1. Resolver y comprobar la validez de las soluciones:

a) $\frac{4}{x}+\frac{2(x+1)}{3(x-2)}=4$ **b)** $\sqrt{5x+6}-2x=3$ *(2 puntos)*

2. Desarrollar y simplificar, dando el resultado racionalizado:

$$\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4=$$ *(1,75 puntos)*

3. Hallar las siguientes razones, reduciendo previamente al 1er cuadrante:

a) cos (-2730º) **b)** sen $5\pi/3$ rad **c)** tg 1230º **d)** cos $27\pi/4$ rad *(2 puntos)*

4. Dado $\alpha \in 4^{\underline{0}}$ cuadrante tal que $\sec \alpha = 2$, se pide, **por este orden**:

a) Utilizando la fórmula correspondiente, hallar cos 2α (resultado simplificado y racionalizado; no vale utilizar decimales).

b) cos $\alpha/2$

c) tg (α+30º)

d) Razonar mediante la circunferencia trigonométrica (no vale con calculadora) de qué α se trata. *(2 puntos)*

5. Resolver: $2\cos^2 x + \operatorname{sen} x = 1$. Comprobar las soluciones obtenidas. *(2 puntos)*

NOTA: La ortografía y sintaxis, presentación cuidada (orden en el planteamiento, limpieza, caligrafía, etc.) y corrección en el lenguaje matemático se calificarán con un máximo de 0,25 puntos.

① a) $\frac{4}{x}+\frac{2(x+1)}{3(x-2)}=4$; mcm $=3x(x-2) \Rightarrow 12(x-2)+2x(x+1)=12x(x-2)$

$12x-24+2x^2+2x=12x^2-24x$; $0=10x^2-38x+24$; $\boxed{0=5x^2-19x+12}$

$x=\frac{19\pm\sqrt{361-240}}{10}=\frac{19\pm 11}{10}$ → $x=3$; → $x=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$ 0,5/

comprobación: $x=3 \rightarrow \frac{4}{3}+\frac{8}{3}\overset{?}{=}4$ 0.25/

$\frac{12}{3}=4 \Rightarrow \boxed{x=3}$ es soluc.

$x=\frac{4}{5} \rightarrow \frac{4}{\frac{4}{5}}+\frac{2\left(\frac{4}{5}+1\right)}{3\left(\frac{4}{5}-2\right)}\overset{?}{=}4$; $5+\frac{2\cdot\frac{9}{5}}{3\cdot\frac{-6}{5}}\overset{?}{=}4$;   0.25/

$5+\frac{18}{-18}\overset{?}{=}4$; $5-1=4 \Rightarrow \boxed{x=\frac{4}{5}}$ es soluc.

---

b) $\sqrt{5x+6}-2x=3$; $\sqrt{5x+6}=2x+3$; $(\sqrt{5x+6})^2=(2x+3)^2$; $5x+6=4x^2+12x+9$; $\boxed{0=4x^2+7x+3}$

$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{8}=\frac{-7\pm 1}{8}$ → $x=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}$; → $x=-1$ 0.5/

comprobación: $x=-\frac{3}{4} \rightarrow \sqrt{5\cdot\frac{-3}{4}+6}-2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\overset{?}{=}3$

$\sqrt{-\frac{15}{4}+6}+\frac{3}{2}\overset{?}{=}3$ 0.25/

$\sqrt{\frac{9}{4}}+\frac{3}{2}\overset{?}{=}3$; $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{3}{4}}$ es soluc.

$x=-1 \rightarrow \sqrt{-5+6}-2(-1)\overset{?}{=}3$ 0.25/

$1+2=3 \Rightarrow \boxed{x=-1}$ es so...

TOTAL: $\boxed{2}$

---

②
$\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = 2^4-4\cdot 2^3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+6\cdot 2^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-4\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4=$ ← 0,5

$=16-4\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+6\cdot 4\cdot\frac{1}{2}-8\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{4}=$ ← 0,25

$=16-16\sqrt{2}+12-4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}=$ ← 0,25

$=16-16\sqrt{2}+12-2\sqrt{2}+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{113}{4}-18\sqrt{2}}$ 0.75

TOTAL: $\boxed{1,75}$

---

③ a) $\cos(-2730°)=\cos 2730°=\cos(7\cdot 360°+210°)=\cos 210°=\cos(180°+30°)=-\cos 30°=\boxed{-\sqrt{3}/2}$ 0,5/

b) $\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}=\text{sen}\left(\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=-\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}=-\text{sen}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\text{sen}\,\frac{\pi}{3}=\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 0.5/

c) $\text{tg}\,1230°=\text{tg}(3\cdot 360°+150°)=\text{tg}\,150°=\text{tg}(180-30)=-\text{tg}\,30°=\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$ 0.5/

d) $\cos\frac{27\pi}{4}=\cos\frac{24\pi+3\pi}{4}=\cos\left(3\text{ vueltas}+\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ 0.5/

TOTAL: $\boxed{2}$

---

④ $\sec\alpha=2 \Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{2}$ 0.1/

a) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha$ (*) [0,1]   ¿sen α? $\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha+\frac{1}{4}=1$; $\text{sen}^2\alpha=\frac{3}{4}$

$\text{sen}\,\alpha=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}$ → $\text{sen}\,\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 0.2/
→ $\text{sen}\,\alpha=\sqrt{3}/2$ desechado pq. $\alpha\in 4^{\circ}$ cuad.

Sustituimos en (*):

$\boxed{\cos 2\alpha=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}}$ 0.3/

b) $\boxed{\cos\frac{\alpha}{2}=(-)\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\sqrt{\frac{1+1/2}{2}}=-\sqrt{\frac{3/2}{2}}=-\sqrt{\frac{3}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 0.3/

0,1/

$\alpha\in 4^{\circ}$ cuad $\Rightarrow 270°<\alpha<360°$

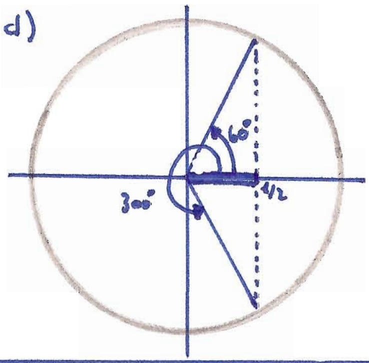
$135°<\alpha/2<180° \Rightarrow \frac{\alpha}{2}\in 2^{\circ}$ cuad

[0.1]

c) $tg(\alpha+30^\circ) = \dfrac{tg\,\alpha + tg\,30^\circ}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,30^\circ}$ (**) ¿$tg\,\alpha$? $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = -\sqrt{3}$ 0.1

Sustituimos en (**): $\boxed{tg(\alpha+30^\circ) = \dfrac{-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-(-\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{3}{3}} = \dfrac{-\frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{3}}{\cancel{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}}$ 0.4

d)



$\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{1}{2}$ ↗ $\alpha = 60^\circ$ desechado pq. $\alpha \in$ 4º cuad.
↘ $\boxed{\alpha = 300^\circ}$ 0.5

TOTAL: $\boxed{2}$

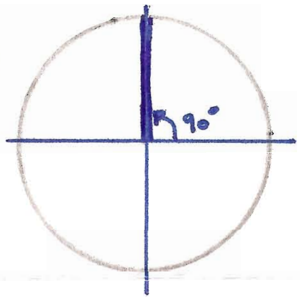
---

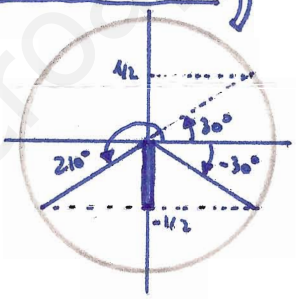
(5) $2\cos^2 x + sen\,x = 1$; $2(1 - sen^2 x) + sen\,x = 1$; $2 - 2\,sen^2 x + sen\,x = 1$; $0 = 2\,sen^2 x - sen\,x - 1$

$sen\,x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot 2(-1)}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4}$ ↗ $sen\,x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 90^\circ + K\cdot 360^\circ}$ 0.25

0.5

↘ $sen\,x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 330^\circ + K\cdot 360^\circ} \\ \boxed{x = 210^\circ + K\cdot 360^\circ} \end{cases}$ 0.5





TOTAL: $\boxed{2}$

NOTA: como no hemos elevado en ningún momento ambos miembros al cuadrado para quitar una $\sqrt{\ }$, no hay que descartar ninguna de las 3 soluciones; ahora bien, haremos la comprobación, pues así lo pide el enunciado:

$x = 90^\circ \rightarrow 2\,\cancel{\cos^2 90^\circ}^{\,0} + \cancel{sen\,90^\circ}^{\,1} \overset{?}{=} 1$; $2\cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow x = 90^\circ + K\cdot 360^\circ$ es soluc. 0.25

$x = 330^\circ \rightarrow 2\cdot(\cos 330^\circ)^2 + sen\,330^\circ \overset{?}{=} 1$; $2[\cos(-30^\circ)]^2 + sen(-30^\circ) \overset{?}{=} 1$

$2\cdot\cos^2 30^\circ - sen\,30^\circ \overset{?}{=} 1$

$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \overset{?}{=} 1$; $2\cdot\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \overset{?}{=} 1$; $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$ ⇓ 0.25

$x = 330^\circ + K\cdot 360^\circ$ es soluc.

$x = 210^\circ \rightarrow 2(\cos 210^\circ)^2 + sen\,210^\circ \overset{?}{=} 1$; $2[\underbrace{\cos(180^\circ+30^\circ)}_{-\cos 30^\circ}]^2 + \underbrace{sen(180^\circ+30^\circ)}_{-sen\,30^\circ} \overset{?}{=} 1$

$2(-\cos 30^\circ)^2 - sen\,30^\circ \overset{?}{=} 1$

$2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \overset{?}{=} 1$; $2\cdot\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \overset{?}{=} 1$; $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x = 210^\circ + K\cdot 360^\circ$ es soluc. 0.25

ORTOGRAFÍA, SINTAXIS, CALIGRAFÍA 0,05
ORDEN Y LIMPIEZA 0,10
CORRECCIÓN LENGUAJE MATEMÁTICO 0,10
$\boxed{0,25}$ TOTAL