

Problema 1 (2 puntos)

1. Calcula el *MCD* y el *mcm* de los siguientes polinomios

$$P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 + x^2 + 10x - 6$$

$$Q(x) = x^5 + 5x^4 + x^3 - 19x^2 - 6x + 18$$

Solución: $P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 + x^2 + 10x - 6 = (x-1)^2(x+3)(x^2-2)$

$$Q(x) = x^5 + 5x^4 + x^3 - 19x^2 - 6x + 18 = (x-1)(x+3)^2(x^2-2)$$

$$MCD(P(x), Q(x)) = (x-1)(x+3)(x^2-2) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 4x + 6$$

$$\begin{aligned} mcm(P(x), Q(x)) &= (x-1)^2(x+3)^2(x^2-2) = \\ &= x^6 + 4x^5 - 4x^4 - 20x^3 + 13x^2 + 24x - 18 \end{aligned}$$

2. Calcular x en la siguiente ecuación

$$\frac{2x}{x^2 - 4x + 3} - \frac{x-1}{x^2 - 1} = \frac{2}{x^2 - 2x - 3}$$

Solución:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1) \\ x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \\ x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) \end{cases} \implies mcm = (x+1)(x-1)(x-3)$$

$$2x(x+1) - (x-1)(x-3) = 2(x-1) \implies x^2 + 4x - 1 = 0 \implies \begin{cases} x = -2 + \sqrt{5} \\ x = -2 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Problema 2 (2 puntos)

1. Resolver por el método de Gauss:

$$\begin{cases} x+ & y+ & 2z = & 1 \\ 2x+ & y+ & z = & 3 \\ 2x- & 2y- & z = & -1 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} x+ & y+ & 2z = & 1 \\ 2x+ & y+ & z = & 3 \\ 2x- & 2y- & z = & -1 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} (E_2 - 2E_1) \\ (E_3 - 2E_1) \end{matrix}} \begin{cases} x+ & y+ & 2z = & 1 \\ - & y- & 3z = & 1 \\ - & 4y- & 5z = & -3 \end{cases} \xrightarrow{(E_3 - 4E_2)}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ -y - 3z = 1 \\ 7z = -7 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

2. Hallar las soluciones reales de:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1$$

Solución:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1 &\implies \sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{x-1} \implies \\ x+1 &= 1 + (x-1) - 2\sqrt{x-1} \implies 1 = \sqrt{x-1} \implies x = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Problema 3 (3 puntos) Calcular

1.

$$2 \cdot 3^{2x-1} + 3^{x+1} - 1 = 0$$

2.

$$\log(x^2 - 1) + 2 = 1 + 2\log(x + 1)$$

Solución:

1.

$$2 \cdot 3^{2x-1} + 3^{x+1} - 1 = 0 \implies \frac{2 \cdot 3^{2x}}{3} + 3 \cdot 3^x - 1 = 0 \implies 2 \cdot 3^{2x} + 9 \cdot 3^x - 3 = 0$$

Haciendo el cambio de variables $u = 3^x$ la ecuación quedará de la siguiente forma:

$$2u^2 + 9u - 3 = 0 \implies u = 0,3117376914, \quad u = -4,811737691$$

Deshaciendo el cambio de variable tenemos que

$$u = 0,3117376914 = 3^x \implies \log 0,3117376914 = \log 3^x \implies$$

$$x \log 3 = \log 0,3117376914 \implies$$

$$x = \frac{\log 0,3117376914}{\log 3} = -1,060968632$$

En el otro caso, $u = -4,811737691 = 3^x$ no es posible obtener solución.

2.

$$\log(x^2 - 1) + 2 = 1 + 2\log(x + 1) \implies \log(x^2 - 1) + 1 = 2\lg(x + 1) \implies$$

$$\lg 10(x^2 - 1) = \lg(x + 1)^2 \implies 10(x^2 - 1) = (x + 1)^2 \implies 9x^2 - 2x - 11 = 0$$

$$\implies \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{11}{9} \end{cases}$$

La solución $x = -1$ no es válida.

Problema 4 (3 puntos) Resolver las inecuaciones siguientes:

1.

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2} \geq 0$$

2.

$$\frac{x - 1}{10} - \frac{3x}{5} \geq \frac{2x}{6} + 1$$

Solución:

1.

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x + 2} = \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x + 2)} \geq 0$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, +\infty)$
$x + 2$	-	+	+	+
$x + 1$	-	-	+	+
$x - 3$	-	-	-	+
$\frac{(x-3)(x+1)}{(x+2)}$	-	+	-	+

La solución pedida sería:

$$(-2, -1] \cup [3, +\infty)$$

2.

$$\frac{x - 1}{10} - \frac{3x}{5} \geq \frac{2x}{6} + 1$$

$$3x - 3 - 18x \geq 10x + 30 \implies -25x \geq 33 \implies x \leq -\frac{33}{25}$$

$$\left(-\infty, -\frac{33}{25}\right)$$