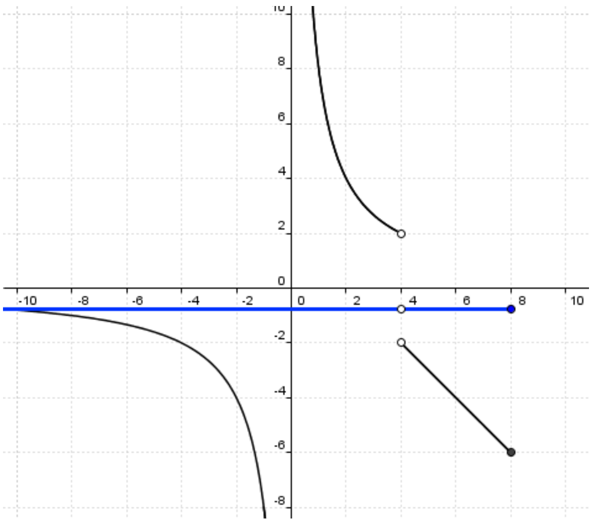
CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

1. DOMINIO

Dominio de *f*(*x*) o campo de existencia de *f*(*x*) es el conjunto de valores para los que está definida la función, es decir, el conjunto de valores que toma la variable independiente "*x*". Se denota por Dom(*f*).

$$Dom(f)=\{x\in \Re \,/\, \exists\, y\in \Re \;\; con\; y=f(x)\}$$

OBTENCIÓN DEL DOMINIO DE DEFINICIÓN A PARTIR DE LA GRÁFICA



Cuando una función se presenta a través de su gráfica, con proyectar sobre el eje de abscisas (eje OX) dicha gráfica conseguimos su dominio de definición. Esto es así porque cualquier valor "*x*" del dominio tiene una imagen "$y=f(x)$", y, por lo tanto, le corresponde un punto (x,y) de la gráfica. Este punto es el que, al proyectar dicha imagen sobre el eje OX, nos incluye ese valor dentro del dominio.

En el ejemplo vemos coloreado de azul el dominio (está dibujado un poco más abajo para que sea bien visible la escala del eje de abscisas). En este caso tenemos que $Dom(f)=(-\infty,4)\cup(4,8]$.

De una manera no formal, podríamos decir que si aplastamos la gráfica sobre el eje OX y ésta estuviese manchada de tinta, quedaría manchado sobre el eje justo el dominio de definición de la función *f*.

OBTENCIÓN DEL DOMINIO A PARTIR DE LA EXPRESIÓN ANALÍTICA

I) **FUNCIÓN POLINÓMICA**: $f(x)=P(x)\Rightarrow Dom(f)=\Re$

Ejemplos

a) $f(x)=x^3-5x^2+\frac{2}{3}x-5$ función polinómica $\Rightarrow Dom(f)=\Re$

b) $f(x)=\sqrt{2}x^4-x^2+\frac{\sqrt{3}}{3}x-1$ función polinómica $\Rightarrow Dom(f)=\Re$

II) **FUNCIÓN RACIONAL**: $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}\Rightarrow Dom(f)=\Re-\{x\,/\,Q(x)=0\}$

Ejemplos

a) $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4x-5}$ función racional $\Rightarrow Dom(f)=\Re-\{x\in\Re\,/\,x^2-4x-5=0\}=\Re-\{-1,5\}$

$$x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}=\begin{cases}\frac{4+6}{2}=5\\ \\ \frac{4-6}{2}=-1\end{cases}$$

b) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+4}$ función racional $\Rightarrow Dom(f)=\Re-\{x\in\Re \,/\, x^2+4=0\}=\Re$

$x^2+4=0 \Leftrightarrow x^2=-4 \Leftrightarrow x=\sqrt{-4} \Rightarrow$ no tiene solución real

III) <u>FUNCIÓN RADICAL</u>: $f(x=\sqrt[n]{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} n \;\; par \;\; \Rightarrow \; Dom(f)=\{x\in Dom(g)\,/\,g(x)\geq 0\}\\ n \;\; impar \;\; \Rightarrow \; Dom(f)=Dom(g)\end{cases}$

<u>Ejemplos</u>

a) $f(x)=\sqrt{2x-4}$ función radical con índice par $\Rightarrow Dom(f)=\{x\in\Re\,/\,2x-4\geq 0\}=[2,+\infty)$

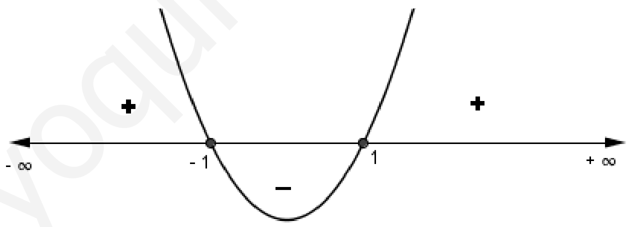
$2x-4\geq 0 \Rightarrow 2x\geq 4 \Rightarrow x\geq 2$

b) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ función radical con índice par $\Rightarrow Dom(f)=\{x\in\Re\,/\,x^2-1\geq 0\}=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

Tenemos que resolver la inecuación: $x^2-1\geq 0$

<u>Ceros</u>

$x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x=-1$ ò $x=1$

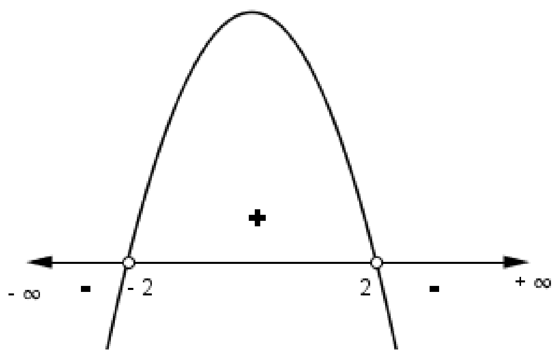


c) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{4-x^2}}$ función radical con índice par $\Rightarrow Dom(f)=\{x\in\Re\,/\,4-x^2>0\}=(-2,2)$

Tenemos que resolver la inecuación: $4-x^2>0$

<u>Ceros</u>

$4-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x=-2$ ò $x=2$

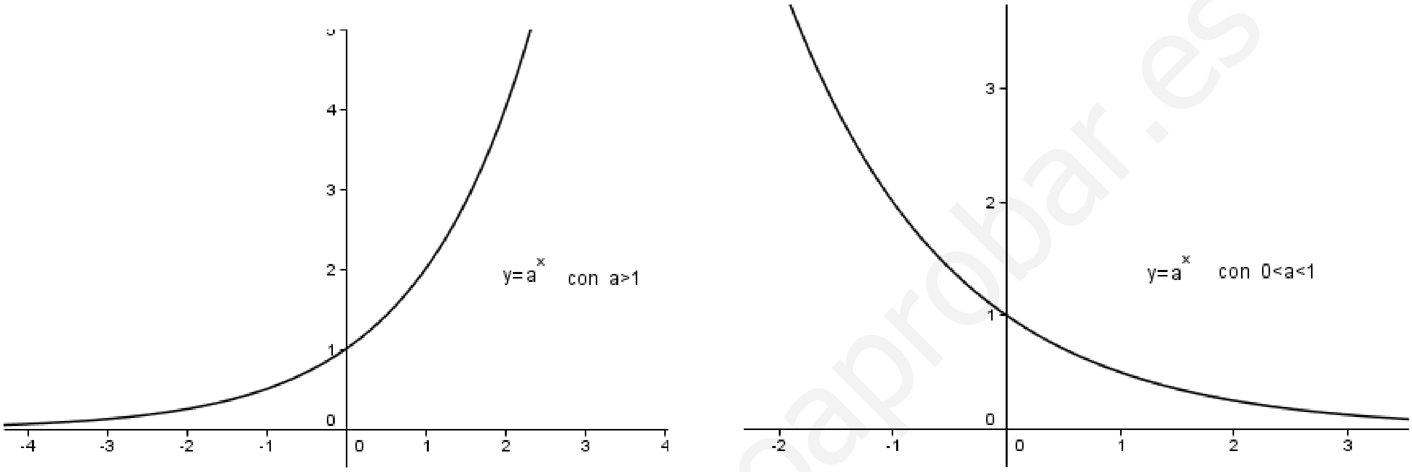


d) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-5x+1}$ función radical con índice impar $\Rightarrow Dom(f)=Dom(y=x^2-5x+1)=\Re$

e) $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{1}{x+2}}$ función radical con índice impar $\Rightarrow Dom(f)=Dom\left(y=\dfrac{1}{x+2}\right)=\Re-\{-2\}$

IV) FUNCIÓN EXPONENCIAL

1) $f(x)=a^x \quad con \quad a>0,\ a\neq 1 \Rightarrow Dom(f)=\Re$



2) $f(x)=a^{g(x)} \quad con \quad a>0,\ a\neq 1 \Rightarrow Dom(f)=Dom(g)$

Ejemplos

a) $f(x)=2^{\sqrt{x-3}} \quad \Rightarrow Dom(f)=Dom(y=\sqrt{x-3})=\{x\in\Re \,/\, x-3\geq 0\}=[3,+\infty)$

b) $f(x)=e^{\frac{2}{x^2-3x}} \quad \Rightarrow Dom(f)=Dom\left(y=\dfrac{2}{x^2-3x}\right)=\Re-\{x\in\Re \,/\, x^2-3x=0\}=\Re-\{0,3\}$

$$x^2-3x=0 \Leftrightarrow x\cdot(x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

c) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2}{x^2+1}} \quad \Rightarrow Dom(f)=Dom\left(y=\dfrac{2}{x^2+1}\right)=\Re-\{x\in\Re \,/\, x^2+1=0\}=\Re$

$x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1 \Rightarrow$ No tiene solución real

V) **COCIENTE DE FUNCIONES NO POLINÓMICAS**: $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$

$$Dom(f)=[Dom(g)\cap Dom(h)]-\{x\in Dom(h)\,/\,h(x)=0\}$$

(Valores de *x* en los que *g* y *h* están definidas a la vez excepto aquellos en los que *h* se anula)

Ejemplos

a) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$

- $y=x\rightarrow \text{Dominio}=\Re$
- $y=\sqrt{x-1}\rightarrow \text{Dominio}=\{x\in\Re\,/\,x-1>0\}=\{x\in\Re\,/\,x>1\}=(1,+\infty)$

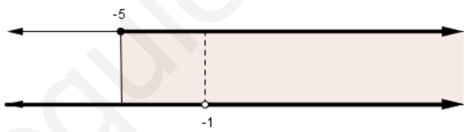
(la desigualdad es estricta porque como el radical está en el denominador no puede anularse)

Por tanto, $Dom(f)=\Re\cap(1,+\infty)=(1,+\infty)$

b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+10}}{e^{x+1}-1}$

- $y=\sqrt{2x+10}\rightarrow \text{Dominio}=\{x\in\Re\,/\,2x+10\geq 0\}=[-5,+\infty)$

  $2x+10\geq 0\Leftrightarrow 2x\geq -10\Leftrightarrow x\geq -5\Leftrightarrow x\in[-5,+\infty)$
- $y=e^{x+1}-1\rightarrow \text{Dominio}=\Re$
- $e^{x+1}-1=0\Leftrightarrow e^{x+1}=1\Leftrightarrow e^{x+1}=e^{0}\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$



Por tanto, $Dom(f)=[-5,-1)\cup(-1,+\infty)$

VI) **FUNCIONES DEL TIPO**: $y=f(x)^{g(x)}$

Dominio $=\{x\in Dom(f)\,/\,f(x)>0\}\cap Dom(g)$

(Valores de *x* en los que $f(x)>0$ y f y *g* están definidas a la vez)

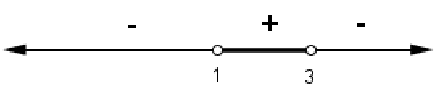
Ejemplos

a) $f(x)=\left(\dfrac{3-x}{5x-5}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

- $\dfrac{3-x}{5x-5}>0\rightarrow x\in(1,3)$

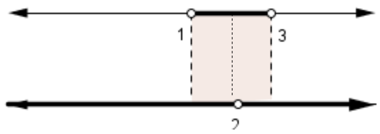
  Ceros: $3-x=0\Rightarrow x=3$

  Polos: $5x-5=0\Rightarrow x=1$



- $y = \dfrac{1}{x-2} \rightarrow \text{Dominio} = \Re - \{2\}$

Por tanto, $Dom(f) = (1,3) \cap (\Re - \{2\}) = (1,2) \cup (2,3)$



VII) <u>FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS</u>

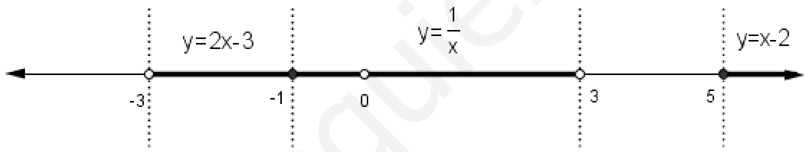
Se estudian las funciones parciales en cada uno de los subintervalos en los que están definidas.

<u>Ejemplo</u>

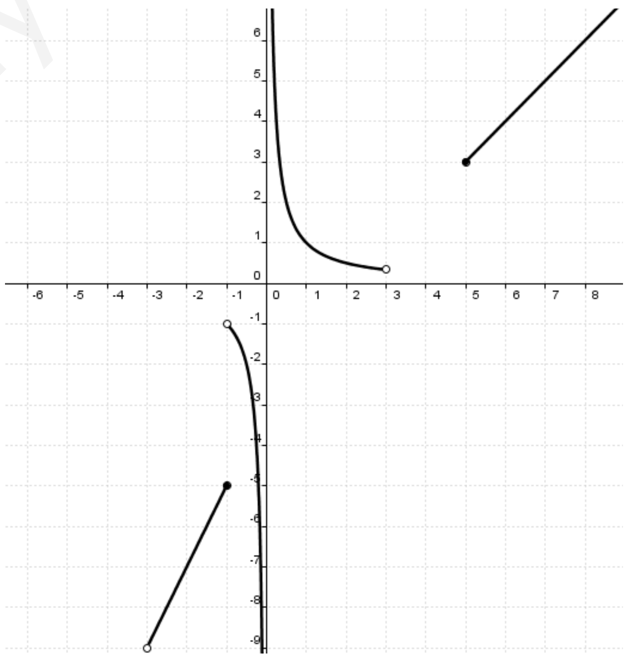
$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & si \quad -3 < x \le -1 \\ \dfrac{1}{x} & si \quad -1 < x < 3 \\ x-2 & si \quad x \ge 5 \end{cases}$$

Primero estudiamos el dominio de cada una de las funciones parciales

- $y = 2x - 3 \rightarrow \text{Dominio } = \Re \quad \Rightarrow (-3,-1] \in Dom(f)$
- $y = \dfrac{1}{x} \rightarrow \text{Dominio} = \Re - \{0\} \quad \Rightarrow (-1,0) \cup (0,3) \in Dom(f)$
- $y = x - 2 \rightarrow \text{Dominio } = \Re \quad \Rightarrow [5,+\infty) \in Dom(f)$



Por tanto, $Dom(f) = (-3,0) \cup (0,3) \cup [5,+\infty)$



2. RECORRIDO

Recorrido de *f*(*x*) es el conjunto de valores que toma la variable dependiente "*y*", es decir, el conjunto de números reales que son imagen de algún elemento del dominio de *f*(*x*). Se denota por *Rec*(*f*).

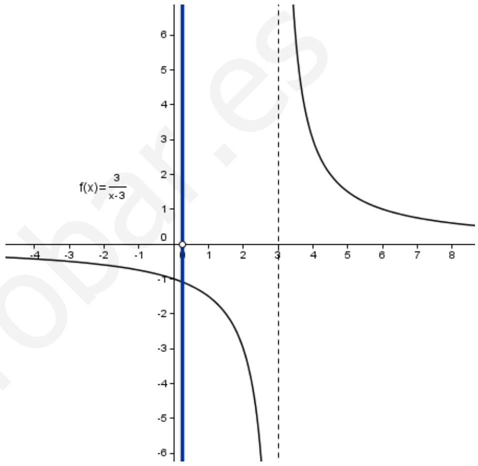
$$\operatorname{Re} c(f) = \{ y \in \Re \,/\, \exists\, x \in Dom(f) \ \ con \ \ f(x) = y \}$$

OBTENCIÓN DEL RECORRIDO DE DEFINICIÓN A PARTIR DE LA GRÁFICA

Para calcular el recorrido de una función, se representa gráficamente y luego se estudia sobre el eje de ordenadas.

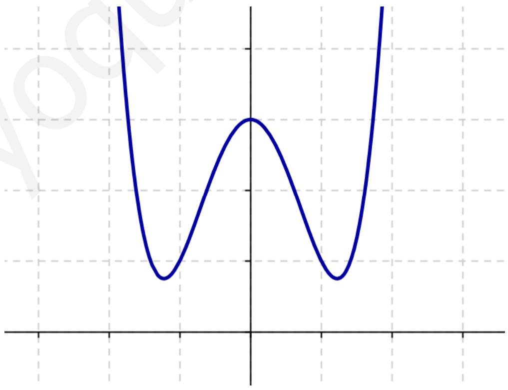
Procedemos igual que en el dominio, pero ahora proyectamos sobre el eje de ordenadas.

En la gráfica de la derecha $\operatorname{Rec}(f) = \Re - \{0\}$.



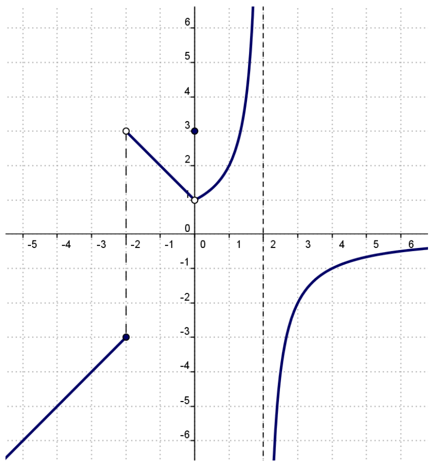
3. CONTINUIDAD. DISCONTINUIDADES.

De forma intuitiva, una **función continua en todo su dominio** sería aquella que se puede dibujar de un sólo trazo sin levantar el lápiz del papel. Por ejemplo la dibujada a continuación:



Sin embargo, la mayoría de las funciones van a presentar **discontinuidades**, o sea, van a ser continuas sólo en algunos "trozos" (intervalos) de su dominio y en los límites de éstos presentarán discontinuidades.

Una función que no es continua presenta alguna **discontinuidad.** Por ejemplo para la función de la derecha tenemos:



$Dom(f) = \Re - \{2\}$

$\text{Dominio de continuidad} = (-\infty,-2) \cup (-2,0) \cup (0,2) \cup (2,+\infty) =$

$= \Re - \{-2,0,2\}$

En $x = -2$ hay una discontinuidad de salto finito

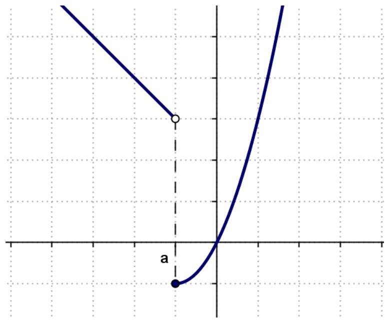
En $x = 0$ hay una discontinuidad evitable

En $x = 2$ hay una discontinuidad de salto infinito

TIPOS DE DISCONTINUIDADES

- **Discontinuidad de salto finito**

Una función tiene una **discontinuidad de salto finito en *x=a*** si observamos en dicho punto una **separación o salto entre dos “trozos” de su gráfica que puede medirse**. Esto es debido a que la tendencia de la función a la izquierda del punto $x=a$ es diferente de la que tiene a la derecha.
En la gráfica representada a la derecha observamos lo indicado.

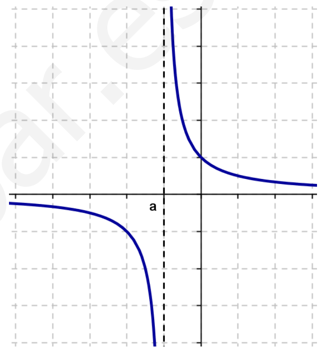


- **Discontinuidad asintótica (o de salto infinito)**

Cuando en un punto $x=a$ de la curva observamos que la tendencia a la izquierda, a la derecha o ambos lados es a alejarse al infinito (más infinito o menos infinito), entonces nos encontramos con una **discontinuidad de salto infinito en el punto *x=a*.**
En la gráfica de la derecha:

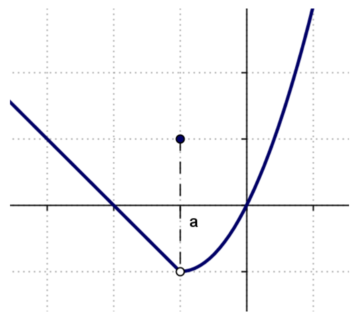
$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$



- **Discontinuidad evitable**

Si nos encontramos que la continuidad de la gráfica se interrumpe en un punto $x=a$ donde **no hay imagen**, o **la imagen está desplazada del resto de la gráfica**, tendremos una **discontinuidad evitable en el punto *x=a*.**



Aquí la tendencia de la función “*a la izquierda de a*” y “*a la derecha de a*” sí coincide, sin embargo es *f*(a) el valor que no coincide con dicha tendencia o que ni siquiera existe.

4. PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

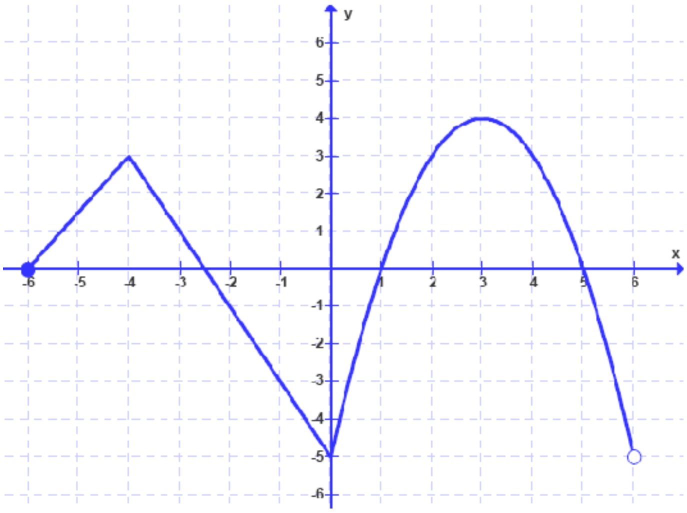
Podemos calcular los puntos de corte de una función con los ejes cartesianos a partir de su gráfica o a partir de su expresión analítica.

GRÁFICAMENTE

Extraemos la información directamente de la gráfica.

- Si un punto pertenece al eje de abscisas (eje OX) su ordenada es cero (y=0). Es decir, los puntos del eje OX son de la forma (x,0).
- Si un punto pertenece al eje de ordenadas (eje OY) su abscisa es cero (x=0). Es decir, los puntos del eje OY son de la forma (0,y).

Una función puede cortar al eje OX en varios puntos. Al eje OY como máximo puede cortarlo en un punto.



Puntos de corte con el eje OX

$(-6,0)$ $\left(-\frac{5}{2},0\right)$ $(1,0)$ $(5,0)$

Puntos de corte con el eje OY

$(0,-5)$

ANALÍTICAMENTE

Para hallar el punto donde la función corta al eje de ordenadas (eje OY) se resuelve el sistema: $\left.\begin{matrix} y = f(x) \\ x = 0 \end{matrix}\right\}$

Para hallar los puntos donde la función corta al eje de abscisas (eje OX) se resuelve el sistema: $\left.\begin{matrix} y = f(x) \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$

Ejemplos

1) Calcula los puntos de corte con los ejes de la función $y = \frac{x^2-4}{x}$

Puntos de corte con el eje OX

$\left.\begin{matrix} y = \frac{x^2-4}{x} \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ (Utilizamos el método de igualación) $\Rightarrow \frac{x^2-4}{x} = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2$ y $x = 2$

Luego, los puntos de corte con el eje OX son $(-2,0)$ y $(2,0)$

Puntos de corte con el eje OY

$\left.\begin{matrix} y = \frac{x^2-4}{x} \\ x = 0 \end{matrix}\right\}$ $0 \notin Dom(f) \Rightarrow$ No hay puntos de corte con el eje OY.

2) Calcula los puntos de corte con los ejes de la función $y = x^2 - 4x + 3$

Puntos de corte con el eje OX

$\left.\begin{matrix} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ (Utilizamos el método de igualación) $\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ y $x = 3$

Luego, los puntos de corte con el eje OX son $(1,0)$ y $(3,0)$

Puntos de corte Eje OY

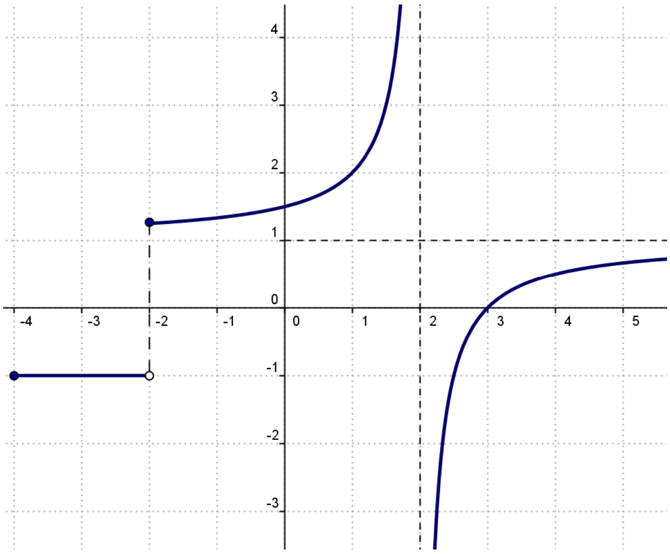
$\left.\begin{matrix} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ (Utilizamos el método de sustitución) $\Rightarrow y = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 \Rightarrow y = 3$

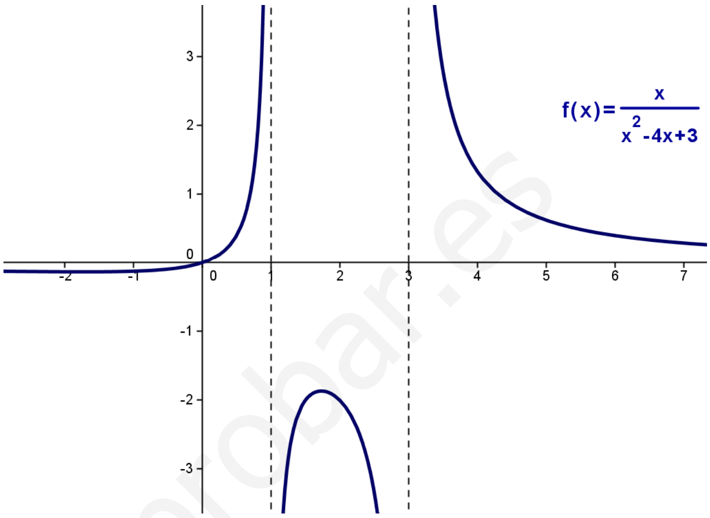
Luego, el punto de corte con el eje OY es $(0,3)$.

5. SIGNO DE UNA FUNCIÓN.

Dada una función $f(x)$, determinar su signo es hallar para qué valores de su dominio es $f(x)<0$ y $f(x)>0$.

A PARTIR DE SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA, $f(x)>0$ para el conjunto de puntos situados por encima del eje de abscisas (eje OX), y $f(x)<0$ para aquellos puntos que están situados por debajo.





$f(x)<0$ si $x\in[-4,-2)\cup(2,3)$

$f(x)>0$ si $x\in[-2,2)\cup(3,+\infty)$

$f(x)<0$ si $x\in(-\infty,0)\cup(1,3)$

$f(x)>0$ si $x\in(0,1)\cup(3,+\infty)$

A PARTIR DE SU EXPRESIÓN ANALÍTICA es preciso encontrar los posibles cambios de signo, determinando los ceros de la función y los puntos en los que la función no está definida. Con estos datos se pueden determinar los intervalos en los que el signo es constante.

Ejemplo: Estudiar el signo de la función $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x}$

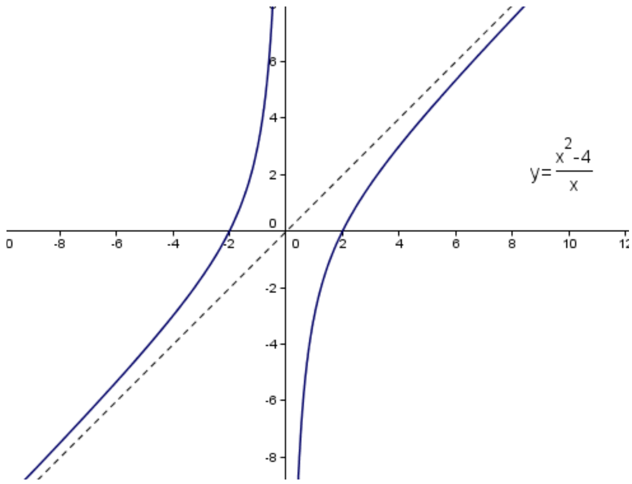
$Dom(f)=\Re-\{0\}$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x}=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x=-2 \text{ ò } x=2$$

	$-\infty$ … -2	-2 … 0	0 … 2	2 … $+\infty$
SIGNO DE f(x)	–	+	–	+

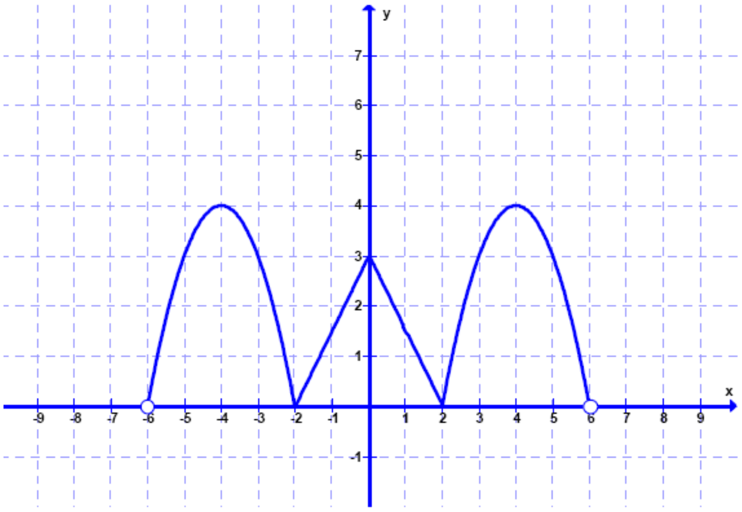
$f(x)<0$ si $x\in(-\infty,-2)\cup(0,2)$

$f(x)>0$ si $x\in(-2,0)\cup(2,+\infty)$



6. SIMETRÍA

- $f(x)$ es **PAR** si $f(-x) = f(x)$ En tal caso, la gráfica de $f(x)$ es simétrica respecto al eje OY.



Una función presenta **simetría par** si para valores de **x** positivos o negativos pero de igual valor absoluto, la función toma el mismo valor; es decir, se verifica que $\mathbf{f(x) = f(-x)}$

$\mathbf{f(-2) = 0 = f(2)}$

$\mathbf{f(-3) = 3 = f(3)}$

$\mathbf{f(-4) = 4 = f(4)}$

$\mathbf{f(-5) = 3 = f(5)}$

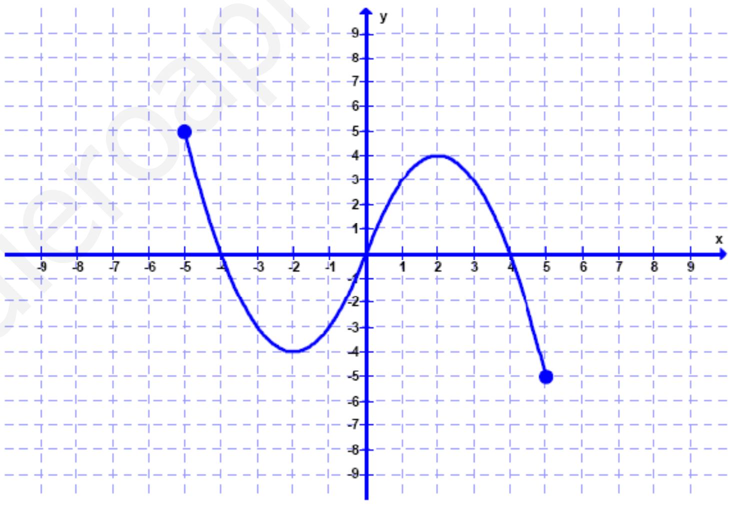
- $f(x)$ es **IMPAR** si $f(-x) = -f(x)$ En tal caso, la gráfica de $f(x)$ es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Una función presenta **simetría impar** si para valores de **x** positivos o negativos pero de igual valor absoluto, la función toma valores de signo distinto; es decir, se verifica que $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$

$\mathbf{f(-1) = -3}$ $\qquad$ $\mathbf{f(1) = 3}$

$\mathbf{f(-2) = -4}$ $\qquad$ $\mathbf{f(2) = 4}$

$\mathbf{f(-5) = 5}$ $\qquad$ $\mathbf{f(5) = -5}$



<u>Ejemplo</u>: Estudiar la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - x^2 + 2$

c) $f(x) = x^3 - x + 2$

b) $f(x) = 4x^3 - 5x$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$

<u>Solución</u>

a) $f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 + 2 = x^4 - x^2 + 2 = f(x) \Rightarrow f(x)$ es PAR

b) $f(-x) = 4(-x)^3 - 5(-x) = -4x^3 + 5x = -(4x^3 - 5x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ es IMPAR

c) $f(-x) = (-x)^3 - (-x) + 2 = -x^3 + x + 2 \begin{cases} \neq f(x) \\ \\ \neq -f(x) \end{cases} \Rightarrow f(x)$ no es par ni impar

d) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^4 + 1} = \dfrac{x^2}{x^4 + 1} = f(x) \Rightarrow f(x)$ es PAR

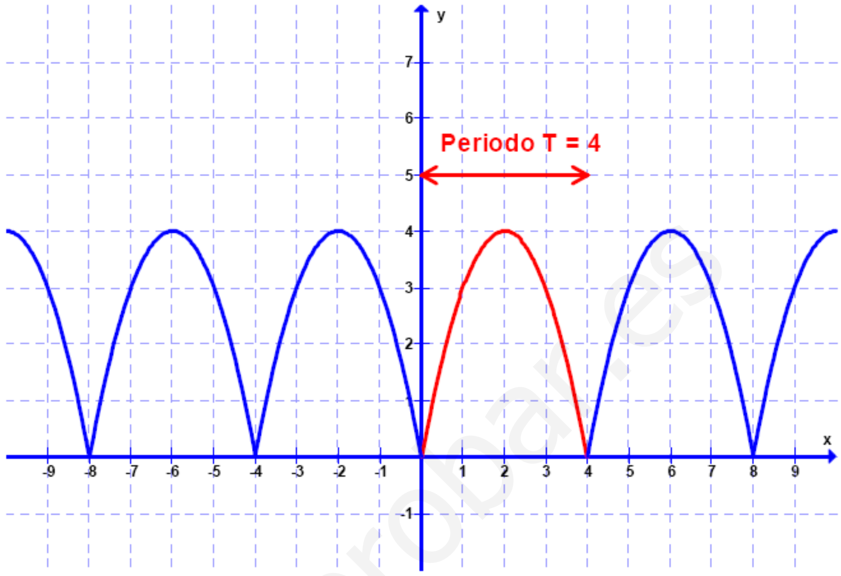
7. PERIODICIDAD

$f(x)$ es una función **PERIÓDICA DE PERIODO T** si $f(x+T)=f(x) \quad \forall x \in Dom(f)$, siendo T el menor número real que verifica esta propiedad.

Observa la siguiente gráfica.
Parece como si un trozo de ella se fuese repitiendo.
Calculemos algunas imágenes.

$f(-8)=f(-4)=f(0)=f(4)=0$

$f(-6)=f(-2)=f(2)=f(6)=4$



¿Qué observas?

Si tomamos un valor para la vª independiente **x**, y le vamos sumando 4 unidades los valores correspondientes de sus imágenes (**y**) son iguales.

Una función **f** es **periódica** cuando existe un número **T**, llamado periodo, tal que $f(x+T)=f(x)$

8. ASÍNTOTAS

La palabra asíntota, (antiguamente, "asímptota"), proviene del griego *asumptotos*, compuesto de "*a"* = "sin" y de "*sumpipto"* = "*en*contrarse"; por tanto, nuestro término viene a significar "sin encontrarse, sin tocarse". En el estudio de funciones llamamos así a una línea recta hacia la que se aproxima infinitamente la gráfica de la función, pero sin llegar a encontrarse ambas durante dicha aproximación infinita.

Las asíntotas surgen de manera natural al estudiar el comportamiento de una función "en el infinito" de las variables.

ASÍNTOTAS VERTICALES

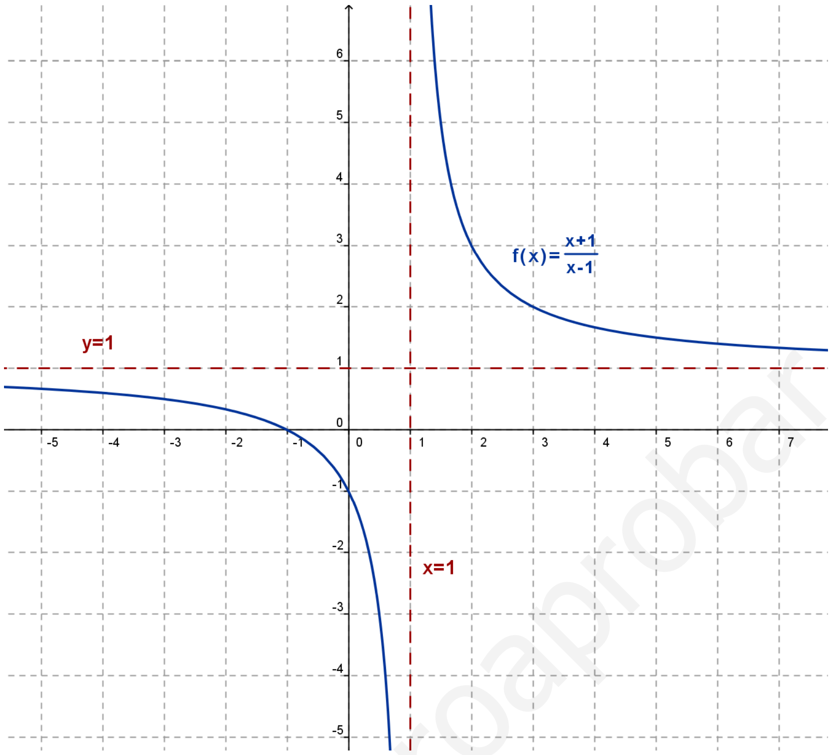
Cuando una función $f(x)$ no está definida en un punto "a", pero para valores cercanos a dicho punto (por la derecha, por la izquierda o por ambos lados), las imágenes correspondientes se hacen cada vez más grandes en valor absoluto, entonces diremos que la recta $x=a$ es una asíntota vertical de $f(x)$. Se dice que en dicho punto la función "tiende a infinito".

La recta "*x=a*" es una ASÍNTOTA VERTICAL de la función *f*(*x*) si el límite ("la tendencia") de la función en el punto "*a*" es infinito.

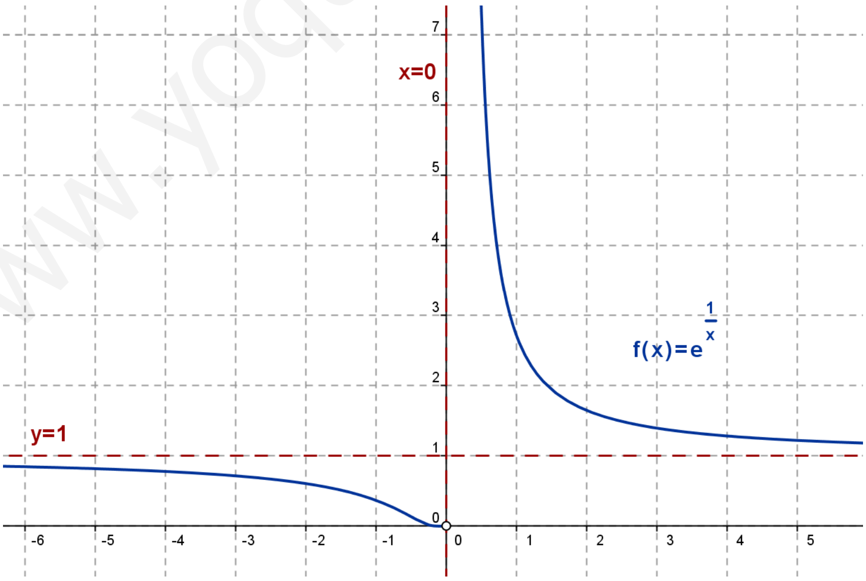
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = a \text{ es asíntota vertical por la izquierda}$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = a \text{ es asíntota vertical por la derecha}$$

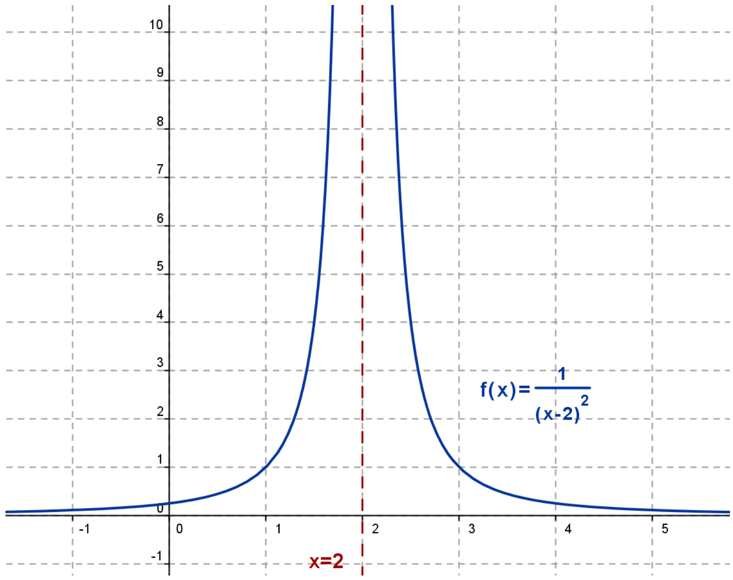
$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = a \text{ es asíntota vertical}$$



$$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 0 \text{ es asíntota vertical por la derecha de } f(x)$$



$$\lim_{x\to 2} f(x)=+\infty \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x)=+\infty \\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty \end{cases} \Rightarrow x=2 \text{ es asíntota vertical}$$

Notas

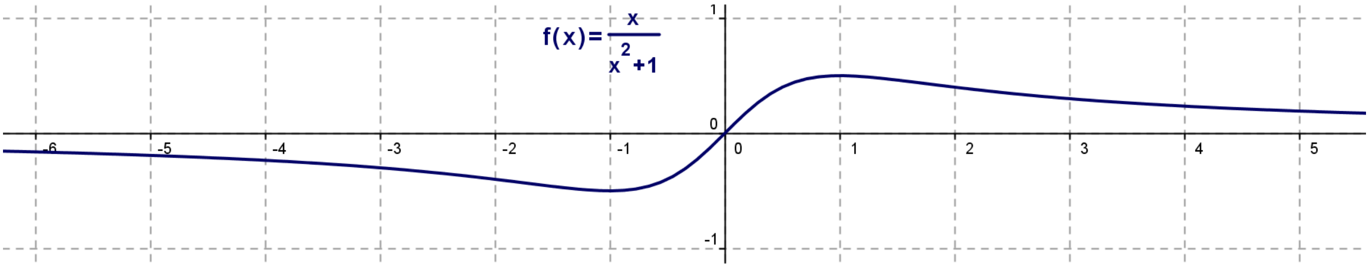
1) Una función puede tener varias asíntotas verticales, incluso infinitas
2) La gráfica de una función nunca corta a una asíntota vertical.
3) La tendencia hacia infinito a ambos lados del punto de discontinuidad puede ser idéntica u opuesta.

ASÍNTOTAS HORIZONTALES

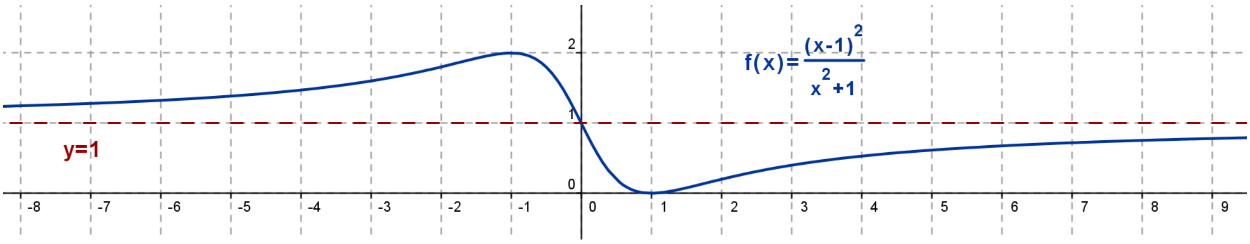
Si estudiamos lo que ocurre con la gráfica de una función cuando los valores de la variable independiente "x" se hacen muy grandes (hablando en valor absoluto), puede ocurrir que ésta se vaya acercando cada vez más a un valor determinado ($y=k$), sin llegar nunca a tomarlo. En tal caso, la recta $y=k$ es una asíntota horizontal de $f(x)$, dado que la función tiende a "pegarse" a dicha recta "en el infinito".

La recta "*y*=*k*" es una ASÍNTOTA HORIZONTAL de la función *f*(*x*) si el límite (la "tendencia") de la función en el infinito es el número "*k*".

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=k \Rightarrow y=k \text{ es asíntota horizontal de } f(x)$$



$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \begin{cases} \lim_{x\to-\infty} f(x)=0^- \\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=0^+ \end{cases} \Rightarrow y=0 \text{ es asíntota horizontal de } f(x)$$



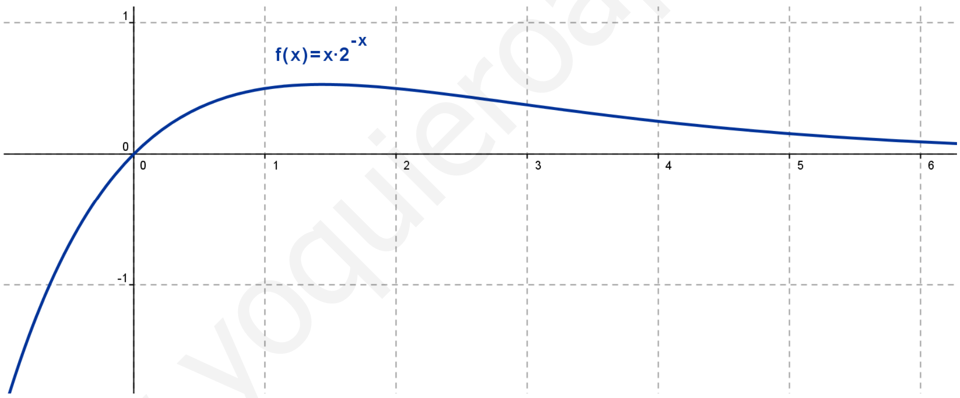
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=1\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1^{+}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1^{-}\end{cases}\Rightarrow y=1 \text{ es asíntota horizontal de } f(x)$$

- **<u>*y=k* es una ASÍNTOTA HORIZONTAL POR LA DERECHA</u> de la función $f(x)$ si el límite de la función en $+\infty$ es el número "*k*".**

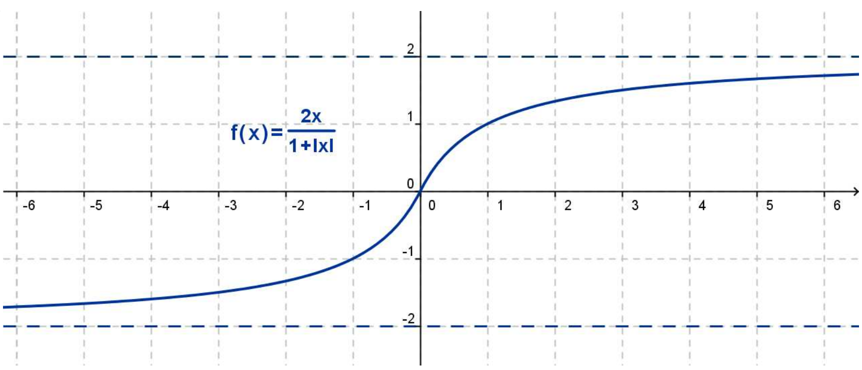
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=k\Rightarrow y=k \text{ es asíntota horizontal por la derecha}$$

- **<u>*y=k* es una ASÍNTOTA HORIZONTAL POR LA IZQUIERDA</u> de la función $f(x)$ si el límite de la función en $-\infty$ es el número "*k*".**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=k\Rightarrow y=k \text{ es asíntota horizontal por la izquierda}$$



$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0 \text{ es asíntota horizontal por la derecha}$$



$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2\Rightarrow y=2 \text{ es asíntota horizontal por la derecha}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2\Rightarrow y=-2 \text{ es asíntota horizontal por la izquierda}$$

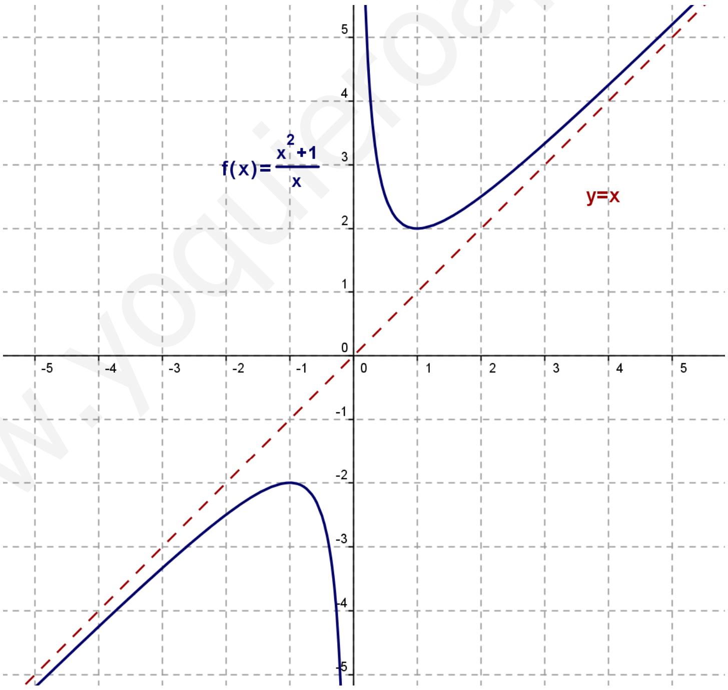
Notas

1) Una función real de variable real puede tener como máximo 2 asíntotas horizontales (en este último caso, una de ellas es asíntota por la derecha y la otra lo es por la izquierda). Hay funciones que sólo tienen asíntota horizontal por la derecha o por la izquierda.
2) La gráfica de una función puede cortar a una asíntota horizontal.
3) Una función no tiene por qué tener los dos tipos de asíntotas que hemos visto (verticales y horizontales). Puede no tener ninguna (cualquier función polinómica), tener sólo asíntotas verticales (una o más) o sólo asíntotas horizontales (una o dos como mucho).

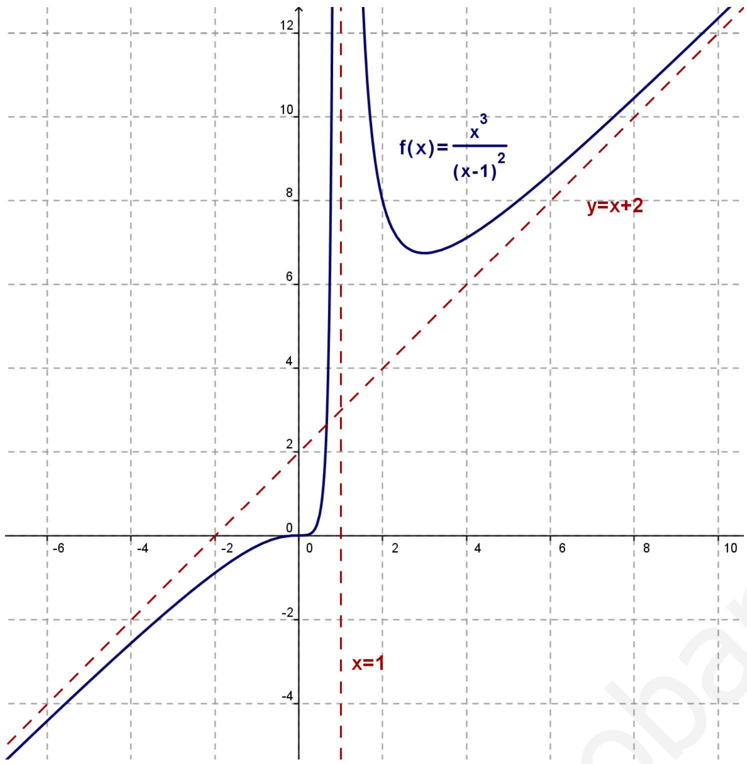
ASÍNTOTAS OBLICUAS

Una recta de ecuación $y = mx + n$ (m distinto de 0) es **asíntota oblicua** de una función $f(x)$ si para valores de "x" cada vez más grandes (en valor absoluto), los puntos de la recta y los de la gráfica de la función están cada vez más próximos. Es decir, la recta y la gráfica de $f(x)$ tienden a "pegarse" para valores grandes de "x" (en valor absoluto).

Es decir una función tiene una asíntota oblicua del tipo $y = mx + n$ cuando la función se va acercando cada vez más a la recta asíntota en el infinito.



$y = x$ **es asíntota oblicua de** $f(x)$



$y = x + 2$ **es asíntota oblicua de** $f(x)$

<u>Notas</u>

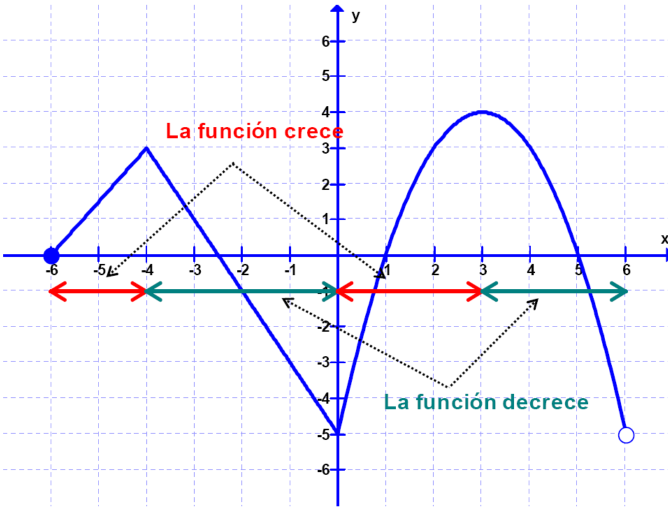
1) Si una función tiene asíntotas horizontales, no tiene oblicuas. Esto es fácilmente esperable, puesto que una asíntota horizontal $y = n$ es realmente un caso particular de asíntota oblicua $y = mx + n$, con $m = 0$. Por tanto, la presunta asíntota oblicua que buscamos, es la horizontal ya existente.
2) La gráfica de una asíntota oblicua puede cortar a una asíntota oblicua.

9. <u>CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO.</u>

DEFINICIONES

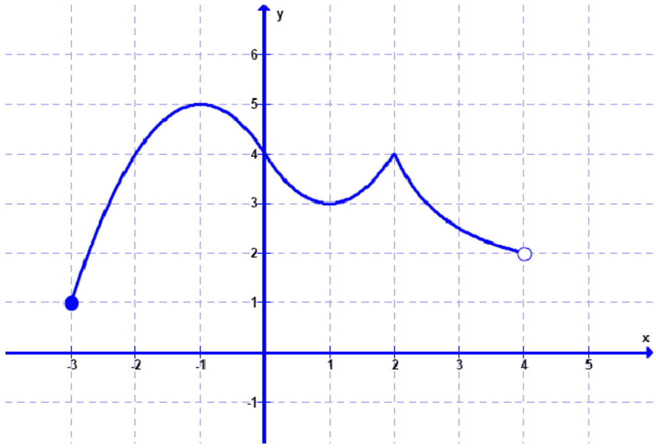
a) Una función f es **creciente** en un intervalo (a,b) de su dominio si $\forall$ x_1 y x_2 $\in$ (a,b) con $x_1 > x_2$ se cumple que $f(x_1) \geq f(x_2)$.
b) Una función f es **estrictamente creciente** en un intervalo (a,b) de su dominio si $\forall$ x_1 y x_2 $\in$ (a,b) con $x_1 > x_2$ se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$.
c) Una función f es **decreciente** en un intervalo (a,b) de su dominio si $\forall$ x_1 y x_2 $\in$ (a,b) con $x_1 > x_2$ se cumple que $f(x_1) \leq f(x_2)$.
d) Una función f es **estrictamente decreciente** en un intervalo (a,b) de su dominio si $\forall$ x_1 y x_2 $\in$ (a,b) con $x_1 > x_2$ se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$.

NOTA: Para definir los intervalos de crecimiento y decrecimiento (siempre abiertos) utilizaremos la variable x.



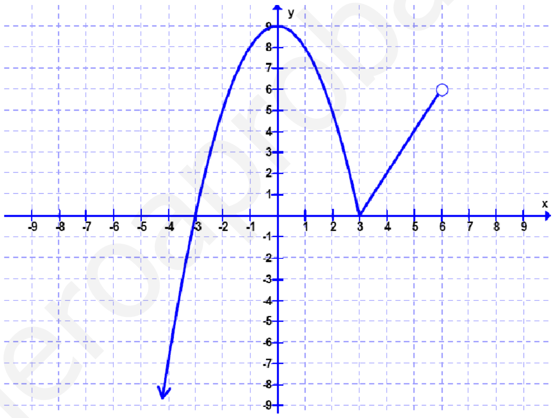
$f(x)$ CRECE si $x \in (-6,-4) \cup (0,3)$

$f(x)$ DECRECE si $x \in (-4,0) \cup (3,6)$



$f(x)$ CRECE si $x \in (-3,-1) \cup (1,2)$

$f(x)$ DECRECE si $x \in (-1,1) \cup (2,4)$



$f(x)$ CRECE si $x \in (-\infty,0) \cup (3,6)$

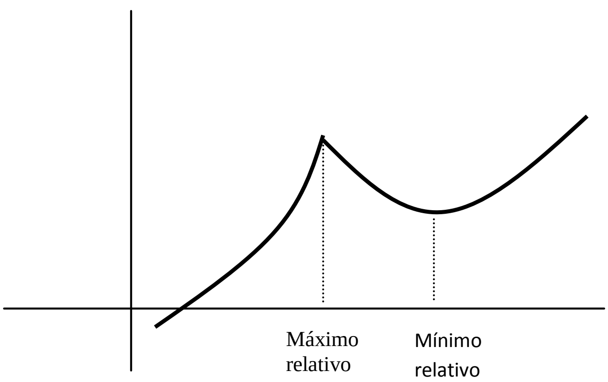
$f(x)$ DECRECE si $x \in (0,3)$

10.EXTREMOS RELATIVOS Y ABSOLUTOS

DEFINICIONES

e) Una función $f(x)$ tiene un **máximo relativo o local** en un punto x_0 si es posible determinar un entorno reducido de x_0 $E^*(x_0,r)$ (entorno de centro x_0 y radio r excluyendo a x_0) en el que $f(x_0) > f(x)$ $\forall x \in E^*(x_0,r)$. En caso de que $f(x)$ sea continua en x_0, la función pasa de ser estrictamente creciente a estrictamente decreciente en dicho punto.

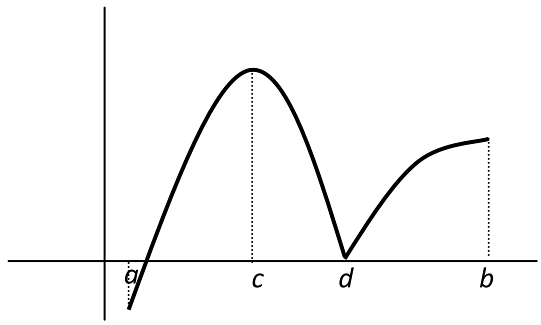
f) Una función $f(x)$ tiene un **mínimo relativo o local** en un punto x_0 si es posible determinar un entorno reducido de x_0, $E^*(x_0,r)$ en el que $f(x_0) < f(x)$ $\forall x \in E^*(x_0,r)$. En caso de que $f(x)$ sea continua en x_0, la función pasa de ser estrictamente decreciente a estrictamente creciente en dicho punto.



g) Una función f tiene un **máximo absoluto** en un punto x_0 si $f(x_0) \geq f(x)\ \ \forall x \in Dom(f)$.

h) Una función f tiene un **mínimo absoluto** en un punto x_0 si $f(x_0) \leq f(x)\ \ \forall x \in Dom(f)$.

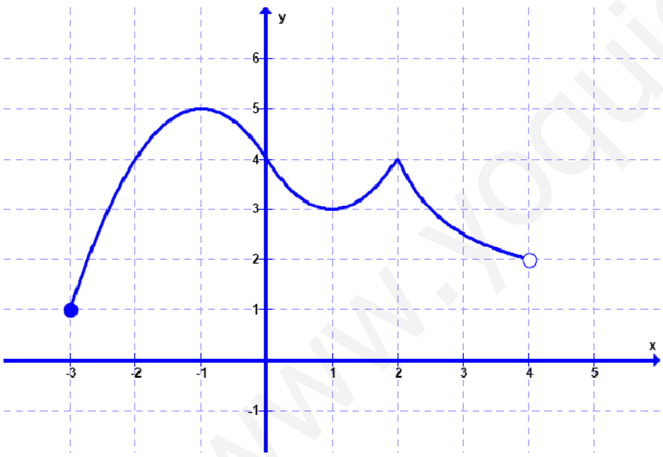
Cuando se determinan los extremos de una función continua *f* en un intervalo cerrado $[a,b]$ hay que tener presente que un extremo relativo puede ser absoluto, pero un extremo absoluto no es relativo cuando está en $x = a$ ò $x = b$



En $x = c$ hay un máximo absoluto y relativo de *f* en $[a,b]$.

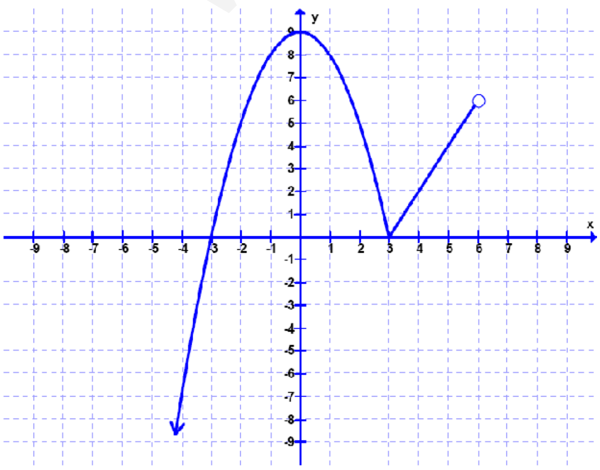
En $x = a$ hay un mínimo absoluto de *f* en $[a,b]$ pero no relativo.

En $x = d$ hay un mínimo relativo de *f* en $[a,b]$.



Esta función presenta dos máximos relativos en $x = -1$ y $x = 2$ y un máximo absoluto en $x = -1$

Tiene un mínimo relativo en $x = 1$ y un mínimo absoluto en $x = -3$



Esta función presenta un máximo relativo y absoluto en $x = 0$

Tiene un mínimo relativo en $x = 3$
No tiene mínimo absoluto

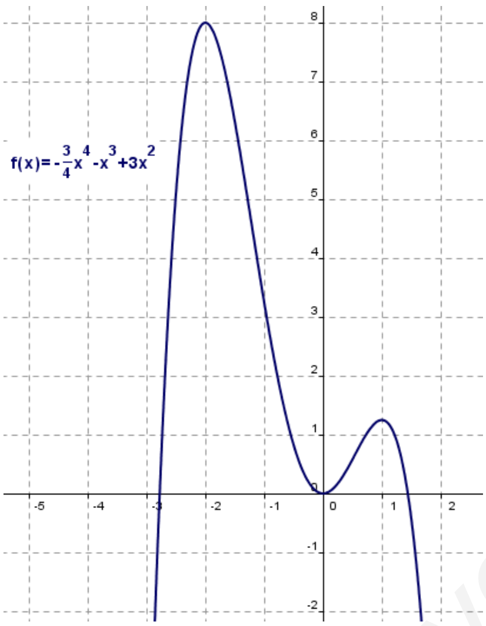
11. ACOTACIÓN

- **Una función** $f(x)$ **está acotada superiormente si existe un número real k tal que** $\forall x \in Dom(f)$ se tiene $f(x) \leq k$. A cualquier k que verifique esta condición lo llamamos cota superior de la función.

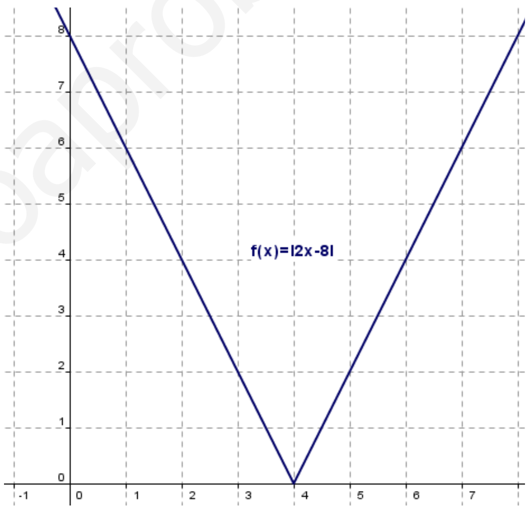
Si $f(x)$ está acotada superiormente, la menor de sus cotas inferiores recibe el nombre de supremo y si además pertenece al recorrido de la función es su máximo absoluto.

- **Una función** $f(x)$ **está acotada inferiormente si existe un número real k tal que** $\forall x \in Dom(f)$ se tiene $f(x) \geq k$. A cualquier k que verifique esta condición lo llamamos cota inferior de la función.

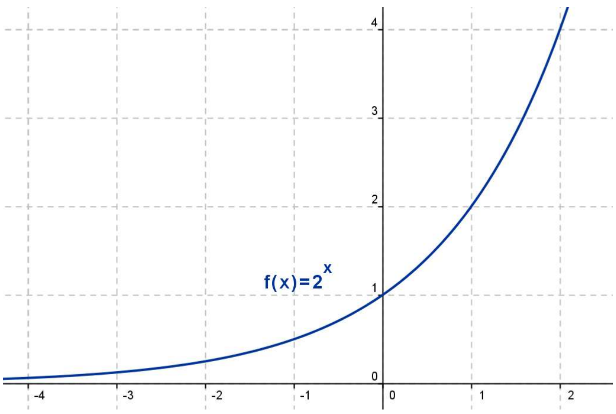
Si $f(x)$ está acotada inferiormente, la mayor de sus cotas inferiores recibe el nombre de ínfimo y si además pertenece al recorrido de la función es su mínimo absoluto.



$f(x)$ está acotada superiormente
Máximo absoluto $= -8$ y lo alcanza en $x = -2$
$f(x)$ no está acotada inferiormente

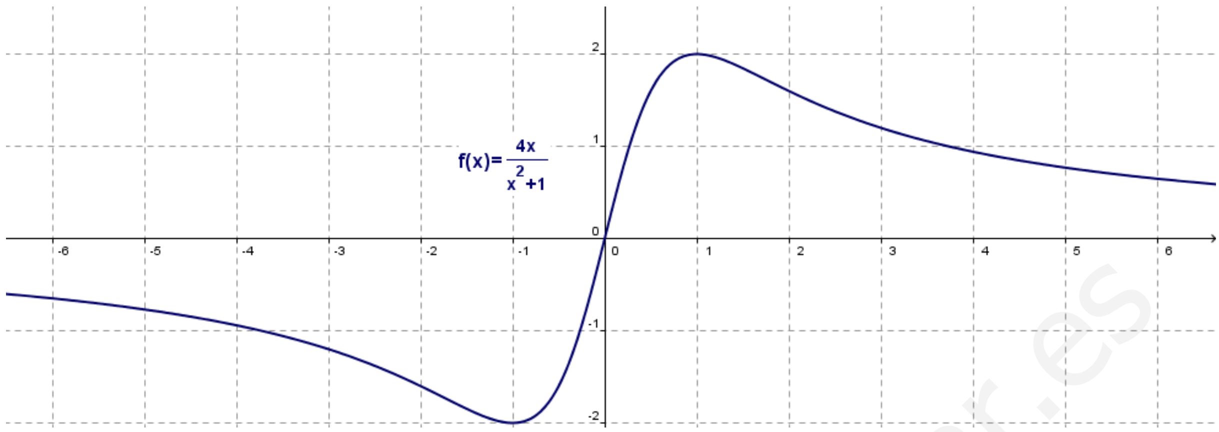


$f(x)$ está acotada inferiormente
Mínimo absoluto $= 0$ y lo alcanza en $x = 4$
$f(x)$ no está acotada superiormente



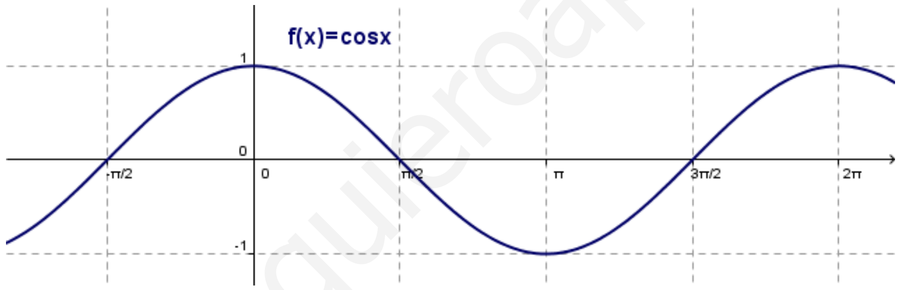
$f(x)$ no está acotada superiormente
$f(x)$ está acotada inferiormente.
Ínfimo = 0; no tiene mínimo absoluto

- **Una __función__ $f(x)$ está __acotada__ si lo está a la vez inferiormente y superiormente, es decir, $f(x)$ está acotada si existe un número real M tal que** $\forall\, x \in Dom(f)$ se tiene $f(x) \leq k\left|f(x)\right| \leq M$

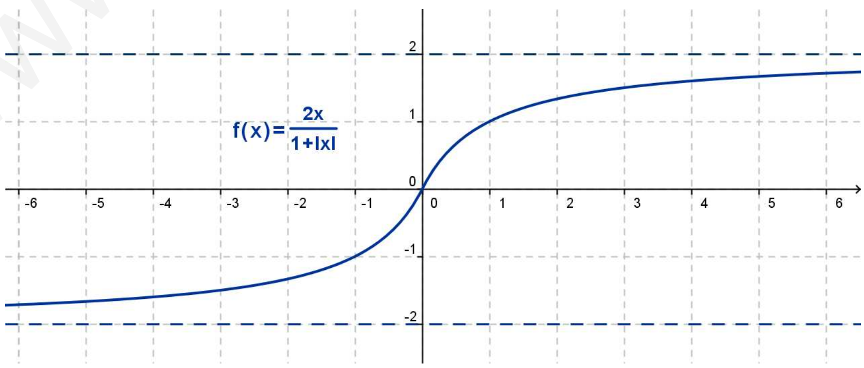


Mínimo absoluto $= -2$ y lo alcanza en $x = -1$

Máximo absoluto $= 2$ y lo alcanza en $x = 1$



Mínimo absoluto $= -1$ y máximo absoluto $= 1$



$f(x)$ está acotada (es decir está acotada superior e inferiormente)

Supremo $= 2$; no tiene máximo absoluto

Ínfimo $= -2$; no tiene mínimo absoluto