



EXAMEN 3^a EVALUACIÓN
MATEMÁTICAS I

1º BACH. A+B
CURSO 2009-2010



Nombre: SOLUCIONES

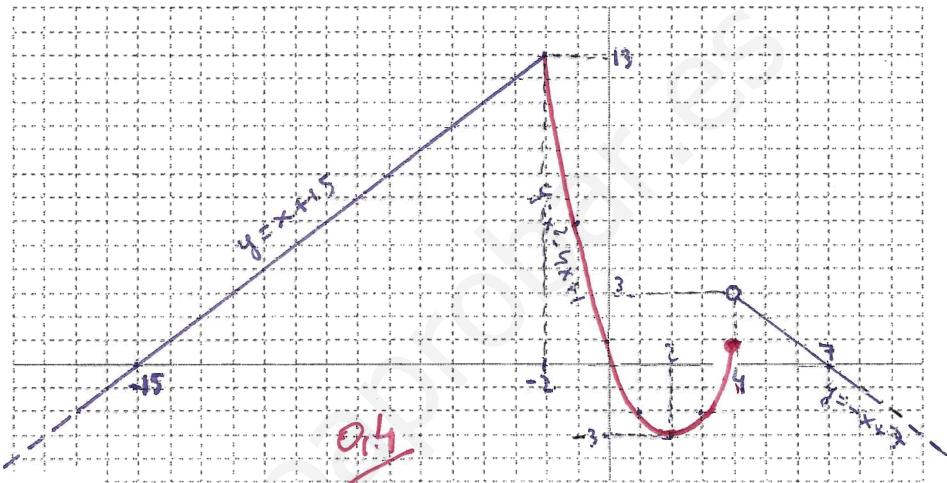
Grupo de: 18 20

1. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+15 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 4x + 1 & \text{si } -2 < x \leq 4 \\ -x+7 & \text{si } x > 4 \end{cases}$ se pide: (2 puntos)

a) Gráfica.

x	-20	...	-15	-2
$y = x+15$	-20	...	0	13

x	7	...	∞
$y = -x+7$	0	...	∞



x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x^2 - 4x + 1$	13	6	1	-2	-3	-2	1

b) Dom(f) e Im(f) $\downarrow v(2, -3)$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(f) = [-\infty, 13] \quad 0.2$$

c) Intervalos de crecimiento. Posibles M y m.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \nearrow \forall x \in (-\infty, -2) \cup (2, 4) \\ f(x) \searrow \forall x \in (-2, 2) \cup (4, \infty) \end{array} \right\} \Rightarrow M(-2, 13) \quad m(2, -3) \quad 0.4$$

2

$$d) \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 13 \quad 0.1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{D} \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \quad 0.2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

0.1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

e) Clasificar las posibles discontinuidades.

$f(x)$ presenta una discontinuidad de salto finito en $x=4$ 0.2

f) Ecuación de las posibles asíntotas.

✓ asíntotas 0.1

2

g) Hallar la antiimagen de $y=6$

análiticamente

$$y=6 \xrightarrow{1^{\text{ra}} \text{raiz}} 6=x+15; \boxed{x=-9}$$

$$\xrightarrow{2^{\text{ra}} \text{raiz}} x^2 - 4x + 1 = 6; \quad x^2 - 4x - 5 = 0 \quad \begin{matrix} 0.3 \\ |x=-1| \end{matrix}$$

$\rightarrow x=5$ desechada, debido a la gráfica

2. a) Calcular: $\log_2 \frac{\sqrt[5]{64}}{8} = \log_2 \sqrt[5]{64} - \log_2 8 = \frac{1}{5} \log_2 64 - \log_2 8 = \frac{6}{5} - 3 = \boxed{-\frac{9}{5}}$ (2 puntos)

0,25

b) Expresar $\ln \frac{e^3}{4}$ en función de $\ln 2$

$$\ln \frac{e^3}{4} = \ln e^3 - \ln 4 = 3 \ln e - \ln 2^2 = \boxed{3 - 2 \ln 2} \quad \begin{matrix} 0.25 \\ | \end{matrix}$$

2

(0,25+0,25+0,15+0,15)

c) Resolver: $11 \cdot 3^x - 9^x = 18$

$$11 \cdot 3^x - (3^2)^x = 18$$

$$11 \cdot 3^x - (3^x)^2 = 18$$

$$0 = (3^x)^2 - 11 \cdot 3^x + 18 \xrightarrow{\text{cambio de variable}} \begin{cases} 3^x = t \\ t^2 - 11t + 18 = 0 \end{cases}$$

$3^x = t$

0.25

$$t=2 \Rightarrow 3^x \Rightarrow \log 2 = x \log 3$$

$$x = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,63 \quad \begin{matrix} 0.25 \\ | \end{matrix}$$

$$t=9 \Rightarrow 3^x \Rightarrow \boxed{x=2} \quad \begin{matrix} 0.25 \\ | \end{matrix}$$

0,25

d) Resolver: $2\ln(x-3) = \ln x - \ln 4$

$$\ln(x-3)^2 = \ln \frac{x}{4} \xrightarrow[\text{inyectiva}]{\text{propiedad}} (x-3)^2 = \frac{x}{4}; x^2 - 6x + 9 = \frac{x}{4}; 4x^2 - 24x + 36 = x$$

$$4x^2 - 25x + 36 = 0; x = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{8} = \frac{25 \pm 7}{8} \Rightarrow \boxed{x = \frac{32}{8} = 4} \quad 0.25$$

0.25

$x = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$ descartado, pq. el 1º logaritmo tendría argumento negativo

0.25

[2]

3. Calcular:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x-1)} \stackrel{0.25}{=} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x + 1}{x-1} = \frac{3}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x + 1}{x-1} = \frac{3}{0^+} = \infty \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm \infty} \quad (2 \text{ puntos})$$

$$\begin{array}{r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ \times & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 & -2 & 1 \\ \times & 1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 0 \end{array}$$

[2]:

(0,75 + 0,5 + 0,75)

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1} \stackrel{-\infty/0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = \boxed{-\infty} \quad 0.5$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1}) \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 3x) - (x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 1}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 1}} \stackrel{0.25}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x}{x} - \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x^0}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \stackrel{0.25}{=} \boxed{\frac{3}{2}} \quad 0.25$$

4. Derivar y simplificar:

$$\text{a) } y = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 \rightarrow y' = \frac{-3x^2}{x^6} + \frac{-2x}{x^4} - \frac{1}{x^2} = \boxed{\frac{-3}{x^4} - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}} \quad (2 \text{ puntos})$$

0.25

0.25

b) $y = 2\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt{x+1} = 2 \cdot x^{4/3} - 3 \cdot \sqrt{x+1} \rightarrow y' = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot x^{11/3} - 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \boxed{\frac{8}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{3}{2\sqrt{x+1}}}$

0,25 0,25

c) $y = (x^2 - 3)(2x^2 - 5)^3 \xrightarrow{u \cdot v} y' = 2x \cdot (2x^2 - 5)^3 + (x^2 - 3) \cdot [(2x^2 - 5)^3]^2 =$
 $= 2x(2x^2 - 5)^3 + (x^2 - 3) \cdot 3 \cdot (2x^2 - 5)^2 \cdot 4x =$
0,25 $= (2x^2 - 5)^2 \cdot [2x \cdot (2x^2 - 5) + 12x \cdot (x^2 - 3)] = \boxed{(2x^2 - 5)^2 \cdot (16x^3 - 46x)}$

0,25

d) $y = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 2} \xrightarrow{u/v} y' = \frac{4x(x^2 + 2) - (2x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} = \boxed{\frac{10x}{(x^2 + 2)^2}}$

0,25

5. Hallar la función derivada de $f(x) = x^2 - 4$ mediante la definición, es decir, mediante un límite. (1,75 puntos)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 4 - (x^2 - 4)}{h} \stackrel{0,25}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 4 - x^2 + 4}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \stackrel{0,25}{=} \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = \boxed{2x} \end{aligned}$$

0,5 0,5 1,75

ORTOGRAFÍA, SINTAXIS, CALIGRAFÍA : 0,05
 ORDEN PLANTEAMIENTO Y LIMPIEZA : 0,10
 CORRECCIÓN LENGUAJE MATEMÁTICO: 0,10
0,25

NOTA: La ortografía y sintaxis, presentación cuidada (orden en el planteamiento, limpieza, caligrafía, etc.) y corrección en el lenguaje matemático se calificarán con un máximo de 0,25 puntos.