DEPARTAMENTO DE FUNDAMENTOS DE ECONOMÍA E HISTORIA ECONÓMICA

Examen de Análisis Matemático I (Licenciatura)

NOMBRE: **D.N.I.**

TEST → 5 puntos
Cada respuesta errónea resta 0,2 puntos.

- El límite de la función $f(x)=\dfrac{4x-\operatorname{sen}2x}{3+x-\cos 3x}$

cuando $x \to 0$, vale:
a) 2. b) −2.
c) Ninguna de las anteriores. Su valor es ____.

- La ecuación de la recta tangente a

$f(x)=x\sqrt{5-x^2}$ en el punto (1, f(1)) es:
a) $y=2x-1$
b) $3x+2y-5=0$
c) Ninguna de las anteriores, su ecuación es:
____________.

- La derivada de $f(x)=\dfrac{e^{2x+2}}{(x-1)^2}$ en el punto

$x=-1$ vale:
a) $-\dfrac{1}{8}$ b) $\dfrac{9}{4}$ c) $\dfrac{3}{4}$

- La función $f(x)=(x+3)(x-2)^4$ tiene:

a) Un máximo en $x = 2$ y un mínimo en $x = -3$.
b) Un punto de inflexión en $x = -1$ y un máximo en $x = 2$.
c) Ninguna de las anteriores.

- El área del recinto limitado por los ejes de coordenadas y la curva $y=e^{-x}$ viene dada por la integral impropia $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$. Su valor es:

a) 1 b) e^{-1}
c) No es convergente: vale ∞.

- La función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+7x-8}$ es discontinua

en $x = 1$. Tal discontinuidad puede evitarse definiendo:
a) $f(1) = 2/9$ b) $f(1) = 1$
c) Ninguna de las anteriores

- La función $f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{si } x<0 \\ 5\sin x-2\cos x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

es continua en $x = 0$:
a) Para todos los valores de a y b.
b) Para $b = -2$ y cualquier valor de a.
c) Para $a = 1$ y cualquier valor de b.

- La función $f(x)=x^2-\cos x$

a) Corta dos veces al eje OX.
b) No corta al eje OX, pues x^2 siempre es mayor que $\cos x$.
c) Ninguna de las anteriores.

- La función $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{e^x}$ verifica:

a) Es creciente en todo su dominio.
b) Tiene una asíntota horizontal.
c) Ninguna de las anteriores.

- El área del recinto plano encerrado entre la

curva de ecuación $y=\dfrac{x^2}{4}-x$, y el eje OX, vale:
a) 2/5 b) 5/3
c) Ninguna de las anteriores, el área vale _____

PROBLEMAS → 5 puntos

1. Dada la función $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x}$ halla:

a) Sus asíntotas. (0,75 puntos)
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (0,5 puntos)
c) Sus máximos y mínimos relativos, y sus puntos de inflexión, si los tiene. (0,5 puntos)
d) Un esbozo de su gráfica. (0,5 puntos)
e) Su polinomio de Taylor de grado 3 en $x = 1$. (0,75 puntos)

2. Halla las siguientes integrales:

a) $\int x\ln x dx$. (0,75 puntos)

b) $\int \dfrac{x+8}{x^2+x-2}dx$. (0,75 puntos)

c) $\int \dfrac{(x-3)^2}{4x}dx$. (0,5 puntos)

Soluciones

1. El límite de la función $f(x)=\dfrac{4x-\text{sen }2x}{3+x-\cos 3x}$ cuando $x\to 0$, vale:

a) 2. b) −2.

c) Ninguna de las anteriores. Su valor es ____.

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x-\text{sen }2x}{3+x-\cos 3x}=\left[\frac{0}{2}\right]=0$$

2. La ecuación de la recta tangente a $f(x)=x\sqrt{5-x^2}$ en el punto (1, f(1)) es:

a) $y=2x-1$ b) $3x+2y-5=0$

c) Ninguna de las anteriores, su ecuación es: _____

Sol

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

$$f(x)=x\sqrt{5-x^2}\;\Rightarrow\; f'(x)=\sqrt{5-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{5-x^2}}$$

Se tiene: $f(1)=2$, $f'(0)=3/2$.

La recta tangente será: $y-2=\dfrac{3}{2}(x-1)\Rightarrow\; y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$

3. La derivada de $f(x)=\dfrac{e^{2x+2}}{(x-1)^2}$ en el punto $x=-1$ vale:

a) $-\dfrac{1}{8}$ b) $\dfrac{9}{4}$ **c)** $\dfrac{3}{4}$

Sol.

$$f(x)=\frac{e^{2x+2}}{(x-1)^2}\;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{2e^{2x+2}(x-1)^2-e^{2x+2}\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}\;\Rightarrow\;\text{(simplificando)}$$

$$\Rightarrow\; f'(x)=\frac{2e^{2x+2}(x-1)-e^{2x+2}\cdot 2}{(x-1)^3}=\frac{2(x-2)e^{2x+2}}{(x-1)^3}\;\to\; f'(-1)=\frac{2(-1-2)e^0}{(-1-1)^3}=\frac{-6}{-8}=\frac{3}{4}.$$

4. La función $f(x)=(x+3)(x-2)^4$ tiene:

a) Un máximo en $x = 2$ y un mínimo en $x = -3$.

b) Un punto de inflexión en $x = -1$ y un máximo en $x = 2$.

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$f(x)=(x+3)(x-2)^4$

- $f'(x)=(x-2)^4+4(x+3)(x-2)^3=5(x-2)^3(x+2)$

La derivada se anula en $x = -2$ y $x = 2$. La respuesta a) no puede ser, pues $x = -3$ no es singular

- $f''(x)=15(x-2)^2(x+2)+5(x-2)^3=20(x-2)^2(x+1)$ → Se anula en $x = -1$ y $x = 2$.
  $f''(-2)<0$ → en $x = -2$ hay máximo. $f''(2)=0$
- $f'''(x)=40(x-2)(x+1)+20(x-2)^2=60x(x-2)$
  $f'''(-1)\neq 0$ → en $x = -1$ hay punto de inflexión.

5. La función $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{e^x}$ verifica:

a) Es creciente en todo su dominio.

b) Tiene una asíntota horizontal.

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Su derivada es:

$$f'(x)=\frac{2(x+1)e^x-(x+1)^2e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x(1-x^2)}{e^{2x}}=\frac{1-x^2}{e^x}$$

La derivada se anula en $x=\pm 1$.

- Si $x<-1$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $-1<x<1$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece. Por tanto en $x=-1$ hay un mínimo relativo.
- Si $x>1$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece. Por tanto, en $x=1$ hay un máximo relativo.

b) Una función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$, siendo b una constante. La asíntota será la recta $y=b$.

En este caso, la asíntota horizontal es la recta $y=0$, pues:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L'H)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x+1)}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L'H)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

6. La función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+7x-8}$ es discontinua en $x=1$. Tal discontinuidad puede evitarse definiendo:

a) ***f*(1) = 2/9** b) $f(1)=1$

b) Ninguna de las anteriores

Solución:

En $x=1$ la discontinuidad es evitable, pues existe el límite:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+7x-8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{2x}{2x+7}=\frac{2}{9}$$

7. La función $f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{si } x<0\\ 5\sin x-2\cos x & \text{si } x\ge 0\end{cases}$ es continua en $x=0$:

a) Para todos los valores de a y b.

b) Para $b=-2$ y cualquier valor de a.

c) Para $a=1$ y cualquier valor de b.

Solución:

a) Por separado, para cada intervalo de definición, las funciones dadas son continuas y derivables. El único punto conflictivo es $x=0$, en donde las funciones se juntan.

En ese punto la función está definida, siendo $f(0)=-2$; para que sea continua, además, debe tener límite en $x=0$ y coincidir con su valor de definición.

Veamos:

Si $x\to 0^-$, $f(x)=ax+b\to b$

Si $x\to 0^+$, $f(x)=5\sin x-2\cos x\to -2$.

Ambos límites coinciden cuando $b=-2$.

Luego, la función $f(x)=\begin{cases} ax-2 & \text{si } x<0\\ 5\sin x-2\cos x & \text{si } x\ge 0\end{cases}$ es continua en todo **R**.

8. El área del recinto limitado por los ejes de coordenadas y la curva $y = e^{-x}$ viene dada por la integral impropia $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$. Su valor es:

a) 1
b) e^{-1}
c) No es convergente: vale ∞.
Sol.

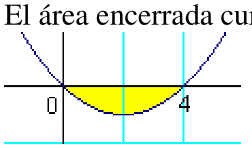
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^{t} e^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty}(-e^{-x})\Big|_0^t = \lim_{t\to+\infty}(-e^{-t}+e^0) = 1$$

9. La función $f(x) = x^2 - \cos x$
a) Corta dos veces al eje *OX*.
b) No corta al eje *OX*, pues x^2 siempre es mayor que $\cos x$.
c) Ninguna de las anteriores.
Sol.
Se aplica el teorema de Bolzano.
$f(-1) = 1 - \cos(-1) > 0$
$f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0 \rightarrow$ en el intervalo $(-1, 0)$ hay un corte.
$f(1) = 1 - \cos 1 > 0 \rightarrow$ en el intervalo $(0, 1)$ hay otro corte.

10. El área del recinto plano encerrado entre la curva de ecuación $y = \frac{x^2}{4} - x$, y el eje OX, vale:

a) 2/5
b) 5/3
c) Ninguna de las anteriores, el área vale _____

Solución:
El área encerrada curvas es la sombreada.



$$A = -\int_0^4\left(\frac{x^2}{4} - x\right)dx = \left(-\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4 = -\frac{64}{12} + 8 = \frac{8}{3}$$

PROBLEMAS

2. Dada la función $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x}$ halla:

a) Sus asíntotas. (0,75 puntos)
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (0,5 puntos)
c) Sus máximos y mínimos relativos, y sus puntos de inflexión, si los tiene. (0,5 puntos)
d) Un esbozo de su gráfica. (0,5 puntos)
e) Su polinomio de Taylor de grado 3 en $x = 1$. (0,75 puntos)

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^2}{x}=0$ $\Rightarrow$ la recta $x=0$ es AV

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2}=1$$

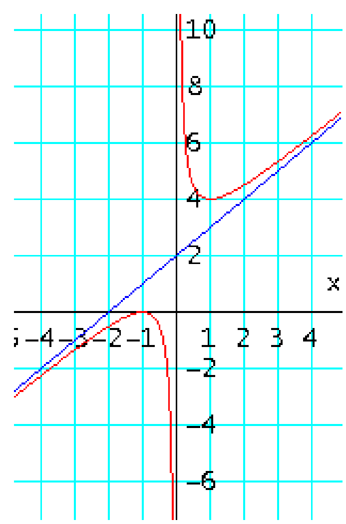
$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)^2}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x}\right)=2$$

La recta $y=x+2$ es asíntota oblicua.

b) $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x}$ $\Rightarrow$ $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$ $\Rightarrow$ $f'(x)=0$ si $x=-1$ y $x=1$.

Además hay que tener en cuenta que no está definida en $x = 0$. Por tanto:

- Si $x<-1$, $f'(x)>0 \Rightarrow$ $f(x)$ crece.
- Si $-1<x<0$, $f'(x)<0 \Rightarrow$ $f(x)$ decrece. En consecuencia, en $x = -1$ se tiene un máximo
- Si $0<x<1$, $f'(x)<0 \Rightarrow$ $f(x)$ decrece.
- Si $x>1$, $f'(x)>0 \Rightarrow$ $f(x)$ crece. En consecuencia, en $x = 1$ se tiene un mínimo



c) $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$

Como f'' no se anula $\Rightarrow$ no hay PI

Como $f''(-1)=\dfrac{2}{(-1)^3}=-2$ <0, se confirma que en $x = -1$ hay un máximo.

Análogamente, $f''(1)=2$ confirma que en $x = 1$ se da un máximo.

a) Con los datos obtenidos y dando algunos valores se puede trazar su gráfica.

Valores: (–1, 0), máximo; (1, 4), mínimo; (–4, –9/4); (4, 25/4).

e) $f(1)=4$; $f'(x)=0$; $f''(1)=2$

$$f'''(x)=\frac{-6}{x^4}\Rightarrow f'''(1)=-6$$

Luego,

$$P(x)=4+0(x-1)+\frac{2}{2!}(x-1)^2-\frac{6}{3!}(x-1)^3=4+(x-1)^2-(x-1)^3 \Rightarrow P(x)=6-5x+4x^2-x^3$$

2. Halla las siguientes integrales:

a) $\int x \ln x dx$. (0,75 puntos) b) $\int \frac{x+8}{x^2+x-2} dx$. (0,75 puntos)

c) $\int \frac{(x-3)^2}{4x} dx$. (0,5 puntos)

Sol.

a) $\int x \ln x dx$, puede hacerse por partes:

$u = x \ln x \Rightarrow du = (\ln x + 1)dx$

$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$

Luego, $\int x \ln x dx = x^2 \ln x - \int (x \ln x + x) dx = x^2 \ln x - \int x \ln x dx - \int x dx \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\int x \ln x dx = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2}$

De donde, $\int x \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4}$

b) $\int \frac{x+8}{x^2+x-2} dx$, puede hacerse por el método de descomposición en fracciones simples.

Como las raíces del denominador son $x = 1$ y $x = -2$: $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, puede escribirse la igualdad:

$$\frac{x+8}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

Luego:

$x + 8 = A(x+2) + B(x-1)$

si $x = 1$: $9 = 3A \Rightarrow A = 3$

si $x = -2$: $6 = -3B \Rightarrow B = -2$

Con esto:

$$\int \frac{x+8}{x^2+x-2} dx = \int \frac{3}{x-1} dx + \int \frac{-2}{x+2} dx = 3L(x-1) - 2L(x+2) + c$$

c) Operando:

$$\int \frac{(x-3)^2}{4x} dx = \int \frac{x^2-6x+9}{4x} dx = \int \frac{1}{4} x dx - \int \frac{3}{2} dx + \int \frac{9}{4x} dx = \frac{1}{8} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{9}{4} \ln x + c$$