

ACTIVIDADES FINALES

■ 16. Calcula las derivadas de las siguientes funciones potenciales:

a) $D[x^6]$

d) $D[3x^2 - x + 4]$

g) $D\left[\frac{1}{(x^5 - x^2 + 3)^5}\right]$

b) $D\left[\frac{7}{x^5}\right]$

e) $D[(x^2 + x)^4]$

h) $D\left[\frac{x^2 - 1}{4}\right]$

c) $D[8\sqrt[4]{x}]$

f) $D\left[\frac{5x}{4 + 5x}\right]$

i) $D\left[\frac{3}{\sqrt{4x^2 + 5}}\right]$

■ 17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones exponenciales:

a) $D\left[4^{\frac{3}{x}}\right]$

c) $D[e^{2x^2} - e^x - 2]$

e) $D\left[\frac{e^{-2x}}{4}\right]$

b) $D[3 \cdot 2^x]$

d) $D[2^{x^2} \cdot 3^{x^2}]$

f) $D[(e^{2x} + 1)^3]$

■ 18. Calcula las derivadas de las siguientes funciones logarítmicas:

a) $D[\ln(x^2 + 7)]$

d) $D[\ln \sqrt[3]{3x^2 + 1}]$

g) $D[\ln(\ln x)]$

b) $D[\ln(e^x + 2)]$

e) $D[\log_2(x^2 + 1)]$

h) $D[\ln(x \cdot \sqrt{4 - x^2})]$

c) $D[\ln(3 - 4x^3)^5]$

f) $D\left[\ln\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}\right)\right]$

i) $D\left[\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)\right]$

■ 19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones trigonométricas y de sus inversas:

a) $D[\sin 4x]$

g) $D[\arcsen \sqrt{x - 1}]$

m) $D[\operatorname{tg}(x^2 + 2)]$

b) $D[4 \sin x]$

h) $D[\sin x^{-4}]$

n) $D[\operatorname{tg} \sqrt{x}]$

c) $D\left[\sin\left(\frac{x}{4}\right)\right]$

i) $D[\sqrt[4]{\sin x}]$

ñ) $D[\operatorname{tg}^3(x + 1)]$

d) $D\left[\sin\left(\frac{4}{x}\right)\right]$

j) $D[\cos(x + 1)]$

o) $D[\arccos(\ln x)]$

e) $D[\sin x^4]$

k) $D[\cos^3(x^3 + 1)]$

p) $D[\operatorname{tg}(3^9)]$

f) $D[\sin^4 x]$

l) $D[\operatorname{arctg}(2x + 1)^2]$

q) $D[\sqrt{\operatorname{tg} x}]$

■ 20. Calcula las derivadas que se indican:

a) $f(x) = \frac{\sqrt{1 + 2x^4}}{x}; Df(1)$

c) $h(x) = \sin^2 3x - \cos^2 3x; Dh(\pi)$

b) $g(x) = \ln[x + \sqrt{4 + x^2}]; Dg(0)$

d) $j(x) = \frac{2^x}{2^x + 1}; Dj(-1)$

■ 21. Dada la función $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + x^2 - ax + 5$, calcula el valor de a , para que $Df(1) = -3$.

Haz un estudio análogo para la función $g(x) = \frac{x^2 - x - a}{x + 1}$, siendo $Dg(1) = 0$.

SOLUCIONES

16. Quedan:

$$\text{a) } D[x^6] = 6x^5$$

$$\text{b) } D\left[\frac{7}{x^5}\right] = D[7x^{-5}] = -7 \cdot 5x^{-6} = \frac{-35}{x^6}$$

$$\text{c) } D[8\sqrt[4]{x}] = D[8x^{1/4}] = \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$$

$$\text{d) } D[3x^2 - x + 4] = 6x - 1$$

$$\text{e) } D[(x^2 + x)^4] = (8x + 4)(x^2 + x)^3$$

$$\text{f) } D\left[\frac{5x}{4+5x}\right] = \frac{20}{(4+5x)^2}$$

$$\text{g) } D\left[\frac{1}{(x^5 - x^2 + 3)^5}\right] = D[(x^5 - x^2 + 3)^{-5}] = \frac{-25x^4 + 10x}{(x^5 - x^2 + 3)^6}$$

$$\text{h) } D\left[\frac{x^2 - 1}{4}\right] = \frac{x}{2}$$

$$\text{i) } D\left[\frac{3}{\sqrt{4x^2 + 5}}\right] = \frac{-12x}{\sqrt{(4x^2 + 5)^3}}$$

17. Las derivadas quedan:

$$\text{a) } D[4^{3/x}] = 4^{3/x} \cdot \ln 4 \cdot \left(\frac{-3}{x^2}\right)$$

$$\text{b) } D[3 \cdot 2^x] = 3 \cdot 2^x \cdot \ln 2$$

$$\text{c) } D[e^{2x^2} - e^x - 2] = e^{2x^2} \cdot 4x - e^x$$

$$\text{d) } D[2^{x^2} \cdot 3^{x^2}] = D[6^{x^2}] = 6^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln 6$$

$$\text{e) } D\left[\frac{e^{-2x}}{4}\right] = \frac{-e^{-2x}}{2}$$

$$\text{f) } D[(e^{2x} + 1)^3] = 6 \cdot e^{2x} (e^{2x} + 1)^2$$

18. Las derivadas quedan:

$$\text{a) } D[\ln(x^2+7)] = \frac{2x}{x^2+7}$$

$$\text{b) } D[\ln(e^x+2)] = \frac{e^x}{e^x+2}$$

$$\text{c) } D[\ln(3-4x^3)^5] = D[5 \cdot \ln(3-4x^3)] = 5 \cdot \frac{-12x^2}{3-4x^3} = \frac{-60x^2}{3-4x^3}$$

$$\text{d) } D[\ln \sqrt[3]{3x^2+1}] = D\left[\frac{1}{3} \ln(3x^2+1)\right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{6x}{3x^2+1} = \frac{2x}{3x^2+1}$$

$$\text{e) } D[\log_2(x^2+1)] = \frac{2x}{(x^2+1) \ln 2}$$

$$\text{f) } D\left[\ln \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right] = D[\ln(1-\sqrt{x}) - \ln(1+\sqrt{x})] = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}} = \frac{-\sqrt{x}}{x-x^2}$$

$$\text{g) } D[\ln(\ln x)] = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \cdot \ln x}$$

$$\text{h) } D[\ln(x \cdot \sqrt{4-x^2})] = D\left[\ln x + \frac{1}{2} \ln(4-x^2)\right] = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{4-x^2} = \frac{4-2x^2}{x(4-x^2)}$$

$$\text{i) } D\left[\ln \frac{1+x}{1-x}\right] = D[\ln(1+x) - \ln(1-x)] = \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2}$$

19. Las derivadas quedan:

$$\text{a) } D[\sin 4x] = 4 \cdot \cos 4x$$

$$\text{b) } D[4 \sin x] = 4 \cdot \cos x$$

$$\text{c) } D\left[\sin\left(\frac{x}{4}\right)\right] = \frac{1}{4} \cos \frac{x}{4}$$

$$d) D\left[\operatorname{sen}\left(\frac{4}{x}\right)\right] = -\frac{4}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{4}{x}\right)$$

$$e) D[\operatorname{sen} x^4] = 4x^3 \cdot \cos x^4$$

$$f) D[\operatorname{sen}^4 x] = D[(\operatorname{sen} x)^4] = 4 \cdot \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x$$

$$g) D[\operatorname{arc} \operatorname{sen} \sqrt{x-1}] = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3x-2-x^2}}$$

$$h) D[\operatorname{sen} x^{-4}] = \frac{-4 \cdot \cos(x^{-4})}{x^5}$$

$$i) D[\sqrt[4]{\operatorname{sen} x}] = \frac{\cos x}{4 \sqrt[4]{\operatorname{sen}^3 x}}$$

$$j) D[\cos(x+1)] = -\operatorname{sen}(x+1)$$

$$k) D[\cos^3(x^3+1)] = -9x^2 \cdot \cos^2(x^3+1) \cdot \operatorname{sen}(x^3+1)$$

$$l) D[\operatorname{arc} \operatorname{tg}(2x+1)^2] = \frac{4x+2}{8x^4+16x^3+12x^2+4x+1}$$

$$m) D[\operatorname{tg}(x^2+2)] = \frac{2x}{\cos^2(x^2+2)}$$

$$n) D(\operatorname{tg} \sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}}$$

$$\tilde{n}) D[\operatorname{tg}^3(x+1)] = \frac{3 \operatorname{tg}^2(x+1)}{\cos^2(x+1)}$$

$$o) D[\operatorname{arc} \cos(\ln x)] = \frac{-1}{x \cdot \sqrt{1-\ln^2 x}}$$

$$p) D[\operatorname{tg}(3^x)] = \frac{3^x \cdot \ln 3}{\cos^2 3^x}$$

$$q) D[\sqrt{\operatorname{tg} x}] = \frac{1}{2 \cos^2 x \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x}}$$

20. Las derivadas quedan:

$$\text{a) } D[f(x)] = \frac{2x^4 - 1}{x^2 \sqrt{1+2x^2}} \Rightarrow D[f(1)] = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{b) } D[g(x)] = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} \Rightarrow D[g(0)] = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } D[h(x)] = 12 \sin 3x \cdot \cos 3x \Rightarrow D[h(\pi)] = 0$$

$$\text{d) } D[j(x)] = \frac{2^x \cdot \ln 2}{(2^x + 1)^2} \Rightarrow D[j(-1)] = \frac{2 \ln 2}{9}$$

21. El estudio en cada caso queda:

- $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + x^2 - ax + 5 \Rightarrow D[f(x)] = 8x^3 + 9x^2 + 2x - a \Rightarrow D[f(1)] = 19 - a = -3 \Rightarrow a = 22$
- $g(x) = \frac{x^2 - x - a}{x+1} \Rightarrow D[g(x)] = \frac{x^2 + 2x + a - 1}{(x+1)^2} \Rightarrow D[g(1)] = \frac{2+a}{4} = 0 \Rightarrow a = -2$

www.yoquieroaprobar.es

■ 22. Calcula las derivadas que se indican a continuación:

a) $D[(1-x)\sqrt{1+x}]$

j) $D[x^{2a} \cdot a^{2x} \cdot e^{-x}]$

r) $D\left[\sqrt[4]{x^4-2}\right]$

b) $D[(x^2-1)^2 \cdot 5^{2x}]$

k) $D[\ln \sqrt{x(2-x)}]$

s) $D[\arctg^2 \sqrt{x}]$

c) $D[2^x \cdot \ln 2]$

l) $D\left[\arctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]$

t) $D[10^{\sqrt{x}} \cdot \ln \sqrt{x} \cdot (2x)^8]$

d) $D\left[\ln\left(\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right)\right]$

m) $D[\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}]$

u) $D\left[\arcsen \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

e) $D[x^2 \ln x + x \ln x^2]$

n) $D[\ln(e^x - 5x^4)]$

v) $D[\ln(\ln \cos x)]$

f) $D[\operatorname{sen} x \cdot 3^{2x}]$

ñ) $D[(\operatorname{sen} 2x)^{\cos x}]$

w) $D[\operatorname{sen}^4 x^3 \cdot \cos^3 x^4]$

g) $D\left[\frac{2^{3x}}{x^2}\right]$

o) $D[\ln(\operatorname{tg} x)]$

x) $D\left[\frac{1}{1+x} + \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)\right]$

h) $D\left[\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right]$

p) $D[(x^2+1)^{2x}]$

y) $D[2^x \cdot \sqrt{4+2^x}]$

i) $D\left[\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)\right]$

q) $D\left[\frac{2x^2+1}{2x^2-1}\right]$

z) $D\left[\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\right]$

■ 23. La trayectoria que sigue una motora viene dada por $e(t) = -t^3 + 9t^2 + 5$, donde e viene dado en kilómetros y t en horas. Halla la velocidad instantánea a las 4 horas ($t = 4$ h).
¿Al cabo de cuánto tiempo la velocidad se anula?



■ 24. Dada la función $f(x) = \frac{2}{x-1}$, calcula $f^{(10)}(x)$.

■ 25. Calcula los valores de x para los cuales $D[f(x)] > 0$, siendo $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12$.

■ 26. Calcula $f^{(2003)}(x)$ para la función $f(x) = e^{-2x}$.

■ 27. ¿En qué punto la función $f(x) = -3x^2 + 7x - 2$ tiene una tangente que forma un ángulo de 45° con el eje OX ?

■ 28. Halla la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $4x^2 - y^2 = 4$ en el punto $(\sqrt{5}, 4)$.

■ 29. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola $x^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ en el punto de abscisa 8.

SOLUCIONES

22. Las derivadas quedan:

$$a) D[(1-x)\sqrt{1+x}] = -1\sqrt{1+x} + \frac{1-x}{2\sqrt{1+x}} = \frac{-1-3x}{2\sqrt{1+x}}$$

$$b) D[(x^2-1)\cdot 5^{2x}] = 2x\cdot 5^{2x} + 5^{2x}\cdot \ln 5 \cdot 2\cdot (x^2-1)$$

$$c) D[2^x \cdot \ln 2] = 2^x \cdot (\ln 2)^2$$

$$d) D\left[\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)\right] = \frac{\cos x}{1+\sin x} - \frac{-\cos x}{1-\sin x} = \frac{2}{\cos x}$$

$$e) D[x^2 \ln x + x \ln x^2] = 2x \cdot \ln x + \frac{x^2}{x} + 2 \ln x + 2 = 2x \cdot \ln x + x + 2 \ln x + 2$$

$$f) D[\sin x \cdot 3^{2x}] = \cos x \cdot 3^{2x} + 3^{2x} \cdot 2 \cdot \ln 3 \cdot \sin x$$

$$g) D\left[\frac{2^{3x}}{x^2}\right] = \frac{2^{3x} \cdot 3 \cdot \ln 2 \cdot x^2 - 2x \cdot 2^{3x}}{x^4} = \frac{2^{3x}(3x \ln 2 - 2)}{x^3}$$

$$h) D\left[\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right] = \frac{-\sin x(1-\cos x) - \sin x(1+\cos x)}{2(1-\cos x)^2 \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}} = \frac{-1}{1-\cos x}$$

$$i) D\left[\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)\right] = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+9} = \frac{9}{x(x^2+9)}$$

$$j) D[x^{2a} \cdot a^{2x} \cdot e^{-x}] = 2ax^{2a-1} \cdot a^{2x} \cdot e^{-x} + a^{2x} \cdot \ln a \cdot 2 \cdot x^{2a} \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot x^{2a} \cdot a^{2x} \\ = x^{2a} \cdot a^{2x} \cdot e^{-x} \left(\frac{2a}{x} + 2 \ln a - 1\right)$$

$$k) D[\ln \sqrt{x(2-x)}] = D\left[\frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln(2-x)\right] = \frac{1-x}{x(2-x)}$$

$$l) D \left[\operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right] = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$m) D \left[\operatorname{tg}^2 \sqrt{x} \right] = 2 (\operatorname{tg} \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}}$$

$$n) D \left[\ln(e^x - 5x^4) \right] = \frac{e^x - 20x^3}{e^x - 5x^4}$$

$$\tilde{n}) D \left[(\operatorname{sen} 2x)^{\cos x} \right] = 2 \cos x (\operatorname{sen} 2x)^{\cos x - 1} \cdot \left[\cos 2x - (\operatorname{sen} x)^2 \ln(\operatorname{sen} 2x) \right]$$

$$o) D \left[\ln \operatorname{tg} x \right] = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$$

$$p) D \left[(x^2 - 1)^{7x} \right] = 7(x^2 - 1)^{7x-1} \cdot \left[2x^2 + (x^2 - 1) \ln(x^2 - 1) \right]$$

$$q) D \left[\frac{2x^2 + 1}{2x^2 - 1} \right] = \frac{4x(2x^2 - 1) - 4x(2x^2 + 1)}{(2x^2 - 1)^2} = \frac{-8x}{(2x^2 - 1)^2}$$

$$r) D \left[\sqrt[4]{x^4 - 2} \right] = \frac{4x^3}{4 \sqrt[4]{(x^4 - 2)^3}} = \frac{x^3}{\sqrt[4]{(x^4 - 2)^3}}$$

$$s) D \left[\operatorname{arc\,tg}^2 \sqrt{x} \right] = 2 \cdot \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (1+x)} = \frac{\operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot (1+x)}$$

$$t) D \left[10^{\sqrt{x}} \cdot \ln \sqrt{x} \cdot (2x)^8 \right] = \frac{10^{\sqrt{x}} \cdot \ln 10}{2\sqrt{x}} \cdot \ln \sqrt{x} \cdot (2x)^8 + \frac{1}{2x} \cdot 10^{\sqrt{x}} \cdot (2x)^8 + 16(2x)^7 \cdot 10^{\sqrt{x}} \cdot \ln \sqrt{x}$$

$$u) D \left[\operatorname{arc\,sen} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x^2) \sqrt{1-2x^2}}$$

$$v) D[\ln(\ln \cos x)] = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x \cdot \ln(\cos x)}$$

$$w) D[\operatorname{sen}^4 x^3 \cdot \cos^3 x^4] = 4 \operatorname{sen}^3 x^3 \cdot \cos^3 x^4 \cdot 3x^2 \cdot \cos^3 x^4 - 3 \cdot \cos^2 x^4 \cdot \operatorname{sen} x^4 \cdot 4x^3 \cdot \operatorname{sen}^4 x^3$$

$$x) D\left[\frac{1}{1+x} + \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)\right] = \frac{-1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-2-x}{(1+x)^2}$$

$$y) D[2^x \cdot \sqrt{4+2^x}] = 2^x \cdot \ln 2 \cdot \sqrt{4+2^x} + \frac{2^x \cdot \ln 2 \cdot 2^x}{2\sqrt{4+2^x}} = \frac{2^x \cdot \ln 2 (8+3 \cdot 2^x)}{2\sqrt{4+2^x}}$$

$$z) D\left[\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\right] = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1}{\sqrt{x^2+1}-x} - \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + 1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{-2}{\sqrt{x^2+1}}$$

23. Queda:

La velocidad viene dada por la expresión: $v(t) = e'(t) = -3t^2 + 18t$

La velocidad instantánea en $t=4$ es $v(4) = 24 \text{ km/h}$

La velocidad se anula es: $0 = -3t^2 + 18t \Rightarrow t=0$ y $t=6$.

Al cabo de 6 horas se anula.

24. Queda:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot n!}{(x-1)^{n+1}} \Rightarrow f^{(10)}(x) = \frac{2 \cdot 10!}{(x-1)^{11}}$$

25. La derivada queda: $D[f(x)] = 3x^2 - 12x > 0$ y el intervalo resultante es: $x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

26. Queda:

$$f^{(n)}(x) = (-2)^n \cdot e^{-2x} \Rightarrow f^{(2003)}(x) = -2^{2003} \cdot e^{-2x}$$

27. El punto buscado es el punto en el que la pendiente de la recta tangente valga 1.

$$f'(x) = -6x + 7 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{El punto es } P(1, 2).$$

28. La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada en el punto dado.

$$\text{Derivamos la función en implícitas: } 8x - 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{4x}{y} \Rightarrow m = \sqrt{5}$$

$$\text{Por tanto, la ecuación de la recta queda: } y - 4 = \sqrt{5}(x - \sqrt{5}) \Rightarrow y = \sqrt{5}x - 1$$

29. El punto es $P(8, 6)$.

$$\text{La pendiente de la recta es: } 2x - 8 - 2y' = 0 \Rightarrow y' = x - 4 \Rightarrow y'(8) = 8 - 4 \Rightarrow m = 4$$

$$\text{Por tanto, la ecuación de la recta es: } y - 6 = 4(x - 8) \Rightarrow y = 4x - 26$$