1. Se desea unir entre sí tres puntos, A, B y C, mediante caminos rectos. La distancia de A a B es de 100 m, el ángulo correspondiente a B es de 50^{o}, y el de A es de 75^{o}. ¿Cuál es la distancia entre B y C? ¿Y entre A y C? Calcular, además, el área del triángulo definido por A, B y C

2. Dado un ángulo α perteneciente al cuarto cuadrante, tal que $\operatorname{cotg}\alpha = -\dfrac{1}{2}$, hallar:

   a) $\cos 2\alpha$ mediante identidades trigonométricas (resultados racionalizados; no vale utilizar decimales).

   b) $\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}$

   c) $\operatorname{tg}\left(\alpha + 60^{o}\right)$

   d) $\cos\left(\alpha - 2310^{o}\right)$

3. Dados $\vec{u} = (-4,\ 3)$ y $\vec{v} = (3,\ m)$, se pide:

   a) Hallar m para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.

   b) Hallar un vector perpendicular a $\vec{u}$ y de módulo 3.

   c) Hallar el ángulo que forma $\vec{u}$ con $\vec{w} = (1,\ -7)$

4. Dadas las rectas $r \equiv 2x - 3y + 5 = 0$ y $s \equiv y = 2x - 1$

   a) Hallar la ecuación de la recta r' paralela a r que pasa por $P(-3,\ 2)$, en todas las formas conocidas.

   b) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a s que pasa por P, en forma general.

   c) Hallar el ángulo que forman r y s.

   d) Hallar la distancia entre r y r'.

5. Dada $f(x) = \begin{cases} x + 10 & \text{si} \quad \le -4 \\ x^2 + 2x & \text{si} \quad -4 < x \le 1 \\ 3/ & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$, se pide:

   a) Gráfica.

   b) $\operatorname{Dom}(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$.

   c) Intervalos de crecimiento. Máximos y mínimos.

   d) Estudiar analíticamente su continuidad.

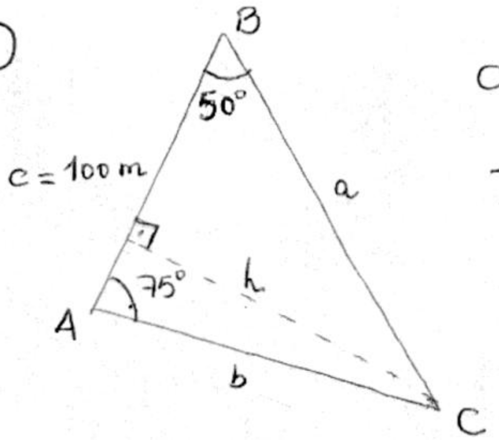
6. **a)** Hallar $\log_2 \dfrac{1}{8} - \log_3 \dfrac{\sqrt{\ }}{\ } \quad \log_5 125$; **b)** Resolver: $2^{x^2+1} - 7 \cdot 2 \quad + 3 = 0$

7. Resolver: **a)** $\dfrac{2 \quad +5}{x+1} - \dfrac{x \quad 1}{\ } \quad 1$; **b)** $\sqrt{2x + 13} - x = 5$; **c)** $\cos 2x + \operatorname{sen} x = 1$

8. **a)** Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x \quad + 3x - 1}{x^3 - x \quad - x + 1}$; **b)** Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 3x \quad + 3x - 1}{x^3 - x \quad - x + 1}$; **c)** Aplicando la definición de derivada (es decir, mediante un límite), hallar la derivada de $f(x) = x^2 + 1$ en $x = 2$.

Nota: *todas las preguntas puntúan igual*

(1)



$$C = 180 - 50 - 75 = 55^\circ$$

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } 75} = \frac{100}{\text{sen} 55}$$

$$\Rightarrow a = \text{sen } 75 \, \frac{100}{\text{sen } 55} \Rightarrow \underline{\underline{a \cong 117'92 \text{ m}}}$$

$$\frac{b}{\text{sen} B} = \frac{c}{\text{sen} C} \Rightarrow \frac{b}{\text{sen} 50} = \frac{100}{\text{sen} 55}$$

$$\Rightarrow b = \text{sen } 50 \, \frac{100}{\text{sen } 55} \Rightarrow \underline{\underline{b \cong 93'52 \text{ m}}}$$

Área : $\text{sen } 50 = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \text{ sen } 50 \Rightarrow h = 117'92 \cdot \text{sen} 50$

$\Rightarrow h = 90'33.$ Área $= \frac{\text{base x altura}}{2} = \frac{100 \cdot 90'33}{2} \cong \underline{\underline{4516'6 \text{ m}^2}}$

(2) $\text{cotg}\,\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2}\text{sen}\alpha$

Como $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\text{sen}\alpha\right)^2 + \text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow$

$\frac{1}{4}\text{sen}^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{5}{4}\text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\text{sen}\,\alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}}$. Entonces $\cos\alpha = -\frac{1}{2}\left(\frac{-2\sqrt{5}}{5}\right) \Rightarrow$

$\underline{\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}}$. Además $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{-2\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{5}/5} = \underline{-2}$

a) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{5}{25} - \frac{20}{25} =$

$= \frac{-15}{25} = \underline{\underline{\frac{-3}{4}}}$

b) $\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{5}}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{5-\sqrt{5}}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$

$= \underline{\underline{\frac{\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{10}}}$

c) $\text{tg}(\alpha + 60) = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg} 60}{1 - \text{tg}\alpha \, \text{tg} 60} = \frac{-2+\sqrt{3}}{1-(-2)\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-2}{1+2\sqrt{3}} =$

$\frac{(\sqrt{3}-2)(1-2\sqrt{3})}{(1+2\sqrt{3})(1-2\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3} - 6 - 2 + 4\sqrt{3}}{1-12} = \frac{5\sqrt{3}-8}{-11} = \underline{\underline{\frac{8-5\sqrt{3}}{11}}}$

d) $\cos(\alpha - 2310) = \cos\alpha \cos 2310 + \text{sen}\alpha \, \text{sen } 2310 =$

$= \cos\alpha \cos 150 + \text{sen}\alpha \, \text{sen} 150 = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{-2\sqrt{5}}{5}\right)\frac{1}{2} =$

$= -\frac{\sqrt{15}}{10} - \frac{2\sqrt{5}}{10} = \underline{\underline{\frac{-\sqrt{15} - 2\sqrt{5}}{10}}}$

(3) a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (-4,3)\cdot(3,m) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -12 + 3m = 0 \Rightarrow 3m = 12 \Rightarrow \underline{\underline{m = 4}}$

b) Llamemos al vector (x,y). Entonces, como $\vec{u} \perp (x,y)$

$\Rightarrow -4x + 3y = 0$. Además como $|(x,y)| = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 3 \Rightarrow x^2+y^2 = 9$

Resolviendo el sistema $\left.\begin{matrix} -4x+3y=0 \\ x^2+y^2=9 \end{matrix}\right\}$ se obtiene

$x = \pm \frac{9}{5}$ $y = \pm \frac{12}{5}$. El vector buscado es pues

$\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ o bien $\left(-\frac{9}{5}, -\frac{12}{5}\right)$

c) $\vec{u} = (-4,3)$; $\vec{w} = (1,-7)$. Llamemos α al ángulo. Entonces:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{w}|} = \frac{-4\cdot 1 + 3(-7)}{\sqrt{16+9}\sqrt{1+49}} = \frac{-4-21}{5\cdot\sqrt{50}} = \frac{-25}{5\sqrt{50}} =$$

$$= \frac{-5}{\sqrt{50}} = \frac{-5\sqrt{50}}{50} = \frac{-\sqrt{50}}{10} \simeq -0'707 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 135^\circ}}$$

(4) a) Vector director de r : $\vec{u} = (3,2)$

Vectorial : $(x,y) = (-3,2) + \lambda(3,2)$

Paramétrica : $\left.\begin{matrix} x = -3 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{matrix}\right\}$

Continua : $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{2}$

General : $2x + 6 = 3y - 6 \Rightarrow \underline{2x - 3y + 12 = 0}$

Afín : $3y = 2x + 12 \Rightarrow \underline{y = \frac{2}{3}x + 4}$

b) Vector perpendicular a s : $2x - y - 1 = 0$

$\vec{v} = (2,-1)$. Recta perpendicular a s que pasa por P:

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-1} \Rightarrow -x-3 = 2y-4 \Rightarrow \underline{\underline{x + 2y - 1 = 0}}$$

c) El ángulo coincide con el ángulo de sus vectores directores $\vec{u} = (3,2)$ y $\vec{w} = (1,2)$

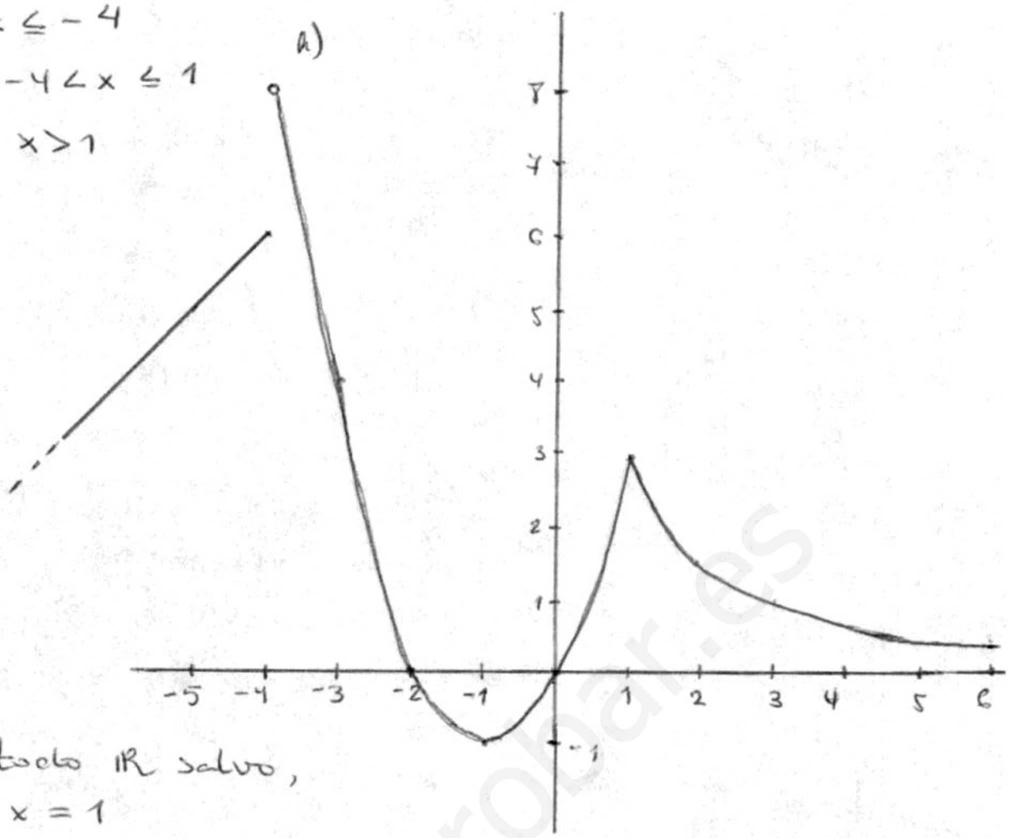
$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{w}|} = \frac{3+4}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{65}} \simeq 0'868 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 29'74^\circ}}$$

d) r y r' no son paralelas. Por tanto se cortan y así $\underline{\underline{\text{dist}(r,r') = 0}}$

(5)

$$f(x) = \begin{cases} x+10 & \text{si } x \leq -4 \\ x^2+2x & \text{si } -4 < x \leq 1 \\ \dfrac{3}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a)



b) $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

$\text{Im} f = [-1, 8)$

c) Creciente en

$(-\infty, -4) \cup (-1, 1)$

Decreciente en

$(-4, -1) \cup (1, +\infty)$

Mínimo en $(-1, -1)$

Máximo en $(1, 3)$

d) f es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo, quizás en $x = -4$ y $x = 1$

$\underline{\underline{x=-4}}$ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -4^-} (x+10) = 6 \\ \lim\limits_{x\to -4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -4^+} (x^2+2x) = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to -4} f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ no es continua en $x = -4$ (discontinuidad de salto finito de longitud $L = 2$)

$\underline{\underline{x=1}}$ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2+2x) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3}{x} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3 = f(1)$

$\Rightarrow f$ es continua en $x = 1$.

(6) a) $\log_2 \frac{1}{8} - \log_3 \frac{\sqrt{3}}{3} + \log_5 125 = \log_2 2^{-3} - \log_3 3^{-1/2} + \log_5 5^3 =$

$= -3 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

b) $2^{x^2+1} - 7\cdot 2^x + 3 = 0 \Rightarrow 2\cdot(2^x)^2 - 7\cdot 2^x + 3 = 0 \Rightarrow (2^x = y)$

$2y^2 - 7y + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 1/2 \\ y = 3 \end{cases}$. Si $y = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{2} = 2^{-1}$

$\Rightarrow \underline{\underline{x = -1}}$. Si $y = 3 \Rightarrow 2^x = 3 \Rightarrow \underline{\underline{x = \log_2 3}}$

7) a) $\frac{2x+5}{x+1} - \frac{x+1}{x-3} = 1 \Rightarrow (2x+5)(x-3) - (x+1)(x+1) =$

$= (x+1)(x-3) \Rightarrow 2x^2 - x - 15 - x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2x - 3$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 16 = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow -x = 13 \Rightarrow \underline{\underline{x = -13}}$

b) $\sqrt{2x+13} - x = 5 \Rightarrow \sqrt{2x+13} = x+5 \Rightarrow 2x + 13 = x^2 + 10x + 25$

$\Rightarrow x^2 + 8x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -6 \end{cases}$

c) $\cos 2x + \operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow -2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x(-2\operatorname{sen} x + 1) = 0 \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0 + 180k \\ \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \begin{cases} 30 + 360k \\ 150 + 360k \end{cases} \end{cases}$

8) a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^3}{(x+1)(x-1)^2} =$

$= \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = \underline{\underline{0}}$

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = 1$

c) $f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 1 - 5}{x-2} =$

$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \to 2} (x+2) = \underline{\underline{4}}$