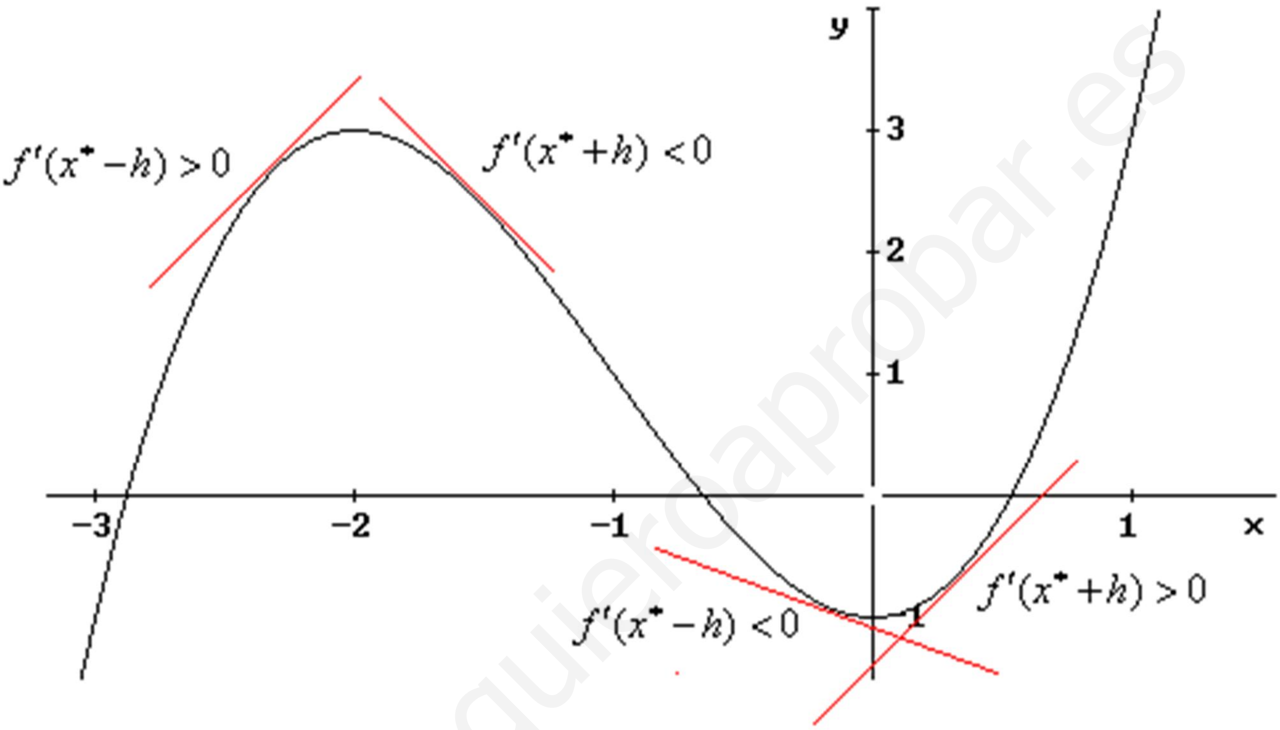
Aplicaciones de la derivada, Representación de Funciones



7.0.- Introducción

Esta unidad sobre derivación y representaciones gráficas resume de alguna manera, todo un trabajo que hasta el momento de abordarla se ha desarrollado en este curso y en cursos precedentes. La relación entre derivación, continuidad y límite tiene aquí su punto culminante, cuando en 4º de la ESO se trataba de dejar patente, en sentido puramente geométrico, el concepto de límite y de continuidad.

Se trata así de repasar, consolidar y aportar nuevos planteamientos y desarrollos prácticos a lo aprendido en cursos precedentes y en este mismo de primero, todos los cuales serán de vital importancia tanto en el próximo curso como en los previsibles años universitarios.

Los contenidos de esta unidad didáctica están estrechamente relacionados con todos los de este mismo bloque de análisis, con el de trigonometría y geometría e incluso con el de aritmética y álgebra.

El cálculo de funciones derivadas se conforma en uno de los procedimientos más útiles para resolver cantidad de situaciones relacionadas con las diferentes ciencias: numerosas magnitudes físicas, como la velocidad y la aceleración de un móvil en cierto instante o rapidez con la que varía la cantidad de movimiento de una partícula se expresan mediante la derivada de una función.

Relacionados con las ciencias económicas aparecen conceptos, tales como inflación, presión fiscal o producto interior bruto que pueden ser presentado mediante gráficas de funciones, por tanto de puede realizar mediante la ayuda de conceptos matemáticos, como crecimiento y curvatura, lo mismo que ocurre a la hora de ajustar mediante funciones numerosos conceptos de la física: movimientos de partículas, el trabajo desarrollado al aplicar una fuerza para desplazar un objeto, la ecuación del estudio de un gas ideal o la propagación de la onda sonora plana son solo algunos de los numerosos ejemplos que se podrían enunciar.

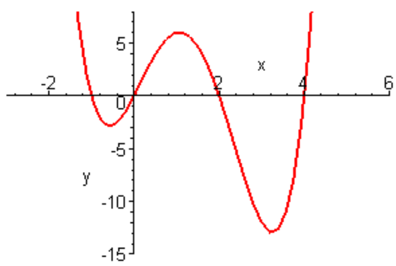
Aprovecharemos los conocimientos adquiridos sobre derivadas, junto con los de límite y continuidad, para afrontar el fin principal para el que se aprenden: la representación y el estudio local y global de funciones que constituyen la segunda y última parte de la unidad.

En ella, las etapas a seguir serán tres: estudiar "f" determinando sus características generales y realizando la determinación de sus posibles asíntotas, estudiar f' y obtener intervalos de monotonía y extremos y estudiar f'' obteniendo los intervalos de curvatura y puntos de inflexión. Para ello, se recuerdan los Teoremas pertinentes sobre la relación entre las derivadas sucesivas de una función y sus características locales. Los rasgos de la curva se irán perfilando "haciéndole preguntas" a la función. Empezaremos con la monotonía de una función.

7.1.- Crecimiento y decrecimiento de una función

Sea f una función definida en un intervalo I. Si la función f es derivable en el intervalo I, se verifica:

- f es creciente en I ➔ $f'(x) \geq 0 \;\; \forall x \in I$
- f es decreciente en I ➔ $f'(x) \leq 0 \;\; \forall x \in I$
- f es constante en I ➔ $f'(x) = 0 \;\; \forall x \in I$
- f es estrictamente creciente en I ➔ $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in I$
- f es estrictamente decreciente en I ➔ $f'(x) < 0 \;\; \forall x \in I$



Lo que ocurre, es que una función no es siempre creciente ni siempre decreciente, sino que tiene intervalos en los que es creciente, e intervalos en los que es decreciente.

Para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función f definida en [a,b], hemos de considerar:

- Los extremos a y b del intervalo
- Los puntos donde $f'(x)=0$.
- Los puntos donde no existe $f'(x)$

Tendremos así los posibles extremos de los intervalos en los que cambia de signo $f'(x)$.

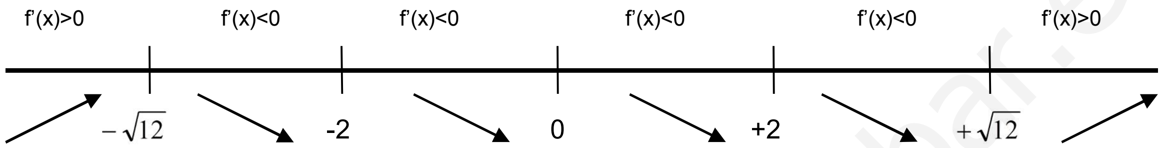
Ejemplo 1: *Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

Lo primero que tenemos que hacer es calcular la derivada de $f(x)$

$f'(x)=\dfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$ y la igualamos a cero para obtener sus raices:

$$f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}=0 \rightarrow x^2(x^2-12)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt{12} \\ x=-\sqrt{12} \end{cases}$$

Dibujamos una línea recta en la que ponemos los puntos que hacen la derivada 0, y los puntos donde no está definida la derivada, -2 y 2.



$f(x)$ es creciente en el intervalo $(-\infty,-\sqrt{12})\cup(\sqrt{12},+\infty)$
$f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-\sqrt{12},-2)\cup(-2,2)\cup(+\sqrt{12},+\infty)$

Simbolizamos con ↗ que la función es creciente, y con ↘ que es decreciente.

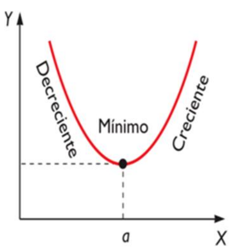
7.2.- Máximos y mínimos de una función

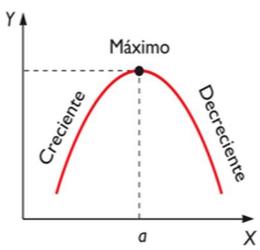
- Se dice que una función f tiene en el punto *a* un ***máximo relativo***, o que *a* es un máximo relativo de f, cuando para todo h, número real, suficientemente pequeño, y tal que a+h pertenezca al dominio de f, se cumple: f(a+h) ≤ f(a).

- Se dice que una función f tiene en el punto *a* un ***mínimo relativo***, o que *a* es un mínimo relativo de f, cuando para todo h, número real, suficientemente pequeño, y tal que a+h pertenezca al dominio de f, se cumple: f(a+h) ≥ f(a).

También podemos decir que:

- La función f posee un máximo relativo en el punto *a*, si en este punto la función cambia de ser creciente a ser decreciente.



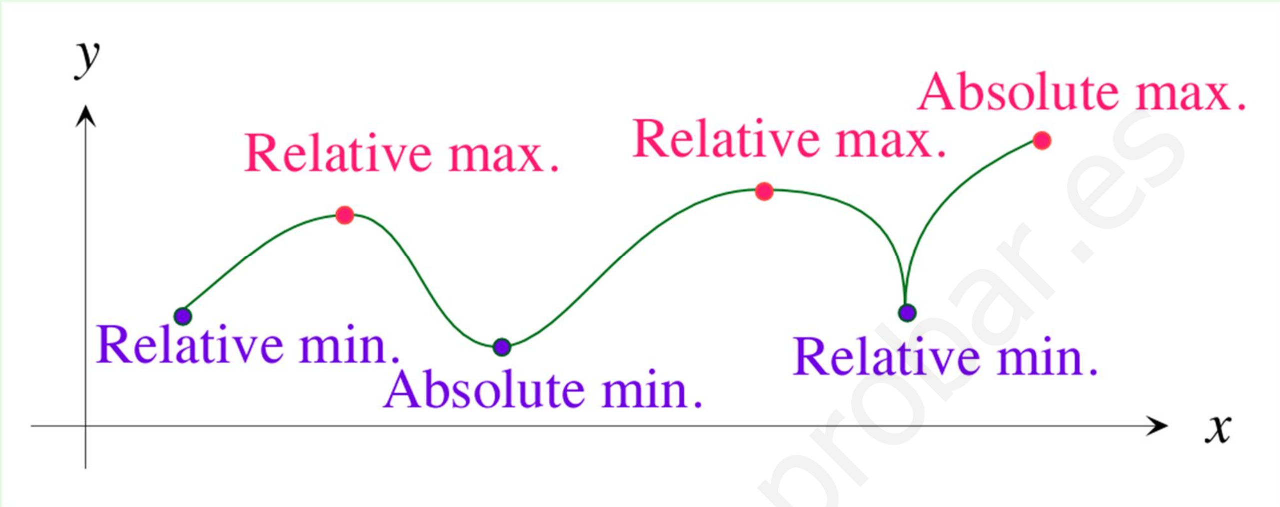


- La función f posee un mínimo relativo en el punto *a*, si en este punto la función cambia de ser decreciente a ser creciente.

7.2.1.- Máximos y mínimos absolutos

Decimos que un punto $x=a$ de una gráfica es el máximo absoluto, si además de ser máximo relativo, el punto a es el punto más alto de la gráfica, es decir: f tiene en el punto a un ***máximo absoluto***, cuando para todo h, número real, suficientemente pequeño, y tal que a+h pertenezca al dominio de f, se cumple: $f(a+h) < f(a)$.

Y de la misma forma, que un punto $x=a$ de una gráfica es el mínimo absoluto, si además de ser mínimo relativo, el punto a es el punto más bajo de la gráfica, es decir: f tiene en el punto a un ***mínimo absoluto***, cuando para todo h, número real, suficientemente pequeño, y tal que a+h pertenezca al dominio de f, se cumple: $f(a+h) > f(a)$.



7.2.1.- Condición necesaria de extremo

Sea a un punto interior del dominio de la función f. Si f tiene un extremo relativo en a y además f es derivable en a, entonces $f'(a) = 0$.

En el ejemplo anterior:
$f(x)$ tiene un máximo en $x = -\sqrt{12}$ $\quad f(-\sqrt{12}) = -3\sqrt{3}$ en el punto $\left(-\sqrt{12}, -3\sqrt{3}\right)$
$f(x)$ tiene un mínimo en $x = \sqrt{12}$ $\quad f(\sqrt{12}) = 3\sqrt{3}$ en el punto $\left(\sqrt{12}, 3\sqrt{3}\right)$

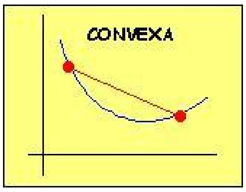
7.3.- Concavidad y Convexidad

Sea f una función dos veces derivable en un intervalo I, decimos que:

- La gráfica de la función es cóncava en un intervalo (a,b) si la gráfica de la función está por encima de cualquier tangente a la gráfica en dicho intervalo.
- La gráfica de la función es convexa en un intervalo (a,b) si la gráfica de la función está por debajo de cualquier tangente a la gráfica en dicho intervalo.

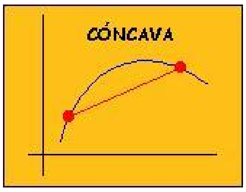
La función es convexa si:

$$f''(x) \geq 0$$



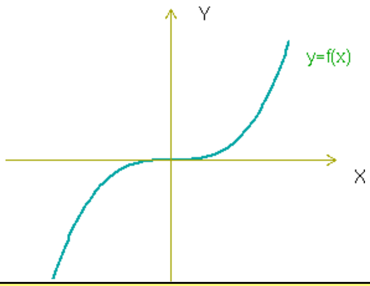
La función f es cóncava si:

$$f''(x) \leq 0$$



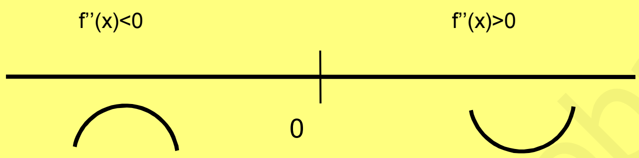
A los puntos donde una función cambia de cóncava a convexa o viceversa se les llama ***puntos de inflexión***, y en ellos ocurre que f''(x)=0.

En este ejemplo, la función tiene en x=0 un punto de inflexión.



En la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ Vamos a calcular ahora los puntos de inflexión. Para ello trabajamos con la segunda derivada. $f''(x)$. Calculamos f''(x).

$f''(x)=\dfrac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$ y la igualamos a cero $f''(x)=\dfrac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}=0$ → $8x(x^2+12)=0$ → x = 0



Por tanto, la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ Tiene un punto de inflexión en el punto (0,0)

7.4.- Cálculo de Límites: Regla de L'Hopital

Sean f y g dos funciones reales que cumplen las siguientes condiciones:

- ✓ las funciones f y g son derivables en un entorno E del punto a.
- ✓ f(a)=g(a)=0
- ✓ Existe $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces se cumple que: $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Si f'(a)=g'(a)=0, siendo las funciones f'(x) y g'(x) derivables en a, se puede aplicar otra vez la regla de L'Hôpital, y así sucesivamente.

Ejemplo: Calcular $\lim_{x\to 0}\dfrac{senx-x}{tgx-x}$

Este límite es una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$, como ambas funciones son derivables en R, y además son nulas en 0, podemos aplicar L`Hopital, de forma que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx-x}{tgx-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}=\lim_{x\to 0}\cos^2 x\,\frac{\cos x-1}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}(-\cos^2 x)\cdot\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{1+\cos x}=\frac{-1}{2}$$

De las 7 formas indeterminadas que vimos en el capítulo de funciones y continuidad, la Regla de L'Hôpital solo es aplicable en los casos $\dfrac{0}{0}$ e $\dfrac{\infty}{\infty}$. Sin embargo todas las otras indeterminaciones pueden reducirse a estas dos.

7.4.1.- Indeterminación $0 \cdot \infty$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ entonces: $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0\cdot\infty = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}$, que se puede resolver con la regla de L'Hôpital.

7.4.2.- Indeterminación $\infty - \infty$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$; entonces $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \infty - \infty$ y operando un poco, podemos llegar a la expresión $\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$ que se puede resolver con L'Hôpital.

7.4.3.- Indeterminaciones 0^0, ∞^0 y 1^∞

Para estas, aplicaremos logaritmos: $A^B = e^{B\ln A}$, de modo que las tres indeterminaciones se reducen a formas $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, que resolveremos mediante la regla de L'Hôpital.

7.5.- Representación de funciones

A la hora de estudiar funciones, seguiremos el siguiente esquema:

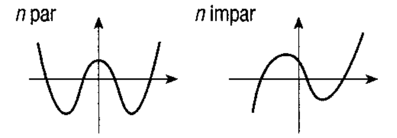
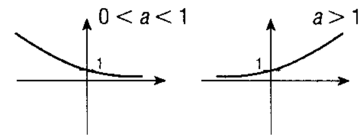
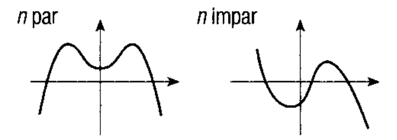
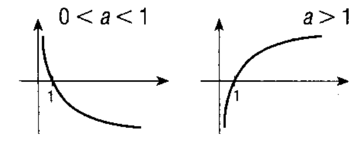
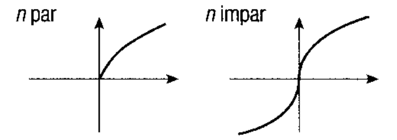
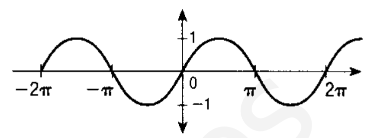
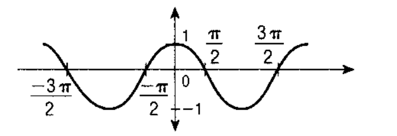
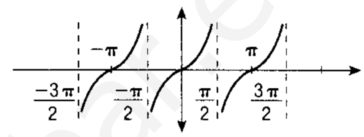
1. Dominio y recorrido
2. Simetrías
3. Periodicidad
4. Continuidad
5. Puntos de Corte
6. Asíntotas
7. Monotonía
8. Curvatura
9. Representación

Veamos paso a paso cada uno de los ítems anteriores:

7.5.1.- Dominio y recorrido

Dominio: Valores de x para los que está definida (existe) $f(x)$

Recorrido: Valores que toma $f(x)$

MODELO		GRÁFICA	MODELO	GRÁFICA
Polinómica	$a_n > 0$		Exponencial	
	$a_n < 0$		Logarítmica	
Irracional			sen x	
cos x			tg x	

- *Funciones Polinómicas*, son de la forma $f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ y su dominio es $\mathbb{R}$.
- *Funciones Racionales*, son de la forma $f(x) = \dfrac{a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n}{b_o x^n + b_1 x^{n-1} + ... + b_{n-1}x + b_n}$ y su dominio es $\mathbb{R}$ menos los valores que anulan el denominador.
- *Funciones Irracionales*, son del tipo $f(x) = \sqrt[n]{f'(x)}$, siendo su dominio:
  - El mismo que $f(x)$ si n es impar
  - El conjunto de valores reales que hagan $f(x) \geq 0$ si n es par
- *Funciones exponenciales*, son de la forma $f(x) = a^{f'(x)}$, con a>0 y a≠1, su dominio es $\mathbb{R}$.
- *Funciones logarítmicas*, son de la forma $f(x) = \log_a f'(x)$, con a>0 y $f'(x) > 0$
- *Funciones circulares*: $f(x) = senx, f(x) = \cos x$, su dominio es $\mathbb{R}$.

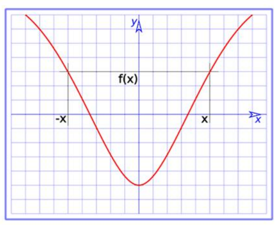
A partir de estas dos, podemos definir el resto de funciones circulares:

$$tg(x) = \frac{senx}{\cos x},\ \sec(x) = \frac{1}{\cos x} \text{ sus dominios son } \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}(2k+1), k \in Z\right\}$$

$$ctg(x) = \frac{\cos x}{senx},\quad cosec(x) = \frac{1}{senx} \text{ sus dominios son } \mathbb{R} - \{k\pi, k \in z\}$$

7.5.2.- Simetrías

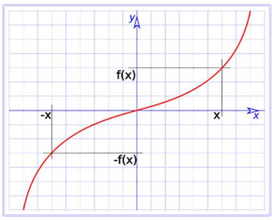
- La función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ es ***par*** si $\forall x \in A,\quad f(-x) = f(x)$



La curva de cualquier función par es simétrica respecto del eje OY

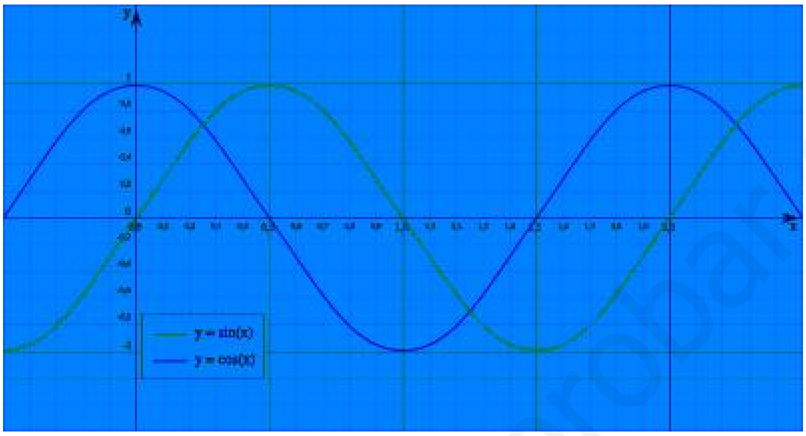
- La función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ es ***impar*** si $\forall x \in A, \quad f(-x) = -f(x)$

La curva de toda función impar es simétrica respecto del origen de Coordenadas (0,0)



7.5.3.- Periodicidad

- La función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ es ***periódica***, si existe un número real T distinto de cero, llamado ***periodo***, tal que: $f(x+T) = f(x)$



7.5.4.- Continuidad.

Las discontinuidades de una función, son los puntos donde la función no es continua.

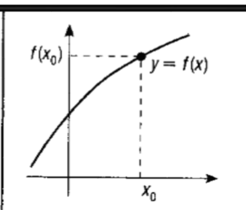
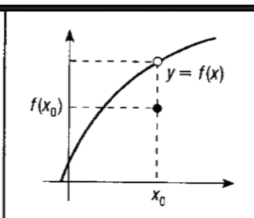
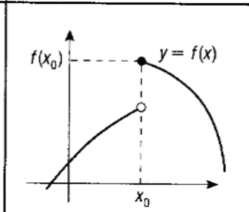
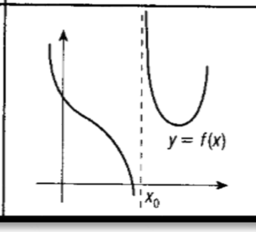
Según la definición de continuidad en un punto, una función es continua en un punto ***a*** cuando se cumple:

$$\begin{cases} a) \ \exists f(a) \\ b) \ \exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \\ c) \ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a) \end{cases}$$

Si en algún punto no se verifican los tres puntos anteriores, decimos que en dicho punto la función no es continua.

7.5.4.1.- Discontinuidades de una función

En la tabla siguiente se resumen los 4 tipos de discontinuidades:

Continua Existe el límite y coincide con la imagen. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$		**Evitable** Existe el límite, pero no coincide con la imagen. $f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$	
De salto Los límites laterales son finitos, pero diferentes. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$		**Asintótica** Los límites laterales son infinitos. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x), \quad \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$	

7.5.5.- Puntos de Corte con los ejes

- ✓ **Con el eje X:** Para calcular los puntos de corte de la función con el eje x, hacemos $f(x) = 0$ y calculamos las soluciones de dicha ecuación, y éstas son los puntos de corte con el eje x.

- ✓ **Con el eje Y:** Calculamos $f(0)$, y los puntos de corte son los puntos $(0, f(0))$.

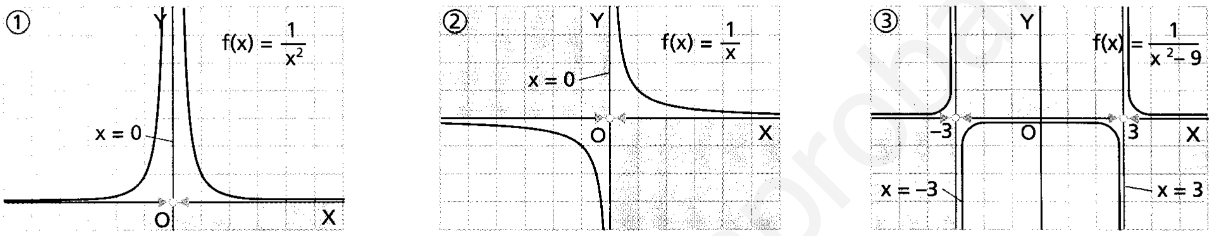
7.5.6.- Asíntotas y ramas infinitas

7.5.6.1.- Asíntota Vertical

La recta x=a es una asíntota vertical de la función $f(x)$ si existe alguno de estos límites:

$$1.-\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \qquad 2.-\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad 3.-\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Normalmente las asíntotas verticales se hallan en los valores de x que anulan el denominador.

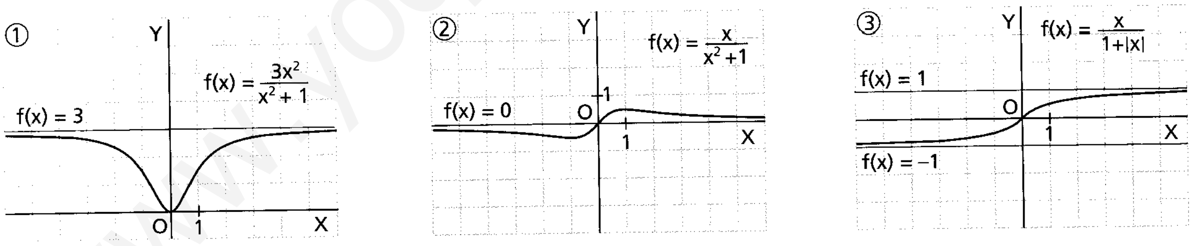


7.5.6.1.- Asíntota Horizontal

La recta y=k es una ***asíntota horizontal*** de la función $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$1.-\lim_{x\to+\infty} f(x) = k \qquad 2.-\lim_{x\to-\infty} f(x) = k'$$

Una función tiene como máximo 2 asíntotas horizontales correspondientes a cada uno de los límites en el infinito.



7.5.6.3.- Asíntota Oblicuas y ramas parabólicas

Se estudian solo si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, es decir si no hay asíntota horizontal.

Lo primero es estudiar el límite: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

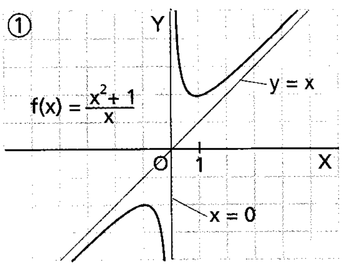
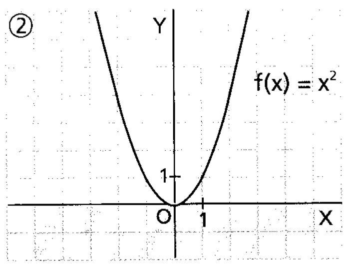
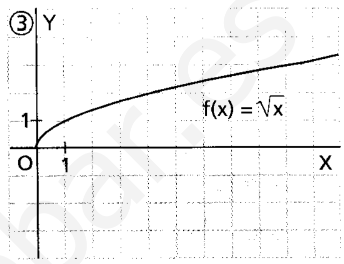
- Si $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ la curva tiene una ***rama parabólica*** en la dirección del eje OY.

- Si $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ la curva tiene una ***rama hiperbólica*** en la dirección OX. (de la forma $y = \sqrt{x}$)

- Si $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$, estudiamos el límite: $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$

  - ✓ Si $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ y $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = b$, la curva tiene la asíntota en la dirección $y=mx+b$ llamada ***asíntota oblicua.***

  - ✓ Si $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ y $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \infty$, la curva tiene una ***rama parabólica*** en la dirección de la recta y=mx

Asíntota vertical x=0 Asíntota Oblicua y=x	Rama Parabólica	Rama Hiperbólica
		

7.5.7.- Monotonía

En este punto, estudiaremos los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos y absolutos. Para ello nos ayudaremos de derivada, que igualaremos a cero para obtener los posibles extremos.

En una tabla, en la que representaremos la recta real, indicaremos con una línea sencilla los puntos de derivada nula, y con dos rayas los puntos de no dominio.

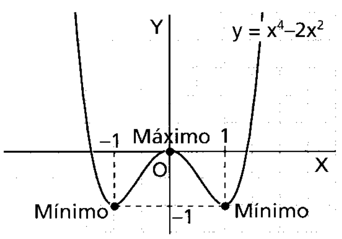
Por tanto, si utilizamos la tabla, tenemos:

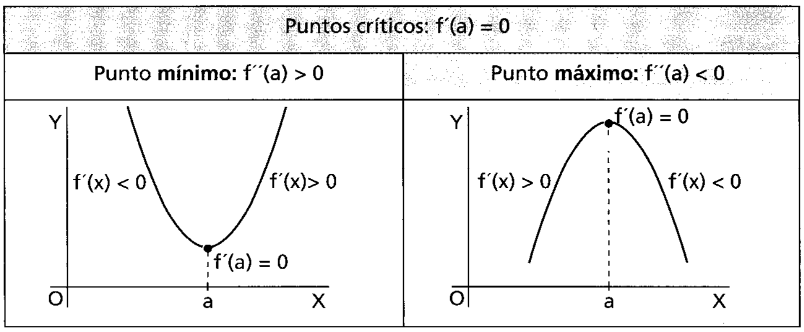
x	(-∞,0)	(0,1)	(1,+∞)
f'(x)	-	+	+
f(x)	↘	↗	↗

Mín (0,1)

Calculamos el signo de la derivada en cada uno de los intervalos formados y veremos si la función es creciente o decreciente, señalándolo con una flechita, y donde están los extremos relativos, que calcularemos.

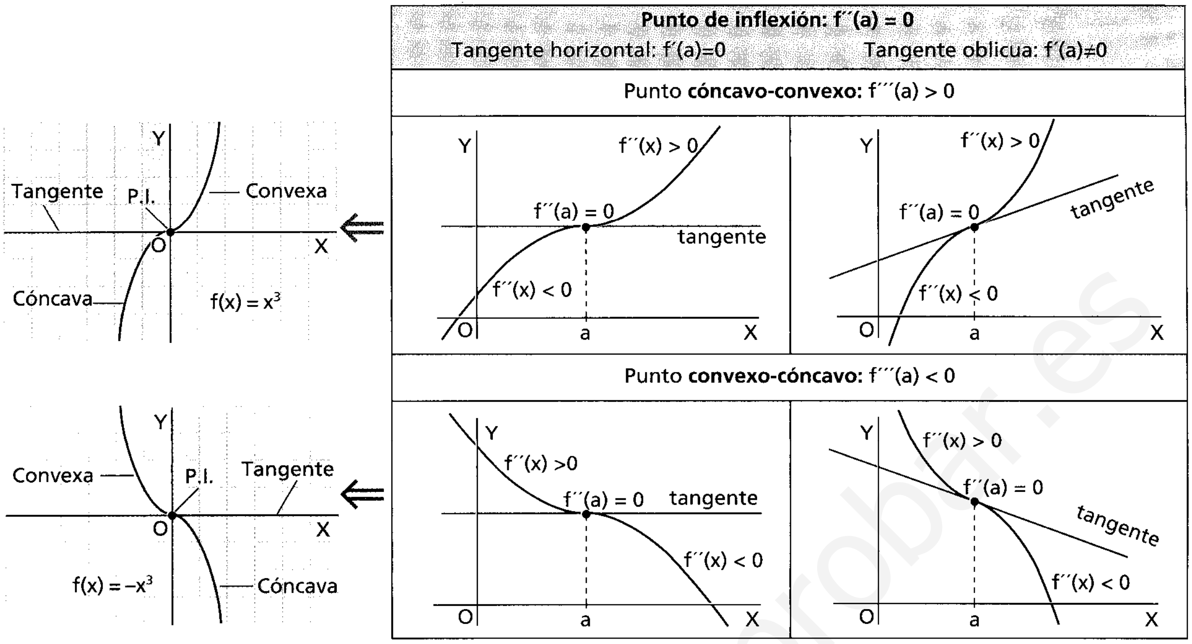
Véase el ejemplo del final.





7.5.8.- Curvatura

Para la curvatura, nos ayudaremos de la segunda derivada. Calculamos f''(x) y la igualamos a cero, de forma que estos puntos serán los posibles puntos de inflexión.



7.5.9.- Dibujo de la gráfica

Atendiendo a todos los datos obtenidos una vez seguidos los 8 pasos anteriores, ya estamos en paraje de poder representar la función.

Veamos todo esto con un ejemplo.

7.6.- Ejemplo

Representar la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

1.- Dominio:

La función es un cociente de polinomios, por tanto su dominio es el conjunto de los números reales, menos los valores que anulen el denominador.

$$x^2-4=0 \;\rightarrow\; x^2=4 \;\rightarrow\; x=\pm 2$$

$Dom(f)=\mathbb{R}-\{2,-2\}$

2.- Simetrías:

$f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-4}=-\dfrac{x^3}{x^2-4}=-f(x)$ ➔ Por tanto la función es impar, es simétrica respecto del origen de coordenadas.

3.- Periodicidad:

La función $f(x)$ no es periódica, no aparecen funciones circulares.

4.- Puntos de discontinuidad:

Como $f(x)$ es un cociente de polinomios, es una función continua excepto donde se anule el denominador.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x->-2^+} \dfrac{x^3}{x^2-4} = \dfrac{-8}{0^-} + \infty \\ \lim\limits_{x->-2^-} \dfrac{x^3}{x^2-4} = \dfrac{-8}{0^+} - \infty \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x->2^+} \dfrac{x^3}{x^2-4} = \dfrac{8}{0^+} + \infty \\ \lim\limits_{x->2^-} \dfrac{x^3}{x^2-4} = \dfrac{8}{0^-} - \infty \end{cases}$$

La función $f(x)$ presenta en x=2 y en x=-2 dos discontinuidades asintóticas.

5.- Puntos de corte con los ejes.

Hacemos $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4} = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^3}{x^2-4} = 0 \;\Rightarrow\; x^3 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$

Calculamos $f(0) = 0$

Por tanto el punto de corte con el eje X y con el eje Y es el (0,0)

6.- Asíntotas:

Como hemos visto ya, $f(x)$ presenta en x=2 y en x=-2 dos asíntotas verticales.

Como $\lim\limits_{x->+\infty} f(x) = \infty$ $\quad y \quad$ $\lim\limits_{x->-\infty} f(x) = -\infty$, no presenta asíntotas horizontales, pero si puede presentar alguna asíntota oblicua o rama parabólica.

Calculamos $\lim\limits_{x->+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x->+\infty} \dfrac{x^3}{x^3-4x} = \lim\limits_{x->\pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2-4} = 1$

Y ahora calculamos $\lim\limits_{x->\pm\infty} [f(x)-x] = \lim\limits_{x->\pm\infty} \left[\dfrac{x^3}{x^2-4} - x\right] = \lim\limits_{x->\pm\infty} \left[\dfrac{x^3-x^3+4x}{x^2-4}\right] = 0$

Por tanto $f(x)$ presenta una asíntota oblicua en y=x.

7.- Monotonía y curvatura:

Para ello, lo primero es calcular la derivada de $f(x)$

$f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$ y la igualamos a cero para calcular los extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2} = 0 \;\Rightarrow\; x^2(x^2-12) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{12} \\ x = -\sqrt{12} \end{cases}$$

Estudiamos ahora el signo de $f'(x)$ para ver los intervalos de monotonía.

Dibujamos una línea recta en la que ponemos los puntos que hacen la derivada 0, los puntos que hacen la función cero, y los puntos donde no es continua.

x	$(-\infty,-\sqrt{12})$	$(-\sqrt{12},-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\sqrt{12})$	$(\sqrt{12},+\infty)$
f'(x)	+	-	-	-	-	+
f(x)	↗	↘	↘	↘	↘	↗

Mín (-2,1) Punto de Inflexión Máx (-2,1)

$f(x)$ es creciente en el intervalo $\left(-\infty,-\sqrt{12}\right)\cup\left(\sqrt{12},+\infty\right)$

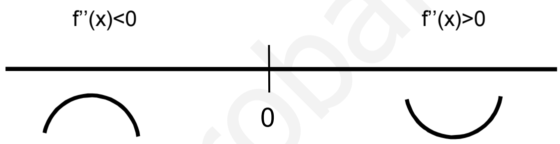
$f(x)$ es decreciente en el intervalo $\left(-\sqrt{12},-2\right)\cup\left(-2,2\right)\cup\left(+\sqrt{12},+\infty\right)$

$f(x)$ tiene un máximo en $x=-\sqrt{12}$ $f(-\sqrt{12})=-3\sqrt{3}$ en el punto $\left(-\sqrt{12},-3\sqrt{3}\right)$

$f(x)$ tiene un mínimo en $x=\sqrt{12}$ $f(\sqrt{12})=3\sqrt{3}$ en el punto $\left(\sqrt{12},3\sqrt{3}\right)$

Vamos a calcular ahora los puntos de inflexión, donde la curva cambia de cóncava a convexa. Para ello trabajamos con la segunda derivada. $f''(x)$

$f''(x)=\dfrac{8x(x^2+12)}{\left(x^2-4\right)^3}$ y la igualamos a cero



$f''(x)=\dfrac{8x(x^2+12)}{\left(x^2-4\right)^3}=0$ ➔ $8x(x^2+12)=0$ ➔

$\{x=0$

Obtenemos 1 punto, vamos a ver dónde la función cambia de convexa a cóncava. Tenemos un punto de inflexión en el punto (0,0)

8.- Gráfica de la función:

Con todos los datos que ya tenemos de $f(x)$, lo único que nos falta es representarla.