

PROBLEMAS DE RECTA TANGENTE

1. Dada la función $f(x) = 3\sqrt{x}$ determina la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 4$.
2. Dada la función $f(x) = x^3 - 1$ determina la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de ordenada $y = -2$.
3. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 6}$ en el punto de abscisa $x = 2$.
4. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$ en el punto de abscisa $x = 0$.
5. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2 \cdot e^{2-x}$ en el punto de abscisa $x = 1$.
6. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ en el punto de abscisa $x = 1$.
7. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ en el punto de ordenada $y = 0$.
8. Halla la ecuación de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$ en el punto de abscisa $x = 4$.
9. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \frac{x}{x-1}$ paralela a la recta de ecuación $r: 4x + y - 9 = 0$.
10. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ en el punto de abscisa $x = 2$. Calcula el área del triángulo determinado por dichas rectas y el eje de abscisas.
11. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = \ln(2-x)$ en el punto de ordenada $y = 0$.
12. Halla los puntos de la curva $y = 3x^3 - 2x^2 + x$ en los que la recta tangente es paralela a la recta $2x - 3y + 5 = 0$. Escribe las ecuaciones de dichas tangentes.
13. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4x^3 - 2x^2 - 10$ en su punto de inflexión.
14. Determina los puntos de la gráfica de $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 2$ en los que la tangente es paralela a la secante que corta la curva en $x = 0$ y en $x = 1$.
15. Halla el punto de la función $f(x) = \operatorname{sen}x^2$ en que la recta tangente tiene pendiente $-2\sqrt{\pi}$ y escribe su ecuación.
16. Halla los puntos de la curva $y = 3x^2 - 5x + 12$ en los que la recta tangente a ella pasa por el origen de coordenadas. Escribe las ecuaciones de dichas tangentes.
17. Halla los puntos de la curva $y = \frac{1}{4}x^2 + 4x - 4$ en los que la recta tangente a ésta pasa por el punto $P(0, -8)$. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes.
18. Dada la función $f(x) = x^2 - 3x + 4$
 - a) Ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en un punto cualquiera $x = a$.
 - b) Halla el valor o los valores de "a" para que dicha recta tangente pase por el origen de coordenadas.

1 ¿Recta tangente a $f(x) = 3\sqrt{x}$ en $x=4$?

* Pto?

$$\left. \begin{array}{l} P(4, f(4)) \\ f(4) = 3\sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{P(4, 6)}$$

* Pendiente? Sabemos que $f'(a) =$ pendiente de la recta tg a $f(x)$ en $x=a$

En nuestro caso, $m_t = f'(4)$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} ; f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} \end{array} \right\} \Rightarrow m_t = \frac{3}{2\sqrt{4}} ; \boxed{m_t = \frac{3}{4}}$$

* Luego $P(4, 6)$

$$\left. \begin{array}{l} m_t = \frac{3}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow t: y = 6 + \frac{3}{4}(x-4) \Rightarrow t: y = 6 + \frac{3}{4}x - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t: y = \frac{3}{4}x + 3$$

2 ¿Recta tg a $f(x) = x^3 - 1$ en el pto de ordenada $y = -2$?

* Pto?

$$\left. \begin{array}{l} y = -2 \\ y = x^3 - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow -2 = x^3 - 1 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-1} \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

Luego $\boxed{P(-1, -2)}$

* Pendiente? Sabemos que $f'(a) =$ pendiente de la recta tg a $f(x)$ en $x=a$

En nuestro caso, $m_t = f'(-1)$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow m_t = 3 \cdot (-1)^2 \Rightarrow \boxed{m_t = 3}$$

* Luego, $P(-1, -2)$

$$\left. \begin{array}{l} m_t = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow t: y = -2 + 3(x+1) \Rightarrow t: y = -2 + 3x + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t: y = 3x + 1$$

3 ¿Recta tangente a $f(x) = \sqrt{x^2+3x+6}$ en $x=2$?

* Pto?

$$P(2, f(2))$$

$$f(2) = \sqrt{(2)^2 + 3 \cdot (2) + 6} = \sqrt{4+6+6} = 4$$

$$\Rightarrow P(2, 4)$$

* Pendiente? Sabemos que $f'(a) =$ pendiente de la recta tg a $f(x)$ en $x=a$

En nuestro caso, $m_t = f'(2)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+3x+6}} \cdot (2x+3) ; f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_t = \frac{2 \cdot (2) + 3}{2\sqrt{(2)^2 + 3 \cdot (2) + 6}} ; m_t = \frac{7}{2 \cdot 4} ; m_t = \frac{7}{8}$$

* Por tanto,

$$m_t = \frac{7}{8}$$

$$P(2, 4)$$

$$\Rightarrow t: y = 4 + \frac{7}{8}(x-2) \Rightarrow t: y = 4 + \frac{7}{8}x - \frac{7}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t: y = \frac{7}{8}x + \frac{9}{4}$$

4 ¿Recta tg a $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$ en $x=0$?

* Pto?

$$P(0, f(0))$$

$$f(0) = \frac{\sqrt{0+1}}{0+2} ; f(0) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(0, \frac{1}{2})$$

* Pendiente? Sabemos que $f'(a) =$ pendiente de la recta tg a $f(x)$ en $x=a$

En nuestro caso,

$$m_t = f'(0)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot (x+2) - \sqrt{x+1} \cdot 1 = \frac{x+2}{2\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x+1}}{(x+2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x+2 - 2(\sqrt{x+1})^2}{2\sqrt{x+1}(x+2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x+2 - 2x-2}{2(x+2)^2\sqrt{x+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-x}{2(x+2)^2\sqrt{x+1}}$$

$$\text{Luego, } m_t = f'(0) = \frac{0}{2 \cdot 4 \cdot 1} \Rightarrow \boxed{m_t = 0}$$

* Por tanto,

$$\left. \begin{array}{l} P(0, \frac{1}{2}) \\ m_t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow t: y = \frac{1}{2} + 0(x-0) \Rightarrow \boxed{t: y = \frac{1}{2}}$$

5) ¿Recta tg a $f(x) = x^2 \cdot e^{2-x}$ en $x=1$?

* Pto?

$$\left. \begin{array}{l} P(1, f(1)) \\ f(1) = (1)^2 \cdot e^{2-1}; f(1) = e \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{P(1, e)}$$

* Pendiente? Sabemos que $f'(a) =$ pendiente de la recta tg a $f(x)$ en $x=a$
En nuestro caso,

$$m_t = f'(1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \boxed{f'(x) = 2x \cdot e^{2-x} + x^2 \cdot e^{2-x} \cdot (-1) = e^{2-x} \cdot (2x - x^2)} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_t = f'(1) = e^1 \cdot \underbrace{(2-1)}_1 \Rightarrow \boxed{m_t = e}$$

* Por tanto,

$$\left. \begin{array}{l} m_t = e \\ P(1, e) \end{array} \right\} \Rightarrow t: y = e + e(x-1) \Rightarrow t: y = \cancel{e} + ex - \cancel{e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t: y = ex}$$

6 ¿Recta tg a $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ en $x=1$?

* Pto?

$$P(1, f(1))$$

$$f(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(1, 1/2)$$

* Pendiente? Sabemos que $f'(a)$ = pendiente de la recta tg a $f(x)$ en $x=a$
En nuestro caso,

$$m_t = f'(1)$$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot 2\sqrt{x} - 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{-2}{4x} = \frac{-1}{2x} = \frac{-1}{4x\sqrt{x}} = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$\text{Luego, } m_t = f'(1) = \frac{-1}{4\sqrt{1^3}} \Rightarrow m_t = \frac{-1}{4}$$

* Por tanto,

$$P(1, 1/2)$$

$$m_t = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow t: y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) \Rightarrow t: y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t: y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

7 ¿Recta tg a $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ en el pto de ordenada $y=0$?

* Pto?

$$y=0$$

$$y = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x-2) \cdot (x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -3 & 0 & 4 & \\ & & 2 & -2 & -4 & \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x-2=0; \quad x=2 \quad P_1(2,0)$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\begin{array}{l} x=2 \quad P_1(2,0) \\ x=-1 \quad P_2(-1,0) \end{array}$$

* Pendiente? $f'(a)$ = pendiente de la tg a $f(x)$ en $x=a$

$$\left. \begin{array}{l} P_1(2,0) \Rightarrow m_t = f'(2) \\ f'(x) = 3x^2 - 6x \end{array} \right\} \Rightarrow m_t = 3 \cdot (2)^2 - 6(2) \Rightarrow \boxed{m_t = -3}$$

$$\left. \begin{array}{l} P_2(-1,0) \Rightarrow m_t = f'(-1) \\ f'(x) = 3x^2 - 6x \end{array} \right\} \Rightarrow m_t = 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) \Rightarrow \boxed{m_t = 9}$$

* Por tanto,

$$\left. \begin{array}{l} P_1(2,0) \\ m_t = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow t_1: y = 0 - 3(x-2) \Rightarrow \boxed{t_1: y = -3x + 6}$$

$$\left. \begin{array}{l} P_2(-1,0) \\ m_t = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow t_2: y = 0 + 9(x+1) \Rightarrow \boxed{t_2: y = 9x + 9}$$

2) ¿Recta tg y recta normal a $f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$ en $x=4$?

RECTA TANGENTE

* Pto?

$$\left. \begin{array}{l} x=4 \Rightarrow P(4, f(4)) \\ f(4) = \frac{4 - \sqrt{4}}{4 + \sqrt{4}} = \frac{4-2}{4+2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{P(4, 1/3)}$$

* Pendiente? Sabemos que $f'(a)$ = pendiente de la recta tg a $f(x)$ en $x=a$

En nuestro caso,

$$m_t = f'(4)$$

$$f'(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot (x + \sqrt{x}) - (x - \sqrt{x}) \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x + \sqrt{x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{x + \sqrt{x}} - \frac{x}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - x - \frac{x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(x + \sqrt{x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x} - \cancel{\frac{3x}{2\sqrt{x}}}}{(x + \sqrt{x})^2} = \frac{2\sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}}{(x + \sqrt{x})^2} = \frac{2\sqrt{x} - \frac{x \cdot \sqrt{x}}{x}}{(x + \sqrt{x})^2}$$

Racionalizar

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x+\sqrt{x})^2}$$

$$\text{Luego, } m_t = f'(4) = \frac{\sqrt{4}}{(4+\sqrt{4})^2} = \frac{2}{(4+2)^2} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \Rightarrow \boxed{m_t = \frac{1}{18}}$$

* Por tanto,

$$P(4, \frac{1}{3})$$

$$m_t = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow t: y = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}(x-4) \Rightarrow t: y = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}x - \frac{4}{18} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t: y = \frac{1}{18}x + \frac{1}{9}$$

RECTA NORMAL

La recta normal a $f(x)$ en $x=a$ es la perpendicular a la t_t en $x=a$

* Pto? $\boxed{P(4, \frac{1}{3})}$

* Pendiente?

$$m_t = \frac{1}{18}$$

Si dos rectas son \perp entonces el producto de sus pendientes es $-1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m_t \cdot m_n = -1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{18} \cdot m_n = -1 \Rightarrow \boxed{m_n = -18}$$

* Por tanto,

$$P(4, \frac{1}{3})$$

$$m_n = -18$$

$$\Rightarrow n: y = \frac{1}{3} - 18(x-4) \Rightarrow n: y = \frac{1}{3} - 18x + 72 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n: y = -18x + \frac{217}{3}$$

9) ¿Recta tg a $f(x) = \frac{x}{x-1}$ paralela a $r: 4x+y-9=0$?

* $r: 4x+y-9=0 \Rightarrow r: y = -4x+9$
 t es paralela a $r \Rightarrow m_t = m_r \Rightarrow m_t = -4$

* Punto?

$m_t = -4$
 $m_t = f'(x)$ } $\Rightarrow f'(x) = -4 \Rightarrow \frac{-1}{(x-1)^2} = -4 \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$

$\Rightarrow x-1 = \pm \frac{1}{2}$

$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 1 ; x = \frac{3}{2} \Rightarrow P_1\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right) ; \boxed{P_1\left(\frac{3}{2}, 3\right)} \\ x = -\frac{1}{2} + 1 ; x = \frac{1}{2} \Rightarrow P_2\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) ; \boxed{P_2\left(\frac{1}{2}, -1\right)} \end{cases}$

$\begin{cases} \bullet x = \frac{3}{2} \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-1} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3 ; \underline{f\left(\frac{3}{2}\right) = 3} \\ \bullet x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1 ; \underline{f\left(\frac{1}{2}\right) = -1} \end{cases}$

* Por tanto,

$\left. \begin{matrix} P_1\left(\frac{3}{2}, 3\right) \\ m_t = -4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow t_1: y = 3 - 4\left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow t_1: y = 3 - 4x + 6 \Rightarrow \boxed{t_1: y = -4x + 9}$

$\left. \begin{matrix} P_2\left(\frac{1}{2}, -1\right) \\ m_t = -4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow t_2: y = -1 - 4\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow t_2: y = -1 - 4x + 2 \Rightarrow \boxed{t_2: y = -4x + 1}$

GRÁFICA

$y = \frac{x}{x-1}$ (Hipérbola)

1) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

2) AVI $x=1$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=1 \text{ es AV}}$

AH

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} = \frac{-\infty}{-\infty} \oplus = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = \frac{+\infty}{+\infty} \oplus = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1) = 1$$

$\Rightarrow y=1$ es AH

Posición

Izquierda $x = -100$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Función} \rightarrow y = \frac{-100}{-101} = 0'99... \\ \text{Asíntota} \rightarrow y = 1 \end{array} \right. \Rightarrow f(x) \text{ está por debajo de la AH}$

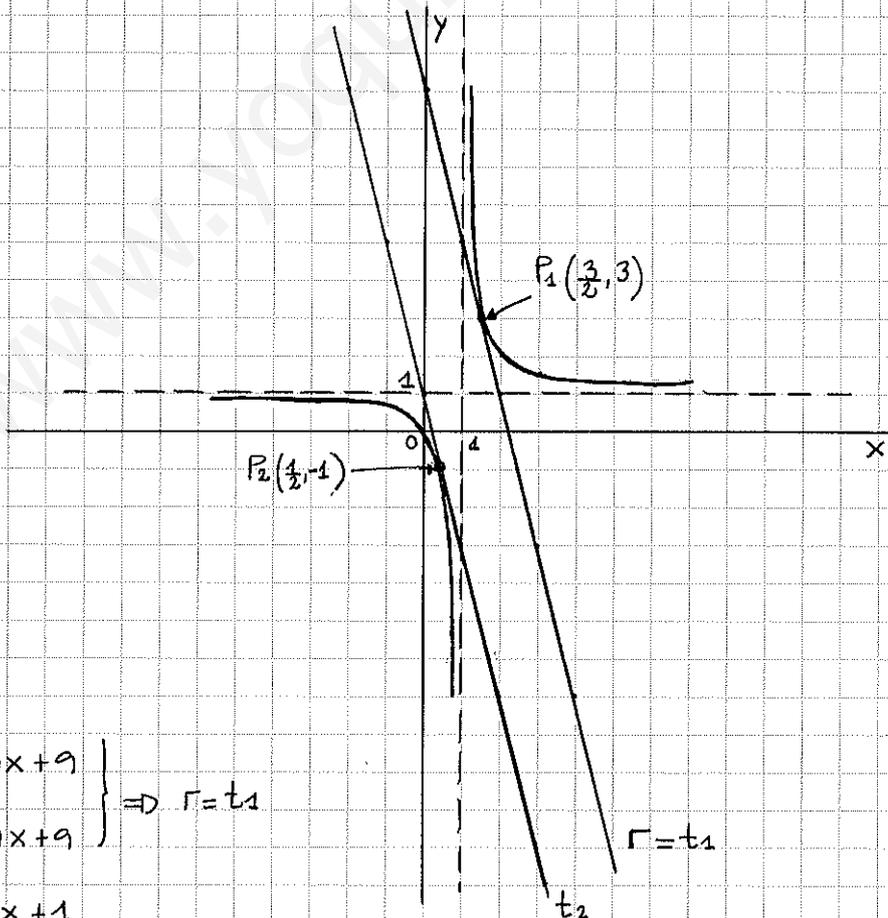
Derecha $x = 100$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Función} \rightarrow y = \frac{100}{99} = 1'01... \\ \text{Asíntota} \rightarrow y = 1 \end{array} \right. \Rightarrow f(x) \text{ está por encima de la AH}$

3) PC eje OX | $y=0$ $\frac{x}{x-1} = 0$; $x=0$ $\Rightarrow (0,0)$

PC eje OY | $x=0$ $y = \frac{0}{0-1}$; $y=0$ $\Rightarrow (0,0)$

4) Tabla valores

x	-3	-2	-1	0	0'5	1'5	2	3	4
y	0'75	2/3	0'5	0	-1	3	2	1'5	4/3



$$\left. \begin{array}{l} r: y = -4x + 9 \\ t_1: y = -4x + 9 \\ t_2: y = -4x + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow r = t_1$$

10) ¿Recta tg y recta normal a $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ en $x=2$?

¿Área del triángulo determinado por dichas rectas y el eje de abscisas?

RECTA TANGENTE

* Pto $P(2, f(2))$; $P(2, 3)$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f(2) = \frac{3}{1} ; f(2) = 3$$

* Pendiente? Sabemos que $f'(a) =$ pendiente de la recta tg a $f(x)$ en $x=a$.

En nuestro caso,

$$m_t = f'(2)$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_t = f'(2) = \frac{-2}{(2-1)^2} = \frac{-2}{1} = -2 \Rightarrow m_t = -2$$

* Por tanto,

$$\left. \begin{array}{l} P(2, 3) \\ m_t = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow t: y = 3 - 2(x-2) \Rightarrow t: y = 3 - 2x + 4 \Rightarrow t: y = -2x + 7$$

RECTA NORMAL

La recta normal a $f(x)$ en $x=a$ es la recta perpendicular a la tg a $f(x)$ en $x=a$

* Pto? $P(2, 3)$

* Pendiente?

$$m_t = -2$$

Si dos rectas son $\perp \Rightarrow$ el producto de sus pendientes es $-1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m_t \cdot m_n = -1$$

$$\Rightarrow -2 \cdot m_n = -1 \Rightarrow m_n = \frac{1}{2}$$

* Por tanto,

$$\left. \begin{array}{l} P(2, 3) \\ m_n = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow n: y = 3 + \frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow n: y = 3 + \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow n: y = \frac{1}{2}x + 2$$

GRÁFICA

$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ (Hipérbola)

1) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

2) AVI

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{cases} \Rightarrow x=1 \text{ es AV}$$

AHI

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-\infty}{-\infty} \text{ (I)} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (II)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y=1 \text{ es AH}$$

Posición

Izquierda

$x = -100$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Función } y = \frac{-99}{-101} = 0.98... \\ \text{Asintota } y = 1 \end{array} \right. \Rightarrow f(x) \text{ está por debajo de la AH}$

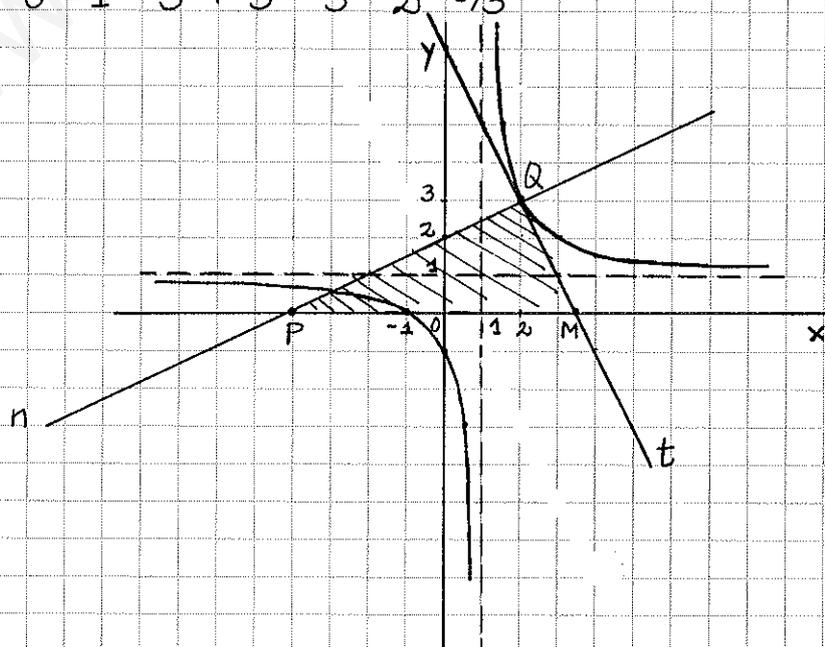
Derecha

$x = 100$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Función } y = \frac{101}{99} = 1.02... \\ \text{Asintota } y = 1 \end{array} \right. \Rightarrow f(x) \text{ está por encima de la AH}$

3) PC ee OX | $(y=0)$ $\frac{x+1}{x-1} = 0$; $x+1=0$; $(x=-1) \Rightarrow \boxed{(-1, 0)}$

PC ee OY | $(x=0)$ $y = \frac{0+1}{0-1}$; $(y=-1) \Rightarrow \boxed{(0, -1)}$

4)	x	-3	-2	-1	0	0.5	1.5	2	3	4
	y	0.5	4/3	0	-1	-3	5	3	2	5/3



Área del triángulo determinado por t , n y el eje OX

$$\text{Área triángulo} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} =$$

$$\left. \begin{array}{l} n: y = \frac{1}{2}x + 2 \\ \text{Eje } OX: y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}x + 2 = 0; x + 4 = 0; x = -4 \quad \boxed{P(-4, 0)} \text{ pto de corte de } n \text{ y el eje } OX$$

$$\left. \begin{array}{l} t: y = -2x + 7 \\ \text{Eje } OX: y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 7 = 0; 2x = 7; x = \frac{7}{2} \quad \boxed{M\left(\frac{7}{2}, 0\right)} \text{ pto de corte de } t \text{ y el eje } OX$$

$$\boxed{\text{Base} = \text{distancia } (P, M) = 7.5 \text{ unidades}}$$

$$\left. \begin{array}{l} t: y = -2x + 7 \\ n: y = \frac{1}{2}x + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 7 = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow -4x + 14 = x + 4 \Rightarrow -5x = -10 \Rightarrow x = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 2 + 2 \Rightarrow y = 3$$

$$\boxed{Q(2, 3)} \text{ pto de intersección de } t \text{ y } n$$

$$\boxed{\text{Altura} = \text{distancia } (Q, \text{Eje } OX) = 3}$$

Por tanto,

$$\text{Área} = \frac{7.5 \cdot 3}{2} = 11.25 \text{ u}^2$$

11) ¿Rectas tangente y normal a $f(x) = \ln(2-x)$ en $y=0$?

RECTA TANGENTE

* Pto?

$$\left. \begin{array}{l} y=0 \\ f(x) = \ln(2-x) \end{array} \right\} \Rightarrow \ln(2-x) = 0 \Rightarrow 2-x = 1 ; x=1 \quad \boxed{P(1,0)}$$

* Pendiente? $f'(a) =$ pendiente de la recta tg a $f(x)$ en $x=a$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \ln(2-x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2-x} \cdot (-1) \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{2-x} \\ m_t = f'(1) \end{array} \right\} \Rightarrow m_t = f'(1) = \frac{-1}{2-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m_t = -1}$$

* Por tanto,

$$\left. \begin{array}{l} P(1,0) \\ m_t = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow t: y = 0 - 1(x-1) \Rightarrow \boxed{t: y = -x + 1}$$

RECTA NORMAL

La normal a $f(x)$ en $x=a$ es la recta \perp a la tg a $f(x)$ en $x=a$

* Pto? $\boxed{P(1,0)}$

* $m_t = -1$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si dos rectas son } \perp \Rightarrow \text{el producto de sus pendientes es } -1 \Rightarrow m_t \cdot m_n = -1 \\ \Rightarrow -1 \cdot m_n = -1 \Rightarrow \boxed{m_n = 1} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

* Por tanto,

$$\left. \begin{array}{l} P(1,0) \\ m_n = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow n: y = 0 + 1(x-1) \Rightarrow \boxed{n: y = x - 1}$$

12

¿Ptos de la curva $y=3x^3-2x^2+x$ en los que la tg es ll a $r: 2x-3y+5=0$?

$$\left. \begin{array}{l} * r: 2x-3y+5=0 \Rightarrow r: 3y=2x+5 \Rightarrow r: y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3} \Rightarrow m_r=\frac{2}{3} \\ t \parallel r \Rightarrow m_t = m_r \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{m_t = \frac{2}{3}}$$

$$\left. \begin{array}{l} * m_t = \frac{2}{3} \\ m_t = f'(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} \Rightarrow 9x^2 - 4x + 1 = \frac{2}{3} \Rightarrow 27x^2 - 12x + 3 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27x^2 - 12x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{54} = \frac{12 \pm 6}{54} \begin{array}{l} \nearrow x = \frac{18}{54}; \quad \boxed{x = \frac{1}{3}} \\ \searrow x = \frac{6}{54}; \quad \boxed{x = \frac{1}{9}} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} P_1\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right) \\ f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{P_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\right)}$$

$$\left. \begin{array}{l} P_2\left(\frac{1}{9}, f\left(\frac{1}{9}\right)\right) \\ f\left(\frac{1}{9}\right) = 3\left(\frac{1}{9}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{1}{9} = \frac{22}{243} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{P_2\left(\frac{1}{9}, \frac{22}{243}\right)}$$

P.TDS DE $f(x)$ EN LOS QUE
LA RECTA TG ES PARALELA
A $r: 2x-3y+5=0$

$$\left. \begin{array}{l} * P_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\right) \\ m_t = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow t_1: y = \frac{2}{9} + \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow t_1: y = \cancel{\frac{2}{9}} + \frac{2}{3}x - \cancel{\frac{2}{9}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1: y = \frac{2}{3}x \Rightarrow t_1: 3y = 2x \Rightarrow \boxed{t_1: 2x - 3y = 0}$$

$$\left. \begin{array}{l} * P_2\left(\frac{1}{9}, \frac{22}{243}\right) \\ m_t = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow t_2: y = \frac{22}{243} + \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{9}\right) \Rightarrow t_2: y = \frac{22}{243} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_2: y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{243} \Rightarrow t_2: 243y = 162x + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t_2: 162x - 243y + 4 = 0}$$

13 ¿Recta tg a $f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 10$ en su pto de inflexión?

1°) Punto de inflexión de $f(x) =$ Pto de tangencia

$$* f'(x) = 12x^2 - 4x$$

$$* f''(x) = 24x - 4$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 24x - 4 = 0; 24x = 4; x = \frac{4}{24}; x = \frac{1}{6}$$

$$* f'''(x) = 24$$

$$f'''(\frac{1}{6}) = 24 \neq 0 \Rightarrow P(\frac{1}{6}, f(\frac{1}{6})) \text{ pto inflexión} \Rightarrow P(\frac{1}{6}, \frac{-271}{20}) \text{ pto inflexión}$$

$$f(\frac{1}{6}) = 4(\frac{1}{6})^3 - 2(\frac{1}{6})^2 - 10 = \frac{-271}{20}$$

2°) Pendiente?

$$\left. \begin{array}{l} m_t = f'(\frac{1}{6}) \\ f'(x) = 12x^2 - 4x \end{array} \right\} \Rightarrow m_t = 12 \cdot (\frac{1}{6})^2 - 4 \cdot (\frac{1}{6}) \Rightarrow m_t = -\frac{1}{3}$$

3°) Por tanto la recta tg pedida es:

$$\left. \begin{array}{l} P(\frac{1}{6}, \frac{-271}{20}) \\ m_t = -\frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow t: y = \frac{-271}{20} - \frac{1}{3}(x - \frac{1}{6}) \Rightarrow t: y = \frac{-271}{20} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{18} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t: y = -\frac{1}{3}x - \frac{2429}{180}$$

14 ¿Ptos de la gráfica de $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 2$ en las que la tg es paralela a la recta secante a $f(x)$ en $x=0$ y $x=1$?

1°) Pendiente de $S =$ secante a $f(x)$ en $x=0$ y $x=1$

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow P(0, f(0)) = P(0, -2) \\ x=1 \Rightarrow Q(1, f(1)) = Q(1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - (-2)}{1 - 0}; m_s = 4$$

$$t \text{ es paralela a } S \Rightarrow m_t = m_s \Rightarrow m_t = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} 2^\circ) m_t = 4 \\ m_t = f'(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) = 4 \Rightarrow 6x^2 + 2x + 1 = 4 \Rightarrow 6x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+72}}{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 19}}{12} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{19}}{12}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{19}}{6}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{19}}{6}$$

$$P_1 \left(\frac{-1 + \sqrt{19}}{6}, f\left(\frac{-1 + \sqrt{19}}{6}\right) \right)$$

$$P_2 \left(\frac{-1 - \sqrt{19}}{6}, f\left(\frac{-1 - \sqrt{19}}{6}\right) \right)$$

Ptos de la gráfica de $f(x)$

en los que la t_g es \perp a la secante
a la curva en $x=0$ y $x=1$

15 ¿Pto de $f(x) = \sin x^2$ en que la recta t_g tiene pendiente $-2\sqrt{\pi}$ y su ecuación?

$$\left. \begin{array}{l} * m_t = -2\sqrt{\pi} \\ m_t = f'(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) = -2\sqrt{\pi} \Rightarrow 2x \cdot \cos x^2 = -2\sqrt{\pi} \Rightarrow$$

$$f'(x) = 2x \cdot \cos x^2$$

$$\Rightarrow x \cdot \cos x^2 = -\sqrt{\pi} \Rightarrow x = \sqrt{\pi}$$

$$P(\sqrt{\pi}, f(\sqrt{\pi})) \Rightarrow P(\sqrt{\pi}, 0)$$

$f(\sqrt{\pi}) = \sin \pi = 0$

Pto de $f(x)$ en que la t_g tiene
pendiente $-2\sqrt{\pi}$

$$* m_t = -2\sqrt{\pi}$$

* Por tanto, la recta t_g es:

$$\left. \begin{array}{l} P(\sqrt{\pi}, 0) \\ m_t = -2\sqrt{\pi} \end{array} \right\} \Rightarrow t: y = 0 - 2\sqrt{\pi}(x - \sqrt{\pi}) \Rightarrow t: y = -2\sqrt{\pi}x + 2\pi$$

16 ¿Ptos de $f(x) = 3x^2 - 5x + 12$ en los que la t_g a $f(x)$ pasa por $(0,0)$?
¿Ecuación de dichas t_g ?

1.º Recta t_g a $f(x)$ en $x=a$

$$* P(a, f(a)) \Rightarrow P(a, 3a^2 - 5a + 12)$$

$$* m_t = f'(a)$$

$$f'(x) = 6x - 5$$

$$\Rightarrow m_t = 6a - 5$$

$$\Rightarrow t_a: y = 3a^2 - 5a + 12 + (6a - 5) \cdot (x - a)$$

Ecuación de la recta t_g a $f(x)$ en $x=a$

$$2.º (0,0) \in t_a \Rightarrow 0 = 3a^2 - 5a + 12 + (6a - 5) \cdot (0 - a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = 3a^2 - 5a + 12 + (6a - 5) \cdot (-a) \Rightarrow 0 = 3a^2 - 5a + 12 - 6a^2 + 5a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3a^2 + 12 = 0 \Rightarrow -3a^2 = -12 \Rightarrow a^2 = 4 \quad \begin{cases} a=2 \\ a=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} * a=2 \Rightarrow P(2, f(2)) ; \boxed{P_1(2, 14)} \\ * a=-2 \Rightarrow P(-2, f(-2)) ; \boxed{P_2(-2, 34)} \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} * a=2 \\ * a=-2 \end{cases}} \right\} \begin{array}{l} \text{Ptos de } f(x) \text{ en los que la recta} \\ \text{tg pasa por } (0,0) \end{array}$$

Ahora hallamos la ecuación de la recta tg a $f(x)$ en los ptos hallados:

$$\begin{cases} * P_1(2, 14) \\ * m_t = f'(2) \\ f'(x) = 6x - 5 \end{cases} \Rightarrow m_t = 7 \left. \vphantom{\begin{cases} * P_1(2, 14) \\ * m_t = f'(2) \\ f'(x) = 6x - 5 \end{cases}} \right\} \Rightarrow t_1: y = 14 + 7(x - 2) \Rightarrow t_1: y = 7x$$

$$\begin{cases} * P_2(-2, 34) \\ * m_t = f'(-2) \\ f'(x) = 6x - 5 \end{cases} \Rightarrow m_t = -17 \left. \vphantom{\begin{cases} * P_2(-2, 34) \\ * m_t = f'(-2) \\ f'(x) = 6x - 5 \end{cases}} \right\} \Rightarrow t_2: y = 34 - 17(x + 2) \Rightarrow t_2: y = -17x$$

17 ¿Ptos de $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4x - 4$ en los que la tg pasa por $P(0, -8)$?

¿Ecuaciones de dichas tg?

1º Recta tg a $f(x)$ en $x=a$

$$\begin{cases} * P(a, f(a)) \Rightarrow \boxed{P(a, \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4)} \\ * m_t = f'(a) \\ f'(x) = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases} \Rightarrow m_t = \frac{1}{2}a + 4 \left. \vphantom{\begin{cases} * P(a, f(a)) \\ * m_t = f'(a) \\ f'(x) = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}} \right\} \Rightarrow t_a: y = \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4 + \left(\frac{1}{2}a + 4\right)(x - a)$$

↑
Recta tg a $f(x)$ en $x=a$

$$2^\circ) P(0, -8) \in t_a \Rightarrow -8 = \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4 + \left(\frac{1}{2}a + 4\right)(0 - a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8 = \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4 - \frac{1}{2}a^2 - 4a \Rightarrow -32 = a^2 + 16a - 16 - 2a^2 - 16a$$

$$\Rightarrow -a^2 = -16 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \quad \text{ó} \quad a = -4$$

$$\begin{cases} * a=4 \Rightarrow P(4, f(4)) \Rightarrow \boxed{P(4, 16)} \\ * a=-4 \Rightarrow P(-4, f(-4)) \Rightarrow \boxed{P(-4, -16)} \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} * a=4 \\ * a=-4 \end{cases}} \right\} \begin{array}{l} \text{Ptos de } f(x) \text{ en los que la tg} \\ \text{pasa por } P(0, -8) \end{array}$$

Ahora hallamos la ecuación de la recta t_g a $f(x)$ en los puntos hallados:

$$\left. \begin{array}{l} * P_1(4, 16) \\ * m_t = f'(4) \\ f'(x) = \frac{1}{2}x + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow m_t = 6 \Rightarrow t_1: y = 16 + 6(x-4) \Rightarrow t_1: y = 6x - 8$$

$$\left. \begin{array}{l} * P_2(-4, -16) \\ * m_t = f'(-4) \\ f'(x) = \frac{1}{2}x + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow m_t = 2 \Rightarrow t_2: y = -16 + 2(x+4) \Rightarrow t_2: y = 2x - 8$$

18 $f(x) = x^2 - 3x + 4$

a) Recta t_g a $f(x)$ en $x=a$

$$\left. \begin{array}{l} * P(a, f(a)) \Rightarrow P(a, a^2 - 3a + 4) \\ * m_t = f'(a) \\ f'(x) = 2x - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow m_t = f'(a) = 2a - 3 \Rightarrow t_a: y = a^2 - 3a + 4 + (2a - 3) \cdot (x - a)$$

RECTA TG A $f(x)$ EN $x=a$

b) t_a pasa por $(0,0) \Rightarrow 0 = a^2 - 3a + 4 + (2a - 3) \cdot (0 - a) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = a^2 - 3a + 4 - 2a^2 + 3a \Rightarrow -a^2 + 4 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} * a = 2 \Rightarrow P(2, f(2)) \Rightarrow P_1(2, 2) \\ * a = -2 \Rightarrow P(-2, f(-2)) \Rightarrow P_2(-2, 14) \end{array} \right\} \text{ Ptos en los que la } t_g \text{ a } f(x) \text{ pasa por } (0,0)$$

$$\left. \begin{array}{l} * P_1(2, 2) \\ * m_t = f'(2) \\ f'(x) = 2x - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow m_t = 1 \Rightarrow t_1: y = 2 + 1(x-2) \Rightarrow t_1: y = x$$

$$\left. \begin{array}{l} * P_2(-2, 14) \\ * m_t = f'(-2) \\ f'(x) = 2x - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow m_t = -7 \Rightarrow t_2: y = 14 - 7(x+2) \Rightarrow t_2: y = -7x$$