Ejercicio 1 *Demostrar las reglas de derivación de las funciones* $\operatorname{sen} x$ *y* $\ln x$*.*

Solución:

Sea la función $y = \operatorname{sen} x$:

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot 1 - \cos x \cdot h - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h \cos x}{h} \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

En el cálculo de este límite hemos aplicado que cuando h tiende a cero, $\cos h$ tiende a uno y $\operatorname{sen} h$ es equivalente a h.

Sea ahora $y = \ln x$:

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ \ln \frac{x+h}{x} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ \frac{h}{x} \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Aquí hemos aplicado la equivalencia

$$\ln \left(1 + \frac{h}{x}\right) \sim \frac{h}{x}$$

cuando h tiende a cero.

Ejercicio 2 *Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva* $y = \dfrac{2x}{x-1}$ *que son paralelas a* $2x + y - 1 = 0$.

Solución:

La pendiente de la recta tangente es -2. Vamos a calcular el punto de tangencia. Derivamos e igualamos la derivada a -2:

$$y' = \frac{2\,(x-1) - 1 \cdot 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} = -2$$

Resolvemos la ecuación:

$$-2 = -2\,(x-1)^2 \quad \Longrightarrow \quad (x-1)^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x - 1 = \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{array} \right.$$

Calculamos las ordenadas de estos puntos y resulta:

$$x_1 = 2 \quad \Longrightarrow \quad y_1 = 4$$
$$x_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_2 = 0$$

Las tangentes son entonces:

$$y - 4 = -2\,(x-2); \qquad y - 0 = -2\,(x-0)$$

Ejercicio 3 *Calcular a partir de la definición la derivada de la función* $y = \frac{1}{x}$. *Calcula la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto de abscisa 1.*

Solución:

Sea $y = \dfrac{1}{x}$:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \frac{-1}{x^2}$$

En el punto de abscisa $x_0 = 1$ la ordenada vale:

$$y_0 = \frac{1}{1} = 1$$

y la pendiente

$$m = \frac{-1}{1^2} = -1$$

de modo que la recta tangente es:

$$y - 1 = -1\,(x-1)$$

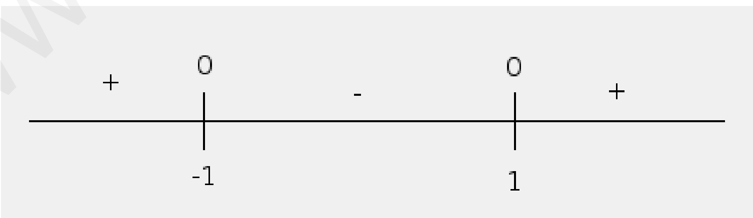
Ejercicio 4 *En la función* $y = x^3 - 3x + 2$, *estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de tangente horizontal. A partir del dicho estudio decidir si se trata de máximos o mínimos y representar gráficamente la curva.*

Solución:

Calculamos la derivada y estudiamos su signo:

$$y' = 3x^2 - 3$$

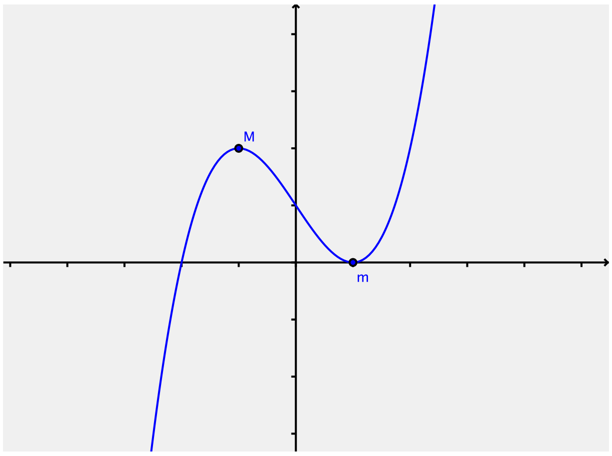
Los ceros de la derivada son -1 y 1. El esquema de signos es:



De forma que:

$x \in (-\infty, -1)$	$y' > 0$	función creciente
$x = -1$	$y' = 0$	máximo en $m(-1, 4)$
$x \in (-1,)$	$y' < 0$	función decreciente
$x = 1$	$y' = 0$	mínimo en $M(1, 0)$
$x \in (1, \infty)$	$y' > 0$	función creciente

De acuerdo con estos datos la representación gráfica es:



Ejercicio 5 *Derivar las siguientes funciones:*

$$y = e^{3x}\cos x; \qquad y = \frac{x^2}{\ln x}; \qquad y = \operatorname{artg}\frac{1}{x}$$

Solución:

$$\begin{aligned} y = e^{3x}\cos x &\implies y' = e^{3x}\cdot 3\cdot\cos x + e^{3x}\left(-\operatorname{sen} x\right) \\ y = \frac{x^2}{\ln x} &\implies y' = \frac{2x\ln x - \frac{1}{x}x^2}{(\ln x)^2} \\ y = \operatorname{artg}\frac{1}{x} &\implies y' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,\frac{-1}{x^2} \end{aligned}$$

Ejercicio 6 *A partir del estudio de las asíntotas y el crecimiento y decrecimiento representa gráficamente la curva:*

$$y = \frac{1+x^2}{4-x^2}$$

Solución:

Las asíntotas verticales son $x = -2$ y $x = 2$. Además hay una asíntota horizontal $y = -1$ puesto que:

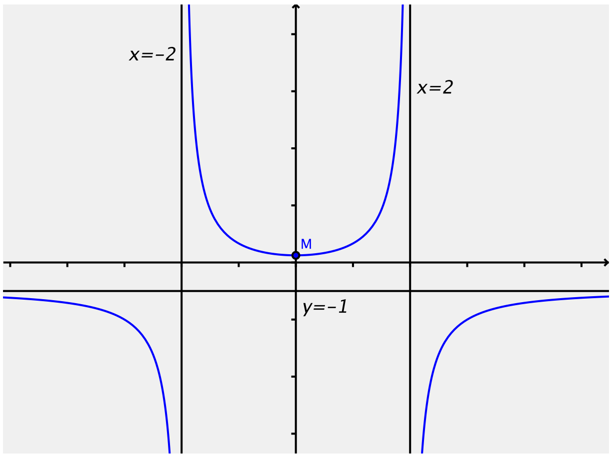
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{4-x^2} = -1$$

Derivamos la función

$$y' = \frac{2x\,(4-x^2) - (-2x)\,(1+x^2)}{(4-x^2)^2} = \frac{10x}{(4-x^2)^2}$$

La derivada se anula en $x = 0$, es menor que cero (y por consiguiente la función decreciente) para $x < 0$ y mayor que cero (y función creciente) para $x > 0$. E el punto $M(0, \frac{1}{4}$ hay un mínimo.

Con todos estos datos podemos dibujar la siguiente gráfica:



Ejercicio 7 *Se considera la función* $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$, *calcular:*

1. *Dominio de definición de la función e intersecciones con los ejes*
2. *Puntos de tangente horizontal*
3. *Calcular las asíntotas oblicuas en* $+\infty$ *y* $-\infty$ *y comprobar que son diferentes.*
4. *Representar gráficamente la función.*

Solución:

El dominio de definición de la función es:

$$D = \left\{x \in R | x^2 - 4x + 3 >= 0\right\} = \infty, 1) \cup (3, \infty)$$

Para calcular los puntos de tangente horizontal igualamos la derivada a cero:

$$y' = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 3}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$

El punto de tengente horizontal estaría entonces en $x = 2$. Pero como este punto no pertenece al dominio de la función concluimos que no hay puntos de tangente horizontal. Por otra parte, como el denominador es siempre positivo, la derivada tiene el signo del numerador y será negativa (función decreciente) para $x < 1$ y positiva (función creciente) para $x > 3$.

Calculemos ahora las asíntotas. En $+\infty$ no presenta ninguna dificultad:

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-4x+3}-x\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2-4x+3}-x)\,(\sqrt{x^2-4x+3}+x)}{\sqrt{x^2-4x+3}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+3-x^2}{\sqrt{x^2-4x+3}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x+3}{\sqrt{x^2}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x}{2x} \\
&= -2
\end{aligned}$$

De modo que la asíntota oblicua en $+\infty$ es $y = x - 2$.

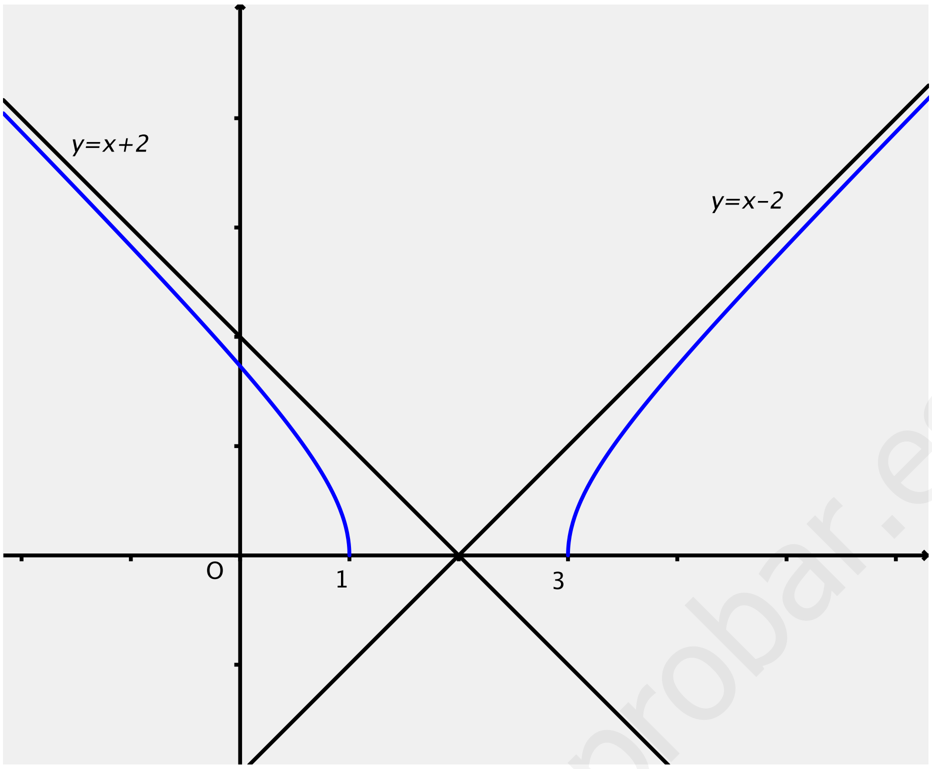
Calculemos ahora la asíntota en $-\infty$. Ahora hay que tener en cuenta que, puesto que la función es la raíz positiva del polinomio, en$-\infty$ la raíz $\sqrt{x^2-4x+3}$ es equivalente a $\sqrt{x^2}$ que es igual a $-x$ puesto que la raíz es positiva y x es negativo. Así pues:

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x} \\
&= -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-4x+3}+x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2-4x+3}+x)\,(\sqrt{x^2-4x+3}-x)}{\sqrt{x^2-4x+3}-x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+3-x^2}{\sqrt{x^2-4x+3}-x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x+3}{\sqrt{x^2}-x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x}{-x-x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x}{-2x} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Por consiguiente la asíntota oblicua en $-\infty$ es $y = -x + 2$

Teniendo todo esto en cuenta la representación gráfica es la siguiente:



y=x+2
y=x-2
O
1
3