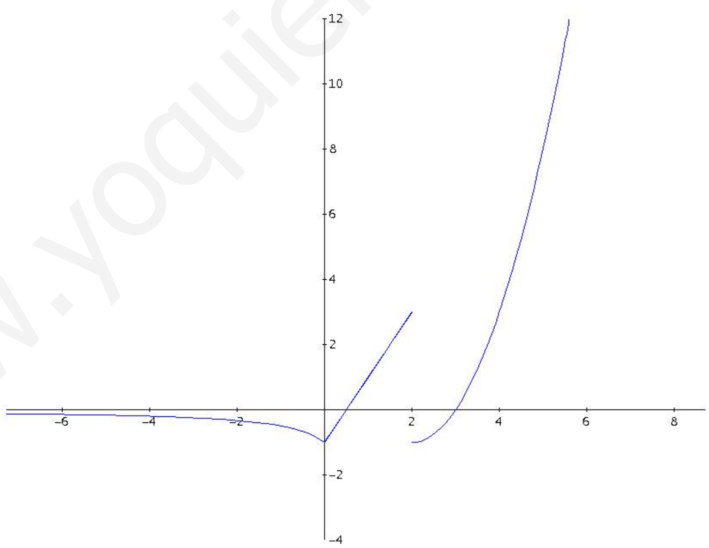
Además $f(0) = -1$. Por tanto se cumple que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = -1$ y, por tanto, f es continua en $x = 0$.

Estudiemos ahora la continuidad en $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2x-1) = 3 \\[2ex] \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 4x + 3) = -1 \end{cases}$$

Como los límites laterales existen pero son distintos, no existe el límite de la función cuando x tiende a 2. Esto quiere decir que f no es continua en el punto $x = 2$. Hay una discontinuidad de salto finito (la longitud del salto es de 4 unidades).

Representación gráfica:



2. Hallemos la derivada de la función y la derivada en el punto $x = 2$:

$$f'(x) = \frac{(4x-3)(3x-5) - (2x^2 - 3x + 1)3}{(3x-5)^2} = \frac{12x^2 - 20x - 9x + 15 - 6x^2 + 9x - 3}{(3x-5)^2} =$$

$$= \frac{6x^2 - 20x + 12}{(3x-5)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{24 - 40 + 12}{(6-5)^2} = -4$$

Por tanto la recta tangente a la gráfica de la función en $x = 2$ es:

$$y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y - 3 = -4(x-2) \Rightarrow y - 3 = -4x + 8 \Rightarrow y = -4x + 11$$

3. a) Lo más fácil es escribir la función como una única potencia de exponente racional:

$$y = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x}} = y = \frac{x^3}{x^{1/3}} = x^{3-1/3} = x^{8/3}$$

Entonces la derivada es:

$$y' = \frac{8}{3}x^{8/3-1} = \frac{8}{3}x^{5/3} = \frac{8}{3}\sqrt[3]{x^5} = \frac{8}{3}x\sqrt[3]{x^2}$$

b) Utilicemos la regla de derivación de un cociente:

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-x}}(-1)(4x-1) - \sqrt{1-x}\cdot 4}{(4x-1)^2} = \frac{\frac{-4x+1}{2\sqrt{1-x}} - 4\sqrt{1-x}}{(4x-1)^2} =$$

$$= \frac{\frac{-4x+1-8(1-x)}{2\sqrt{1-x}}}{(4x-1)^2} = \frac{\frac{4x-7}{2\sqrt{1-x}}}{(4x-1)^2} = \frac{4x-7}{2\sqrt{1-x}(4x-1)^2}$$

c) Para hacer esta derivada se combina la regla de derivación de un cociente con la regla de derivación de un producto:

$$y' = \frac{(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x})\,\mathrm{e}^{3x} - x\cdot\ln x\cdot\mathrm{e}^{3x}\cdot 3}{\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2} = \frac{(\ln x + 1)\,\mathrm{e}^{3x} - 3x\,\mathrm{e}^{3x}\ln x}{\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2} =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{3x}(\ln x + 1 - 3x\ln x)}{\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2} = \frac{\ln x + 1 - 3x\ln x}{\mathrm{e}^{3x}}$$

4. a) Los números que anulan el denominador son $x = 1$ y $x = 3$. Por tanto se tiene que $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} - \{1,\, 3\}$.

Igualando $f(x)$ a 0 se obtiene el punto de corte con el eje X. Para ello basta que el numerador sea cero: $4x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{4}$. Así pues el punto de corte con el eje X es $\left(\dfrac{3}{4}, 0\right)$.

El punto de corte con el eje Y se obtiene haciendo $x = 0$. Entonces $y = -1$, y el punto de corte con el eje Y es $(0, -1)$.

b) Los números que anulaban el denominador ($x = 1$ y $x = 3$) son también candidatos a asíntotas verticales. Veamos si lo son:

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x-3}{x^2-4x+3} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty = \begin{cases} +\infty \text{ si } x \to 1^- \\ -\infty \text{ si } x \to 1^+ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{4x-3}{x^2-4x+3} = \left[\frac{9}{0}\right] = \infty = \begin{cases} -\infty \text{ si } x \to 3^- \\ +\infty \text{ si } x \to 3^+ \end{cases}$$

De lo anterior se deduce que tanto $x = 1$ como $x = 3$ son asíntotas verticales.

Por otro lado: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x-3}{x^2-4x+3} = 0$. Entonces $y = 0$ es una asíntota horizontal.

c) La derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{4(x^2-4x+3)-(4x-3)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{4x^2-16x+12-8x^2+16x+6x-12}{(x^2-4x+3)^2} =$$

$$= \frac{-4x^2+6x}{(x^2-4x+3)^2}$$

Entonces:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2+6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3/2 \end{cases} \qquad \text{(posibles extremos relativos)}$$

Hagamos una tabla:

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,3/2)$	$(3/2,3)$	$(3,+\infty)$
f'	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
f	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$	$\uparrow\uparrow$	$\downarrow\downarrow$	$\downarrow\downarrow$

De la tabla se desprende que f es estrictamente creciente en $(0,1)\cup(1,3/2)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty,0)\cup(3/2,3)\cup(3,+\infty)$. Además f alcanza un mínimo relativo en $x=0$ y un máximo relativo en $x=\dfrac{3}{2}$. Por cierto las coordenadas de este mínimo y este máximo son, respectivamente, $(0,-1)$ y $\left(\dfrac{3}{2},-4\right)$. Para saber la coordenada y basta sustituir la coordenada x en la función inicial.

d) La representación gráfica queda como sigue: