Problema 1 Calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(0,2)$, $B(3,1)$ y $C(2,0)$. Obtener su centro y su radio.

Solución:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

$$\left\{\begin{array}{c} 2n + p = -4 \\ 3m + n + p = -10 \\ 2m + p = -4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m = -3 \\ n = -3 \\ p = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 3x - 3y = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} m = -2a = -2 \Longrightarrow a = 3/2 \\ n = -2b = -2 \Longrightarrow b = 3/2 \\ p = 0 = a^2 + b^2 - r^2 \Longrightarrow r = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\text{Centro} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad r = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Problema 2 Sea $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ la ecuación de una elipse horizontal. Encontrar todos los datos que la definen y su ecuación general.

Solución:

$$a^2 = 64 \Longrightarrow a = 8, \quad b^2 = 16 \Longrightarrow b = 4$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow c = 4\sqrt{3} \quad e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{3}}{8}$$

Eje Mayor$= 2a = 16$
Eje Menor$= 2b = 8$
Distancia Focal$= 2c = 8\sqrt{3}$
Excentricidad$= e = \dfrac{4\sqrt{3}}{8}$
Vértices: $A(8,0)$, $A'(-8,0)$, $B'(0,4)$, $B(0,-4)$
Focos: $F(4\sqrt{3},0)$, $F'(-4\sqrt{3},0)$
Ecuación general: $x^2 + 4y^2 = 64$

Problema 3 De una elipse horizontal conocemos su eje menor que mide 6 cm y tiene una excentricidad $e = \dfrac{1}{4}$. Calcular los datos que la definen y su ecuación general.

Solución:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{4} \Longrightarrow a = 4c$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow 16c^2 = 9 + c^2 \Longrightarrow c = \sqrt{\frac{9}{15}} = \frac{3}{\sqrt{15}}$$

$$a = 4c = \frac{12}{\sqrt{15}}$$

Eje Mayor$= 2a = \frac{24}{\sqrt{15}}$
Eje Menor$= 2b = 6$
Distancia Focal$= 2c = \frac{6}{\sqrt{15}}$
Excentricidad$= e = \dfrac{1}{4}$
Vértices: $A\left(\dfrac{12}{\sqrt{15}}, 0\right)$, $A'\left(-\dfrac{12}{\sqrt{15}}, 0\right)$, $B(0,3)$, $B'(0,-3)$
Focos: $F\left(\dfrac{3}{\sqrt{15}}, 0\right)$, $F'\left(-\dfrac{3}{\sqrt{15}}, 0\right)$
Ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{144/15} + \frac{y^2}{9} = 1 \Longrightarrow \frac{15x^2}{144} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Ecuación general: $15x^2 + 16y^2 = 144$

Problema 4 Dos ingenieros de ferrocarriles, que habían estudiado el bachillerato en el colegio Villaeuropa de Móstoles, quieren trazar una curva en la construcción de un tendido de vías para el ferrocarril, con todos los estudios acumulados de sus carreras. Colocan sobre el plano todos los datos y se dan cuenta que la curva que se trace tiene que ser equidistante con el punto $F(1, -1)$ y la recta $x - y = 0$.

Después de trazada la curva les dicen sus superiores que en el punto F hay un centro para la tercera edad y no puede estar a menos de 500 metros de las vías del tren. (escala $1 : 100$)

Se pide:

1. Identifica de que curva se trata.

2. Calcular la ecuación de esta curva.

3. Calcular las tangentes a la curva en los puntos en los que corta la recta $x = 1$

4. ¿Habrá que modificar la curva por la situación del Centro?

Solución:

1. Se trata de una parábola por definición.

2. Sea $P(x,y)$ un punto de esa parábola, se tiene que cumplir:

$$|\overrightarrow{AP}| = d(P,r)$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} \Longrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2 = \frac{(x-y)^2}{2}$$

$$\Longrightarrow x^2+y^2+2xy-4x+4y+4=0$$

3. En $x=1 \Longrightarrow y^2+6y+1=0 \Longrightarrow y_1=-5,83 \;\; y_2=-0,17$:

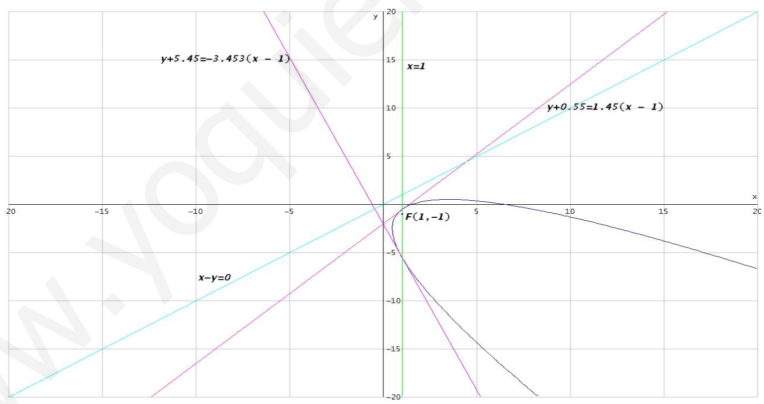
$$P_1(1;-5,83) \quad P_2(1;-0,17)$$

$$2xdx+2ydy+2ydx+2xdy-4dx+4dy=0 \Longrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+2y-4}{2x+2y+4} = -\frac{x+y-2}{x+y+2}$$

En $P_1(1;-5,83) \Longrightarrow m=-2,41 \Longrightarrow y+5,83=-2,41(x-1)$

$P_2(1;-0,17) \Longrightarrow m=0,41 \Longrightarrow y+0,17=0,41(x-1)$



4. Claramente hay que modificar la curva, no creo que les sentara muy bien tener que repetir el trabajo.