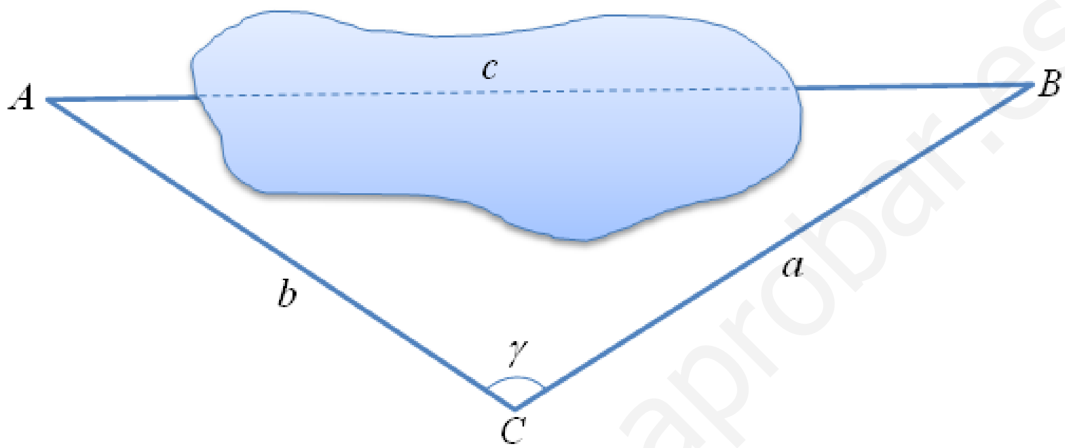
Usos de la trigonometría. Cálculo de alturas y distancias (I)
Distancia entre dos puntos accesibles entre los que media un obstáculo

Supongamos que deseamos medir la distancia c desde A hasta B, puntos entre los cuales media un obstáculo, tal y como se puede apreciar en la figura.



Para ello elegimos un punto C desde el cual se pueda medir la distancia hasta A, que llamaremos b; y la distancia hasta B, que llamaremos a. También mediremos el ángulo $\widehat{ACB}$ que, para abreviar, lo llamaremos γ.

Utilizando el teorema del coseno, tenemos que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Ejemplo.
Un túnel $\overline{AB}$ ha de atravesar una montaña. Para calcular su longitud se toman desde el punto C las siguientes medidas: $\overline{AC} = 1250$ m, $\overline{BC} = 1700$ m y $\widehat{ACB} = 132^\circ$. Hallar dicha longitud.

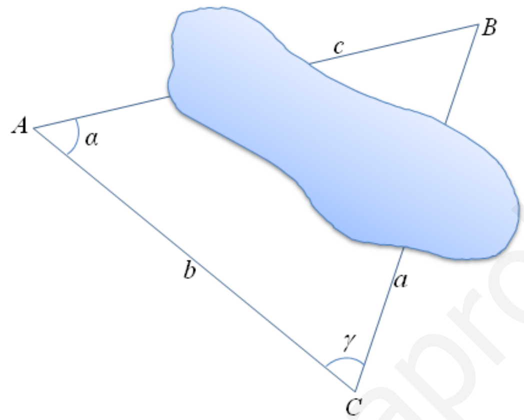
Solución.
En este caso $b = 1250$, $a = 1700$ y $\gamma = 132^\circ$. Por tanto:

$$c^2 = 1700^2 + 1250^2 - 2\cdot 1700\cdot 1250\cdot\cos 132^\circ \approxeq 7296305{,}077 \Rightarrow c \approxeq 2701,17$$

Por tanto la longitud del túnel es de, aproximadamente, 2701 metros.

Usos de la trigonometría. Cálculo de alturas y distancias (II)
Distancia entre un punto accesible y otro inaccesible

Supongamos que deseamos medir la distancia c desde A hasta B, puntos entre los cuales media un obstáculo. A diferencia del caso anterior, no tenemos acceso al punto B, tal y como se se muestra en la figura siguiente.



Pues bien, en este caso elegimos un punto C y medimos la distancia hasta A, que llamaremos b. También mediremos los ángulos $\widehat{ACB}$, al que llamaremos γ, y $\widehat{BAC}$. al que llamaremos α. Medidos estos dos ángulos, sabremos la medida del ángulo $\widehat{ABC}$, al que llamaremos β, pues la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180 grados: $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$.

Haciendo uso del teorema de los senos, tenemos que

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$$

y de la expresión anterior podemos despejar c:

$$c = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \cdot \operatorname{sen}\gamma$$

Ejemplo.
Para calcular la anchura $\overline{AB}$ de un río se elige un punto C que está en la misma orilla que A y se toman las siguientes medidas: $\overline{AC} = 67$ m, $\widehat{BAC} = 99^\circ \widehat{ACB} = 20^\circ$. ¿Cuál es la distancia entre A y B?

Solución.
En este caso $b = 67$, $\gamma = 20^\circ$y $\beta = 180^\circ - (99^\circ + 20^\circ) = 61^\circ$. Por tanto:

$$c = \frac{67}{\operatorname{sen} 61^\circ} \cdot \operatorname{sen} 20^\circ \Rightarrow c \approxeq 26,2\,\text{m}.$$

O sea, la distancia entre A y B es de, aproximadamente, 26, 2 metros.

Usos de la trigonometría. Cálculo de alturas y distancias (III)
Altura de un punto de pie accesible

Para calcular la altura de un punto de pie accesible se pueden presentar dos casos distintos. El primero de ellos, que el suelo sea horizontal (figura 1) y el segundo, que el suelo presente una determinada inclinación (ver figura 2).

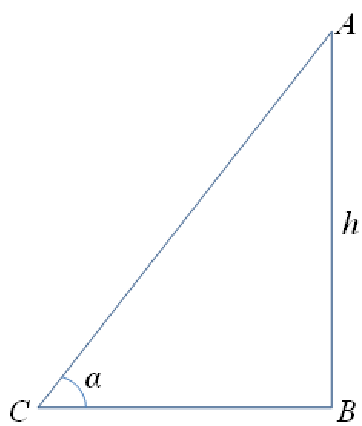


Figura 1

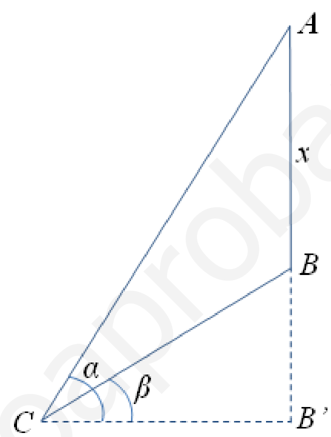


Figura 2

Si el suelo es horizontal (figura 1) el triángulo ABC es rectángulo y entonces es muy fácil hallar la altura h.

$$\text{tg } \alpha = \frac{h}{\overline{CB}} \Rightarrow h = \overline{CB} \cdot \text{tg } \alpha$$

Si el suelo presenta una inclinación dada, β (figura 2), conocemos también el ángulo $\widehat{ACB} = \alpha - \beta$ y el ángulo $\widehat{CAB} = 90^\circ - \alpha$. Utilizando el teorema de los senos tenemos:

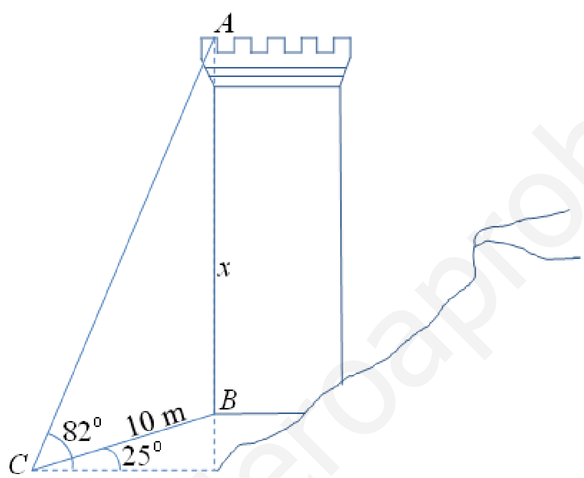
$$\frac{\overline{CB}}{\text{sen } \widehat{CAB}} = \frac{x}{\text{sen } \widehat{ACB}} \Rightarrow \frac{\overline{CB}}{\text{sen } (90^\circ - \alpha)} = \frac{x}{\text{sen}(\alpha - \beta)}$$

Y de aquí podremos despejar con facilidad la altura x:

$$x = \frac{\overline{CB} \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)}{\text{sen}(90^\circ - \alpha)}$$

Ejemplo.
Un pasillo plano de 10 metros de largo y que forma un ángulo de 25°con la horizontal, conduce al pie de una gran torre. Calcular la altura de ésta, sabiendo que desde el inicio del pasillo el ángulo de elevación de su punto más alto es de 82°.

Solución.



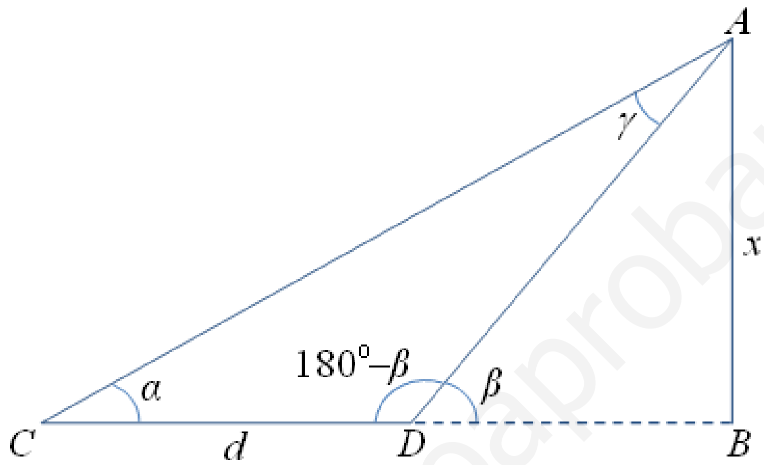
Llamemos $x = \overline{AB}$ a la altura de la torre. En este caso $\overline{CB} = 10$, $\widehat{ACB} = \alpha - \beta = 82° - 25° = 57°$ y $\widehat{CAB} = 90° - \alpha = 90° - 82° = 8°$. Por tanto:

$$x = \frac{\overline{CB} \cdot \text{sen}(\alpha - \beta)}{\text{sen}(90° - \alpha)} = \frac{10 \cdot \text{sen } 82°}{sen\, 8°} \Rightarrow x = 60{,}26$$

Así pues, la altura de la torre es de, aproximadamente, 60, 26 metros.

Usos de la trigonometría. Cálculo de alturas y distancias (IV)
Altura de un punto de pie inaccesible desde un terreno horizontal sin obstáculos

Deseamos calcular la altura $\overline{AB} = x$ de un punto de pie inaccesible, tal y como se muestra en la figura.



Para ello elegimos un punto C y medimos el ángulo de elevación de A, que lo llamaremos α. Avanzamos una distancia $\overline{CD} = d$ y desde d volvemos a medir el ángulo de elevación de A, que llamaremos β.
El método a seguir consiste en calcular $\overline{AC}$ en el triángulo ACD y luego calcular x en el triángulo ACB (o bien calcular $\overline{AD}$ en el triángulo ACD y a continuación x en el triángulo ADB). Obsérvese en primer lugar que conocidos α y β se puede calcular γ:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + 180^\circ - \beta) = \beta - \alpha$$

Ahora aplicamos el teorema de los senos en el triángulo ACD:

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen}\,(180^\circ - \beta)} = \frac{d}{\text{sen}\ \gamma} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{d \cdot \text{sen}\,(180^\circ - \beta)}{\text{sen}\ \gamma}$$

Finalmente, en el triángulo ACB se tiene:

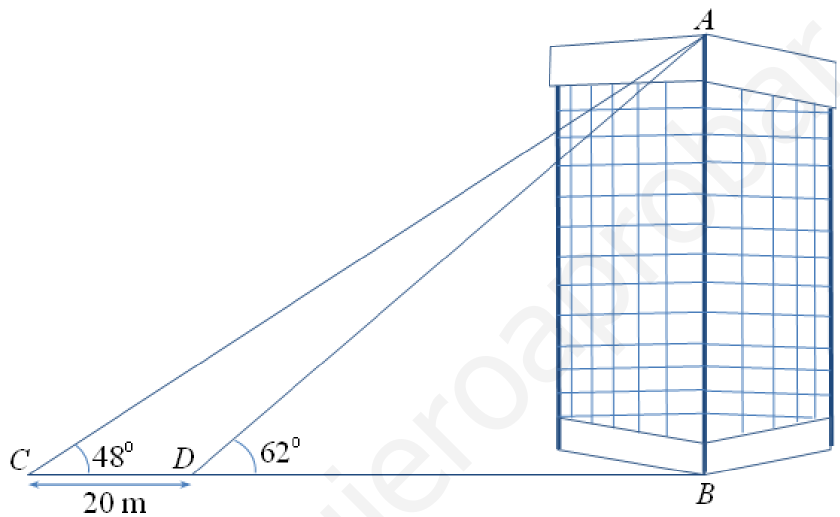
$$\text{sen}\ \alpha = \frac{x}{\overline{AC}} \Rightarrow x = \overline{AC} \cdot \text{sen}\ \alpha$$

De una manera análoga podemos calcular la distancia $\overline{CB}$ si nos interesa:

$$\cos\ \alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{CB} = \overline{AC} \cdot \cos\ \alpha$$

Ejemplo.
Desde un punto a ras de suelo se ve la azotea de un edificio con un ángulo de elevación de 48°. Avanzando 20 metros en dirección al edificio, el ángulo de elevación se incrementa en 14°. Calcular la altura del edificio.

Solución.



Llamemos $x = \overline{AB}$ a la altura del edificio. En este caso tenemos que $\alpha = 48°$, $\beta = 62°$, $d = 20$ y $\gamma = \beta - \alpha = 62° - 48° = 14°$ Entonces, según se ha explicado anteriormente:

$$\overline{AC} = \frac{d \cdot \text{sen}\,(180° - \beta)}{\text{sen}\ \gamma} = \frac{20 \cdot \text{sen}\ 118°}{\text{sen}\ 14°} \approxeq 72{,}994$$

Por tanto:

$$x = \overline{AC} \cdot \text{sen}\ \alpha = \overline{AC} \cdot \text{sen}\ 48° \approxeq 54{,}245$$

Es decir, la altura del edificio es de, aproximadamente, 54, 245 metros.