Binomio de Newton

El **binomio de Newton** es una fórmula que se utiliza para hacer el desarrollo de la potencia de un binomio elevado a una potencia cualquiera de exponente natural. Es decir, se trata de una fórmula para desarrollar la expresión:

$$(a+b)^n\,,\ n \in \mathbb{N}$$

Es conveniente hacer observar aquí que a y b pueden ser números, letras o expresiones algebraicas cualesquiera. Así, también podremos desarrollar, por ejemplo, expresiones como: $(3x+5)^n$,$(4xz+6y)^n$, $(6a-4b)^n$, etcétera.

Veamos el desarrollo de algunas potencias de $a+b$:

- $(a+b)^0 = 1$
- $(a+b)^1 = a+b$
- *Cuadrado de una suma*: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$
- *Cubo de una suma*: $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- Utilizando el ejemplo anterior, si $a = 2x$ y $b = 3$: $(2x+3)^4 = (2x)^4 + 4(2x)^3 3 + 6(2x)^2 3^2 + 4(2x)3^3 + 3^4 =$ $= 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$

Observa que los coeficientes de cada polinomio resultante siguen la siguiente secuencia:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Observa además que las potencias del primer sumando del binomio, a, comienzan por n y en cada sumando van disminuyendo de uno en uno hasta llegar a 0. Por el contrario, las potencias del segundo sumando del binomio, b, empiezan en 0 y van aumentando de uno en uno hasta llegar a n.

La estructura en triángulo anterior recibe el nombre de **Triángulo de Pascal** o **Triángulo de Tartaglia**. Observa que el vértice superior es un 1 y que la segunda fila son siempre dos "unos". A partir de la tercera fila, el método de construcción es el siguiente:

- **Primer número**: 1.
- **Números siguientes**: la suma de los dos que se encuentran inmediatamente por encima.

- **Último número**: 1.

Observa también, además de que cada fila empiece y termine por 1, que los números que aparecen forman una fila simétrica, o sea, el primero es igual al último, el segundo igual al penúltimo, el tercero igual al antepenúltimo, etc.

De esta forma sería fácil hallar $(a+b)^5$:

- La fila siguiente del triángulo sería: 1 5 10 10 5 1
- Los coeficientes, según lo comentado anteriormente seguirían la siguiente secuencia:

  $$a^5b^0 \qquad a^4b^1 \qquad a^3b^2 \qquad a^2b^3 \qquad a^1b^4 \qquad a^0b^5,$$

  o sea:

  $$a^5 \qquad a^4b \qquad a^3b^2 \qquad a^2b^3 \qquad ab^4 \qquad b^5$$

Por tanto:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

La construcción del triángulo anterior no es así por capricho, o por casualidad. Sino que es consecuencia de la definición de **número combinatorio**.
Para definir un número combinatorio es preciso saber con anterioridad lo que es el **factorial de un número**, $n!$, que se define de la siguiente forma:

$$0! = 1, \quad \text{que se lee “cero factorial”.}$$

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1, \quad \text{que se lee “n factorial”.}$$

Por ejemplo:

- $1! = 1$
- $3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$
- $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$
- $6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$
- $12! = 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 479001600$. Este último factorial se ha realizado con la calculadora (¡busca la tecla que hace esta operación!).

Un **número combinatorio** es un número natural de la forma $\binom{n}{m}$, donde $n \geqslant m$ y se lee “n sobre m”.
Para obtenerlo se aplica la siguiente fórmula:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Veamos algunos ejemplos:

- $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!(0-0)!} = \frac{1}{1\cdot 1} = 1$, $\binom{1}{0} = \frac{1!}{0!(1-0)!} = \frac{1}{1\cdot 1} = 1$, $\binom{1}{1} = \frac{1!}{1!(1-1)!} = \frac{1}{1\cdot 1} = 1$
- $\binom{2}{0} = \frac{2!}{0!(2-0)!} = \frac{2}{1\cdot 2} = 1$, $\binom{2}{1} = \frac{2!}{1!(2-1)!} = \frac{2}{1\cdot 1} = 2$, $\binom{2}{2} = \frac{2!}{2!(2-2)!} = \frac{2}{2\cdot 1} = 1$
- $\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{6}{1\cdot 2} = 3$, $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2\cdot 1} = 3$
- $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{24}{2\cdot 2} = 6$, $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{6\cdot 2} = 10$, $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{40320}{120\cdot 6} = 56$

Hay una combinación de teclas para calcular cualquier número combinatorio con la calculadora. Por ejemplo, para hallar $\binom{7}{4}$ con la calculadora, se pulsará la tecla 7, después la tecla SHIFT, a continuación la tecla 2 (que tiene encima la expresión $n\mathrm{C}r$), luego la tecla 4 y finalmente la tecla =.

Teniendo en cuenta la definición de número combinatorio y, si con los ejemplos anteriores has entendido cómo se utiliza la fórmula, será fácil comprender que el Triángulo de Pascal o Triángulo de Tartaglia es, de hecho, el siguiente:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

El hecho de que las dos primeras filas sean siempre “unos”, así como la razón por la que el primer y el último número de las demás son también “unos”, se debe a las dos siguientes propiedades:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!\cdot n!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!\cdot 1} = \frac{n!}{n!} = 1$$

Además, que los números que aparecen en una misma fila formen una fila simétrica, o sea, el primero igual al último, el segundo igual al penúltimo, el tercero igual al antepenúltimo, etc; es debido a la siguiente propiedad:

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

La demostración es sencilla:

$$\binom{n}{n-m} = \frac{n!}{(n-m)![n-(n-m)]!} = \frac{n!}{(n-m)!(n-n+m)!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}$$

Veamos unos ejemplos (puedes comprobarlos utilizando la definición de número combinatorio):

$$\binom{5}{2} = 10 = \binom{5}{3}, \quad \binom{6}{2} = 15 = \binom{6}{4}, \quad \binom{8}{3} = 56 = \binom{8}{5}$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior es fácil generalizar el desarrollo de la potencia de un binomio a un exponente natural cualquiera, conocida como fórmula de Newton:

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n}$$

Esta fórmula tiene $n+1$ términos y, en cada uno de ellos, las potencias de a y b suman n:

- Primer término o término que ocupar el lugar 1: $\binom{n}{0}a^n$
- Segundo término o término que ocupa el lugar 2: $\binom{n}{1}a^{n-1}b^2$
- Tercer término o término que ocupar el lugar 3: $\binom{n}{2}a^{n-2}b^2$
- ....
- $(n-1)$-ésimo término o término que ocupa el lugar $n-1$: $\binom{n}{n-2}a^2b^{n-2}$
- n-ésimo término o término que ocupa el lugar n: $\binom{n}{n-1}ab^{n-1}$
- $(n+1)$-ésimo término o término que ocupa el lugar $n+1$: $\binom{n}{n}b^n$

Observa que el número de abajo del número combinatorio de cada término (o el número al que está elevado b), es una unidad inferior a la posición que ocupa ese término. Dicho de otra manera, si en el desarrollo del binomio $(a+b)^{23}$, quisiéramos saber exactamente el término que ocupa el lugar 17, desarrollaríamos la expresión $\binom{23}{16}a^7b^{16}$

Generalizando esta idea podemos obtener el término que ocupa el lugar k del desarrollo de $(a+b)^n$, T_k, mediante la fórmula:

$$\boxed{T_k = \binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^{k-1}}$$

Ejercicios resueltos

1. Desarrollar $(x^2+2x)^4$:
   Tomemos como modelo el desarrollo de $(a+b)^4$, y sustituyamos a por x^2 y b por $2x$:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$(x^2+2x)^4 = (x^2)^4 + 4(x^2)^3 2x + 6(x^2)^2(2x)^2 + 4x^2(2x)^3 + (2x)^4 = x^8+8x^7+24x^6+32x^5+16x^4$$

2. ¿Cuál es el desarrollo de $(a-b)^5$?
   Basta observar que $a-b$ puede escribirse de la forma $a+(-b)$; por lo tanto,

$$(a-b)^5 = (a+(-b))^5 = a^5 + 5a^4(-b) + 10a^3(-b)^2 + 10a^2(-b)^3 + 5a(-b)^4 + (-b)^5 =$$

$$= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

   Todos los términos en los que el exponente de $-b$ es impar son negativos, y son positivos los términos en los que dicho exponente es par.

3. Del desarrollo de $(x^2-3x)^6$ sólo nos interesa el término quinto. ¿Cuál es?

$$T_5 = \binom{6}{4}(x^2)^{6-4}(-3x)^4 = 15x^4 \cdot 81x^4 = 1215x^8$$

4. Escribe el término de grado 8 en el desarrollo de $\left(3x^2+\frac{1}{x}\right)^7$.
   Supongamos que el término buscado es T_k, es decir, que ocupa el lugar k:

$$T_k = \binom{7}{k-1}(3x^2)^{7-(k-1)}\left(\frac{1}{x}\right)^{k-1} = \binom{7}{k-1}(3x^2)^{8-k}\frac{1}{x^{k-1}} = \frac{\binom{7}{k-1}3^{8-k}x^{2(8-k)}}{x^{k-1}}$$

   El grado del término es el exponente definitivo de x, que sería la diferencia entre los dos exponentes $2(8-k)$ y $k-1$, puesto que para dividir dos potencias de x basta restar los exponentes del numerador y del denominador. Por consiguiente:

$$2(8-k)-(k-1) = 8 \rightarrow 16-2k-k+1 = 8 \rightarrow -3k = -9 \Rightarrow k = 3$$

   Es decir, el término de grado 8 es el *tercero*:

$$T_3 = \binom{7}{2}(3x^2)^5\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 5103x^8$$

Ejercicios propuestos

1. Desarrolla las potencias siguientes:

$$(x+y)^7, \quad (x-y)^7, \quad (3x+2)^4, \quad (3x-2)^4, \quad \left(2x^3+5x\right)^3, \quad \left(2x^3-5x\right)^3,$$
$$(x+2)^7, \quad \left(x^2+3\right)^6, \quad \left(2x^3+5\right)^5, \quad \left(2x^4+5x\right)^5, \quad \left(2x^2+3y\right)^5,$$
$$(x-3)^5, \quad (2x-4)^6, \quad \left(x^2-3x\right)^4, \quad (3x-2y)^5$$

2. Desarrollar:

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^6, \quad \left(2+\sqrt{3}\right)^5, \quad \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^5, \quad \left(\sqrt{5}-2\right)^4, \quad \left(2\sqrt{3}-1\right)^3, \quad \left(3\sqrt{2}-2\right)^5,$$
$$\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^4, \quad \left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^5, \quad \left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^5, \quad \left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)^6, \quad \left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)^5,$$
$$\left(3\sqrt{x}-2x\right)^5, \quad \left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5, \quad \left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)^4, \quad \left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4, \quad \left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5,$$
$$\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)^6, \quad \left(3-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4, \quad \left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5, \quad \left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4$$

3. Desarrollar:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^5, \quad \left(x-\frac{2}{x}\right)^4, \quad \left(2x+\frac{y}{3}\right)^4, \quad \left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6, \quad \left(xy-\frac{1}{xy}\right)^4,$$
$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^5, \quad \left(2x-\frac{1}{x^3}\right)^6, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-x\right)^5, \quad \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5, \quad \left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$$

4. Escribe directamente el cuarto término del desarrollo de $(x+y)^9$ y el quinto del desarrollo de $(2x-y)^8$.

5. Escribe el término sexto del desarrollo de la potencia siguiente, y averigua su grado: $\left(3x-x^3\right)^9$.

6. Escribe y simplifica el tercer término del desarrollo de $\left(x^3-\dfrac{2}{x}\right)^7$.

7. Escribe y simplifica el término central del desarrollo de $\left(\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{1}{x^3}\right)^4$.

8. ¿Cuál es el grado del término central del desarrollo de $\left(3x^2-5x^4\right)^{12}$?

9. El tercer término del desarrollo de $\left(x^2+\dfrac{3}{x}\right)^5$ coincide con el cuarto del desarrollo de $\left(x^3-\dfrac{1}{x}\right)^5$. Calcula x.

10. Averigua qué valor deber darse a x para que el tercer término del desarrollo de $\left(\dfrac{3}{x} - x\right)^5$ sea igual a 90.

11. El tercer término del desarrollo de $\left(x^2 + \dfrac{3}{x}\right)^n$ es de segundo grado. Calcula n y desarrolla la potencia del binomio.

12. El segundo término del desarrollo de $\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^n$ es de grado 11. Escribe los términos restantes.

13. Averigua si hay algún término del desarrollo de $\left(2x^2 + \dfrac{5}{x}\right)^6$ que sea de grado 3. Si lo hay, escríbelo.

14. Averigua el lugar que ocupa el término de grado 13 en el desarrollo de la potencia $\left(3x - x^2\right)^8$.

15. Escribe la fórmula de Newton, y sustituye a y b por 1. ¿Qué resultado obtienes? ¿Qué significado puedes dar a ese resultado?

16. Calcular 11^5 por medio de la fórmula de Newton y comprueba el resultado con la calculadora.

17. Teniendo en cuenta que el trinomio $a + b + c$ puede escribirse como un binomio: $(a + b) + c$, desarrolla las potencias $(a + b + c)^2$; $\left(2 + x + x^2\right)^2$; $(a + b + c)^3$

18. Averigua el lugar que ocupa el término de grado 2 en el desarrollo de $\left(3x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^7$ y escríbelo.

19. Escribe el término de grado 8 en el desarrollo de $\left(x^3 - \dfrac{2}{x^2}\right)^6$.

20. Calcular:
$\binom{6}{3}$, $\binom{6}{5}$, $\binom{6}{4}$, $\binom{7}{5}$, $\binom{8}{4}$, $\binom{18}{14}$, $\binom{100}{2}$, $\binom{25}{20}$, $\binom{15}{10}$, $\binom{9}{3}$, $\binom{12}{8}$, $\binom{10}{3}$

21. Resuelve las ecuaciones $\binom{x}{2} = 21$; $\binom{x}{2} - x = 9$; $\binom{8}{x-2} = \binom{8}{6}$.

22. Utiliza las fórmulas para justificar la igualdad siguiente: $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2} = \dfrac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 4!}$.

23. Resuelve las ecuaciones siguientes:

$$\text{a) } (x+2)^3 - (x-2)^3 = 98, \qquad \text{b) } \sqrt[3]{x} + 6 = x$$

24. Resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} (x+y)^2 - (x-y)^2 = 8 \\ (x+y)^3 = 27 \end{cases}$