1. En el centro de un lago sale verticalmente hacia arriba un chorro de agua caliente (géiser) y queremos medir su altura. Para ello medimos el ángulo de elevación desde la orilla del lago a la parte más alta del géiser y se obtiene 43º. Luego, nos alejamos de la orilla 100 metros y volvemos a medir el ángulo de elevación, obteniendo ahora 35º. Realiza un dibujo de la situación expresada en el enunciado y calcula la altura del géiser. **(1 punto)**

2. Resuelve la ecuación trigonométrica: $\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x - 1) = 5\cos^2 x - 4$ **(1 punto)**

3. Dada la recta $r \equiv 4x + 3y - 6 = 0$.
   a) Hallar la ecuación general de la recta s paralela a r que pase por el punto $P(3,\ 4)$. **(1 punto)**
   b) Hallar la ecuación general de la recta t perpendicular a r que pase por el punto $P(2,\ 1)$. **(1 punto)**

4. Calcula el valor de a y b para que las rectas $r \equiv ax + 3y + 6 = 0$ y $s \equiv bx - 2y - 1 = 0$ sean perpendiculares y la recta r pase por el punto $A(3,\ 4)$. **(1 punto)**

5. Dada la función: $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ x & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

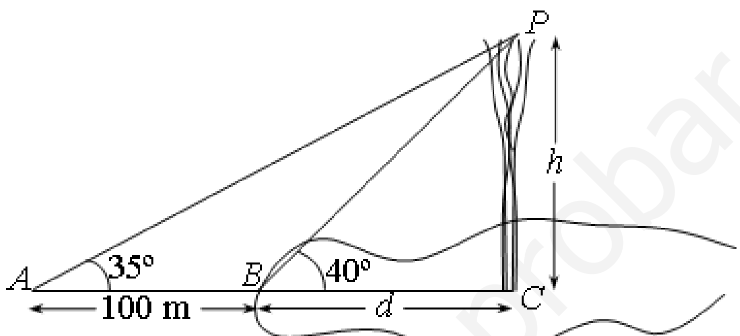
   Estudia razonadamente y, en su caso, explica el tipo de discontinuidad, en los puntos $x = 0$ y $x = 1$. Representa gráficamente la función. **(1 punto)**

6. Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica en lo posible el resultado:
   a) $y = \sqrt{x^2 - 3}$ **(0,5 puntos)**
   b) $y = \dfrac{e^x}{\cos x}$ **(0,5 puntos)**

7. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$, hallar:
   a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**
   b) Las asíntotas. **(0,5 puntos)**
   c) Los intervalos donde la función es estrictamente creciente y estrictamente decreciente, así como los máximos y mínimos relativos de la función. **(1 punto)**
   d) Representación gráfica indicando en esta representación los puntos máximos y mínimo obtenidos. **(1 punto)**

Soluciones

1. Sea C el punto del centro del lago del que fluye el géiser, P el punto más alto del mismo, B el punto de la orilla del lago desde el cual medimos el primer ángulo y A el punto desde el que medimos el segundo ángulo después de alejarnos 100 metros de la orilla. Observa en la figura que los triángulos APC y BPC son rectángulos en C. Por comodidad, llamaremos también h a la altura del géiser y d a la distancia desde el punto C del que fluye el géiser, hasta el punto B de la orilla del lago.



Entonces, por la definición de tangente en un triángulo rectángulo:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 43^{\circ} = \dfrac{h}{d} \\ \operatorname{tg} 35^{\circ} = \dfrac{h}{100+d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 0{,}93d \\ h = 0{,}7(100+d) \end{cases} \Rightarrow 0{,}93d = 70 + 0{,}7d \Rightarrow 0{,}23d = 70 \Rightarrow d = 304{,}35$$

Por tanto $h = 0{,}93d = 0{,}93 \cdot 304{,}35 = 283{,}05$, con lo que la altura del géiser será, aproximadamente, de 283,05 metros.

2. $\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x - 1) = 5\cos^2 x - 4 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 5(1 - \operatorname{sen}^2 x) - 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 5 - 5\operatorname{sen}^2 x - 4 \Leftrightarrow 6\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 6\cdot(-1)}}{2\cdot 6} = \frac{1\pm 5}{12} = \begin{cases} \operatorname{sen} x_1 = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen} x_2 = -\dfrac{4}{12} = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \begin{cases} 30^{\circ} + 360^{\circ}k \\ 150^{\circ} + 360^{\circ}k \end{cases} \\ x_2 = \begin{cases} 199{,}47^{\circ} + 360^{\circ}k \\ 340{,}53^{\circ} + 360^{\circ}k \end{cases} \end{cases}$$

3. a) Un vector director $\overrightarrow{u}$ de s es el mismo que uno de r, ya que ambas rectas son paralelas: $\overrightarrow{u} = (-B, A) = (-3, 4)$. Entonces la ecuación de la recta s es:

$$\frac{x-3}{-3} = \frac{y-4}{4} \Leftrightarrow 4x - 12 = -3y + 12 \Leftrightarrow 4x + 3y - 24 = 0$$

b) Un vector perpendicular a la recta r es $\overrightarrow{u} = (A, B) = (4, 3)$. Por tanto la ecuación de la recta t perpendicular a r que pasa por el punto $(2, 1)$ será:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} \Leftrightarrow 3x - 6 = 4y - 4 \Leftrightarrow 3x - 4y - 2 = 0$$

4. Los vectores directores de ambas rectas son, respectivamente, $\overrightarrow{u} = (-3, a)$ y $\overrightarrow{v} = (2, b)$. Como las rectas han de ser perpendiculares, entonces el producto escalar de ambos vectores debe ser cero, es decir: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow (-3, a) \cdot (2, b) = 0 \Leftrightarrow -6 + ab = 0$.
   Como el punto $A(3, 4)$ pertenece a la recta r se tiene que $a \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 6 = 0 \Rightarrow 3a + 18 = 0 \Rightarrow a = -6$.
   Sustituyendo en la igualdad anterior obtenemos el valor de b: $-6 + (-6)b = 0 \Rightarrow b = -1$.

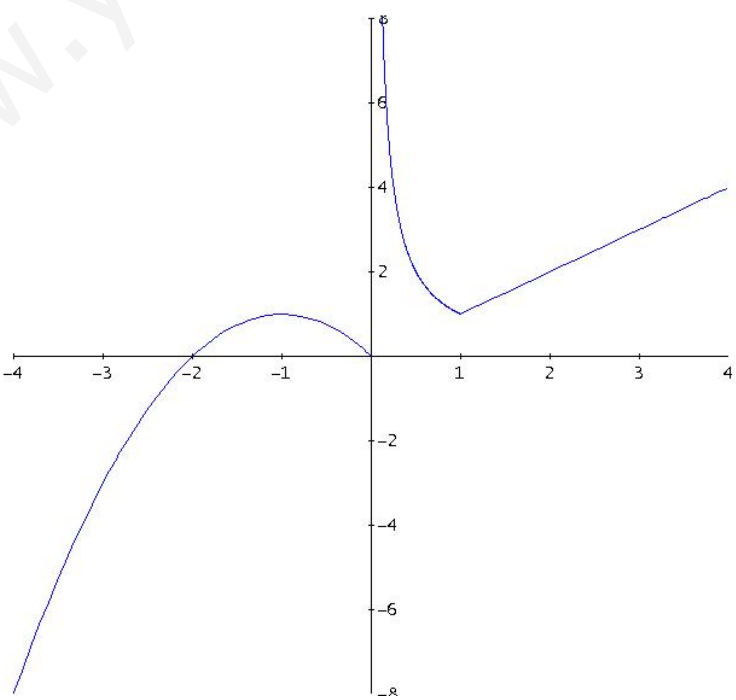
5. Estudiemos la continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x^2 - 2x) = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \end{cases}$$

   Como los límites laterales no coinciden, no existe el límite de la función en $x = 0$ y, por tanto, f no es continua en dicho punto. Además, como uno de ellos es infinito, en $x = 0$ hay una discontinuidad de salto infinito.
   Estudiemos ahora la continuidad en el punto $x = 1$:

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x} = 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

   Además, f(1)=1. Por tanto existe el límite de la función en el punto $x = 1$ y este valor coincide con la imagen de la función en dicho punto: $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1$. Esto quiere decir que f es continua en $x = 1$.
   Representación gráfica:



6. a) $y' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-3}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-3}}$

b) Derivamos utilizando la regla de derivación de un cociente:

$$y' = \frac{e^x \cdot \cos x + e^x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

7. a) El número que anula el denominador es $x = 1$. Por tanto se tiene que $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{1\}$.
Igualando $f(x)$ a 0 se obtienen los puntos de corte con el eje X. Para ello basta que el numerador sea cero: $x^2 - x + 1 = 0$. Ecuación que no tiene soluciones. Así pues la función f no corta al eje X.
El punto de corte con el eje Y se obtiene haciendo $x = 0$. Entonces $y = -1$, y el punto de corte con el eje Y es $(0, -1)$.

b) El número que anula el denominador ($x = 1$) es candidato a asíntotas vertical. Veamos si, efectivamente, lo es:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty = \begin{cases} -\infty \text{ si } x \to 1^- \\ +\infty \text{ si } x \to 1^+ \end{cases}$$

De lo anterior se deduce que $x = 1$ es una asíntota vertical.
Veamos si hay asíntotas horizontales.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad x \to +\infty \\ -\infty & \text{si} \quad x \to -\infty \end{cases}$$

Entonces f no tiene asíntotas horizontales, pero sí que tenemos una idea de lo que ocurre cuando x tiene a más o menos infinito.
Por último veamos las asíntotas oblicuas, que son de la forma $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-x+1}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} - x = \frac{1}{x - 1} = 0$$

Así pues $y = x$ es una asíntota oblicua.

c) La derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 1)1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - x^2 + x - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

Entonces:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 2 \text{ (posibles extremo relativos)}$$

Hagamos una tabla:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
f'	$+$	$-$	$-$	$+$
f	$\uparrow\uparrow$	$\downarrow\downarrow$	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$

De la tabla se desprende que f es estrictamente creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(0,\ 1) \cup (1,\ 2)$. Además f alcanza un máximo relativo en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = 2$. Las coordenadas de éstos son, respectivamente $(0,\ -1)$ y $(2,\ 3)$. Para saber la coordenada y basta sustituir la coordenada x en la función inicial (obsérvese que el máximo coincide con el punto de corte con el eje Y).

d) La representación gráfica queda como sigue: