Examen de Matemáticas I – 1º de Bachillerato

1. Opera y simplifica **(1 punto; 0,5 puntos por apartado)**:

a) $\dfrac{\left(2x^{-1}y^{2}\right)^{-3}\left(x^{-2}\right)^{-5}\left(3y^{-2}\right)^{2}}{\left(3x^{3}\right)^{3}\left(xy^{-2}\right)\left(2x^{-2}y\right)^{-2}}=$

b) $\left[\left(a^{2}\right)^{-3}\left(\dfrac{1}{a^{-1}}\right)^{4}\right]^{-2}\left(\dfrac{1}{a}\right)^{4}=$

2. Efectúa las siguientes operaciones con radicales y simplifica el resultado **(1 punto; 0,5 puntos por apartado)**:

a) $\dfrac{\sqrt[4]{xy}\,\sqrt[3]{x^{2}y}}{\sqrt[6]{x^{5}y^{3}}}=$

b) $5\sqrt{27}-2\sqrt{12}-2\sqrt{243}+3\sqrt{75}=$

3. Racionaliza las siguientes expresiones y simplifica el resultado **(1 punto; 0,5 puntos por apartado)**:

a) $\dfrac{4}{\sqrt[5]{16}} =$

b) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} =$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones: **(2 puntos, 1 por apartado)**

a) $\dfrac{2x+1}{x-3} - \dfrac{x+2}{x^2-x-6} = \dfrac{10x+8}{x+2}$

b) $2\sqrt{x} - 9 = \sqrt{2x+7} - 8$

5. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones: **(2 puntos; 1 por apartado)**

a) $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{x}}{2}+y=\dfrac{x}{4}+1 \\ \dfrac{x+1}{y}=5 \end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} x^2-y^2=x-3 \\ 2x^2+3y^2=35 \end{array}\right\}$$

6. Resuelve la siguiente inecuación: **(1,5 puntos)**:

$$\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-9}\geq 0$$

7. Una señora paga por una figura de cerámica y una lámpara 1000 euros. Si le hubieran hecho un descuento del 25% en la figura y del 30% en la lámpara se hubiera ahorrado 285 euros. ¿Cuánto pagó por cada objeto?. **(1,5 puntos)**

8. Desarrolla: **(0,5 puntos)**

$$\left(\frac{-1}{x^2}+2\sqrt{x}\right)^5=$$

9. Escribe el término de grado 8 en el desarrollo de $\left(x^3-\frac{2}{x^2}\right)^6$. **(0,5 puntos)**

I.E.S. "Fernando de Mena" *Departamento de Matemáticas*

Examen de Matemáticas I **4 de diciembre de 2007**
Final de la 1ª Evaluación **Curso: 1º de Bachillerato A**

Apellidos:	**Calificación:**
Nombre:	

1. Opera y simplifica **(1 punto; 0,5 puntos por apartado)**:

a) $$\frac{(2x^{-1}y^2)^{-3}(x^{-2})^{-5}(3y^{-2})^2}{(3x^3)^3(xy^{-2})(2x^{-2}y)^{-2}} = \frac{2^{-3}x^3y^{-6}x^{10}3^2y^{-4}}{3^3x^9xy^{-2}2^{-2}x^4y^{-2}} =$$
$$= \frac{2^{-3}\cdot 3^2\cdot x^{13}\cdot y^{-10}}{2^{-2}\cdot 3^3\cdot x^{14}\cdot y^{-4}} = 2^{-1}\cdot 3^{-1}\cdot x^{-1}y^{-6} = \frac{1}{2\cdot 3xy^6} = \frac{1}{6xy^6}$$

b) $$\left[(a^2)^{-3}\left(\frac{1}{a^{-1}}\right)^4\right]^{-2}\left(\frac{1}{a}\right)^4 = \left(a^{-6}\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{a^4} = \left(\frac{a^{-6}}{a^{-4}}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{a^4} =$$
$$= \frac{a^{12}}{a^8}\cdot\frac{1}{a^4} = \frac{a^{12}}{a^{12}} = 1$$

2. Efectúa las siguientes operaciones con radicales y simplifica el resultado **(1 punto; 0,5 puntos por apartado)**:

a) $$\frac{\sqrt[4]{xy}\sqrt[3]{x^2y}}{\sqrt[6]{x^5y^3}} = \frac{\sqrt[12]{x^3y^3}\,\sqrt[12]{x^8y^4}}{\sqrt[12]{x^{10}y^6}} = \sqrt[12]{\frac{x^{11}\cdot y^7}{x^{10}y^6}} =$$
$$= \sqrt[12]{xy}$$

b) $$5\sqrt{27}-2\sqrt{12}-2\sqrt{243}+3\sqrt{75} = 5\sqrt{3^3}-2\sqrt{2^2\cdot 3}-2\sqrt{3^5}+3\sqrt{5^2\cdot 3} =$$
$$= 5\cdot 3\sqrt{3}-2\cdot 2\sqrt{3}-2\cdot 3^2\sqrt{3}+3\cdot 5\sqrt{3} =$$
$$= 15\sqrt{3}-4\sqrt{3}-18\sqrt{3}+15\sqrt{3} =$$
$$= (15-4-18+15)\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

I.E.S. "Fernando de Mena" Departamento de Matemáticas

3. Racionaliza las siguientes expresiones y simplifica el resultado **(1 punto; 0,5 puntos por apartado)**:

a) $\dfrac{4}{\sqrt[5]{16}}=\dfrac{4}{\sqrt[5]{2^4}}=\dfrac{4\cdot\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{2^4}\cdot\sqrt[5]{2}}=\dfrac{4\cdot\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{2^5}}=$

$=\dfrac{4\sqrt[5]{2}}{2}=\underline{\underline{2\sqrt[5]{2}}}$

b) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}=\dfrac{7+\sqrt{35}+\sqrt{35}+5}{\sqrt{7}^2-\sqrt{5}^2}=$

$=\dfrac{12+2\sqrt{35}}{7-5}=\dfrac{12+2\sqrt{35}}{2}=\underline{\underline{6+\sqrt{35}}}$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones: **(2 puntos, 1 por apartado)**

a) $\dfrac{2x+1}{x-3}-\dfrac{x+2}{x^2-x-6}=\dfrac{10x+8}{x+2}$. Como $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$, el MCM de los denominadores es $(x-3)(x+2)$. Multipliquemos pues por $(x-3)(x+2)$ todos los términos de la ecuación:

$(2x+1)(x+2)-(x+2)=(10x+8)(x-3)$;

$2x^2+5x+2-x-2=10x^2-22x-24$; $-8x^2+26x+24=0$.

Dividiendo todos los términos entre -2: $4x^2-13x-12=0$;

$x=\dfrac{13\pm\sqrt{(-13)^2-4\cdot4\cdot(-12)}}{2\cdot4}=\dfrac{13\pm\sqrt{169+192}}{8}=\dfrac{13\pm\sqrt{361}}{2}=$

$=\dfrac{13\pm19}{8}=\begin{cases}x_1=\dfrac{32}{8};\ \underline{\underline{x_1=4}}\\[2mm] x_2=\dfrac{-6}{8};\ \underline{\underline{x_2=-\dfrac{3}{4}}}\end{cases}$

b) $2\sqrt{x}-9=\sqrt{2x+7}-8$

$2\sqrt{x}-\sqrt{2x+7}=1$; $(2\sqrt{x}-\sqrt{2x+7})^2=1^2$;

$4x+2x+7-4\sqrt{2x^2+7x}=1$; $6x+6=4\sqrt{2x^2+7x}$;

$(6x+6)^2=(4\sqrt{2x^2+7x})^2$; $36x^2+36+72x=32x^2+112x$;

$4x^2-40x+36=0$; $x^2-10x+9=0$;

$x=\dfrac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot9}}{2}=\dfrac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=$

$=\dfrac{10\pm\sqrt{64}}{2}=\dfrac{10\pm8}{2}=\begin{cases}\underline{\underline{x_1=9}}\\ \underline{\underline{x_2=1}}\end{cases}$

5. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones: **(2 puntos; 1 por apartado)**

a) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{x}}{2}+y=\dfrac{x}{4}+1\\ \dfrac{x+1}{y}=5\end{array}\right\}$ De la segunda ecuación $x+1=5y$; $\underline{x=5y-1}$. Sustituyendo en la primera:

$\dfrac{\sqrt{5y-1}}{2}+y=\dfrac{5y-1}{4}+1$; $2\sqrt{5y-1}+4y=5y-1+4$;

$2\sqrt{5y-1}=y+3$; $4(5y-1)=y^2+9+6y$;

$20y-4=y^2+9+6y$; $y^2-14y+13=0$;

$$y=\frac{14\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot1\cdot13}}{2}=\frac{14\pm\sqrt{196-52}}{2}=$$

$$=\frac{14\pm\sqrt{144}}{2}=\frac{14\pm12}{2}=\begin{cases}y_1=13\\ y_2=1\end{cases}$$

* Si $\underline{\underline{y_1=13}}$; $x_1=5\cdot13-1$; $\underline{\underline{x_1=64}}$

* Si $\underline{\underline{y_2=1}}$; $x_2=5\cdot1-1$; $\underline{\underline{x_2=4}}$

b) $\left.\begin{array}{l}x^2-y^2=x-3\\ 2x^2+3y^2=35\end{array}\right\}$ Multiplicando la 1ª ecuación por 3:

$\left.\begin{array}{l}3x^2-3y^2=3x-9\\ 2x^2+3y^2=35\end{array}\right\}$. Sumando ambas:

$5x^2=3x+26$; $5x^2-3x-26=0$;

$$x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot5(-26)}}{2\cdot5}=\frac{3\pm\sqrt{9+520}}{10}=$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{529}}{10}=\frac{3\pm23}{10}=\begin{cases}x_1=\dfrac{26}{10};\ \underline{\underline{x_1=\dfrac{13}{5}}}\\ x_2=\dfrac{-20}{10};\ \underline{\underline{x_2=-2}}\end{cases}$$

* Si $x_1=\dfrac{13}{5}$; $\left(\dfrac{13}{5}\right)^2-y^2=\dfrac{13}{5}-3$; $\dfrac{169}{25}-y^2=\dfrac{13}{5}-3$;

$169-25y^2=65-75$; $25y^2=179$; $y^2=\dfrac{179}{25}$;

$\underline{\underline{y_1=\dfrac{\sqrt{179}}{5}}}$

* Si $x_2=-2$; $(-2)^2-y^2=-2-3$; $4-y^2=-5$; $y^2=9$; $\underline{\underline{y_2=3}}$

6. Resuelve la siguiente inecuación: **(1,5 puntos):**

$\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-9}\geq 0$ $\quad x^3+2x^2-x-2=(x+1)(x-1)(x+2)$;

$x^2-9=(x+3)(x-3)$. La inecuación es por tanto equivalente a esta otra: $\dfrac{(x+1)(x-1)(x+2)}{(x+3)(x-3)}\geq 0$.

Las raíces son: -1, 1, -2, 3 y -3. Colocándolas ordenadamente y estudiando el signo obtendremos la solución

$(-\infty,-3)$	$(-3,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Puntos: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3

Solución: $\underline{\underline{(-3,-2]\cup[-1,1]\cup(3,+\infty)}}$

7. Una señora paga por una figura de cerámica y una lámpara 1000 euros. Si le hubieran hecho un descuento del 25% en la figura y del 30% en la lámpara se hubiera ahorrado 285 euros. ¿Cuánto pagó por cada objeto?. **(1,5 puntos)**

Figura de cerámica: x euros

Lámpara: y euros

$$(*)\ \left.\begin{array}{l} x+y=1000 \\ 0'75x+0'7y=1000-285 \end{array}\right\};\quad \left.\begin{array}{r} x+y=1000 \\ 0'75x+0'7y=715 \end{array}\right\};$$

Multiplicando la 1ª ecuación por $-0'7$ (reducción):

$$\left.\begin{array}{r} -0'7x-0'7y=-700 \\ 0'75x+0'7y=715 \end{array}\right\}+$$

$$0'05x=15 \Rightarrow x=\frac{15}{0'05};\quad \underline{\underline{x=300}}$$

Sustituyendo en $(*)$ $x+y=1000 \Rightarrow 300+y=1000$; $\underline{\underline{y=700}}$

Conclusión: por la figura de cerámica pagó 300 euros y por la lámpara pagó 700 euros.

8. Desarrolla: **(0,5 puntos)**

$$\left(\frac{-1}{x^2}+2\sqrt{x}\right)^5 = \binom{5}{0}\left(\frac{-1}{x^2}\right)^0(2\sqrt{x})^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{-1}{x^2}\right)^1(2\sqrt{x})^4 + \binom{5}{2}\left(\frac{-1}{x^2}\right)^2(2\sqrt{x})^3 +$$

$$+ \binom{5}{3}\left(\frac{-1}{x^2}\right)^3(2\sqrt{x})^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{-1}{x^2}\right)^4(2\sqrt{x})^1 + \binom{5}{5}\left(\frac{-1}{x^2}\right)^5(2\sqrt{x})^0 =$$

$$= 2^5\sqrt{x}^5 + 5\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)2^4\cdot\sqrt{x}^4 + 10\,\frac{1}{x^4}\,2^3\sqrt{x}^3 + 10\left(\frac{-1}{x^6}\right)2^2\cdot\sqrt{x}^2 +$$

$$+ 5\cdot\frac{1}{x^8}\,2\sqrt{x} + \left(\frac{-1}{x^{10}}\right) = 32x^2\sqrt{x} - 80\frac{1}{x^2}\cdot x^2 +$$

$$+ 80\,\frac{1}{x^4}\,x\sqrt{x} - 40\,\frac{1}{x^6}\cdot x + 10\,\frac{1}{x^8}\sqrt{x} - \frac{1}{x^{10}} =$$

$$= 32x^2\sqrt{x} - 80 + \frac{80\sqrt{x}}{x^3} - \frac{40}{x^5} + \frac{10\sqrt{x}}{x^8} - \frac{1}{x^{10}}$$

9. Escribe el término de grado 8 en el desarrollo de $\left(x^3-\frac{2}{x^2}\right)^6$. **(0,5 puntos)**

El término de grado r es $\binom{6}{r}(x^3)^r\left(-\frac{2}{x^2}\right)^{6-r} =$

$$= \binom{6}{r}x^{3r}\frac{(-2)^{6-r}}{x^{12-2r}} = \binom{6}{r}(-2)^{6-r}x^{3r-12+2r} =$$

$$= \binom{6}{r}(-2)^{6-r}x^{5r-12}.$$ Para que el término sea de grado 8 debe ser $5r-12=8 \Rightarrow \underline{\underline{r=4}}$

Así pues el término de grado 8 será:

$$\binom{6}{4}(-2)^{6-4}\cdot x^{5\cdot 4-12} = 15\cdot(-2)^2\cdot x^8 = \underline{\underline{60x^8}}$$