1. Dada la recta $r \equiv 2x + 4y = 5$, halla la ecuación de la recta s, perpendicular a r que pasa por el punto $P(1, -2)$. ¿Qué ángulo forma la recta s con la recta $t \equiv y = x + 5$? **(2 puntos)**

2. Calcula la mediatriz del segmento de extremos $A(-2, 3)$ y $B(4, 1)$. **(2 puntos)**

   Nota: *la mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al mismo que pasa por su punto medio.*

3. Resuelve la siguiente ecuación logarítmica: $2\log(2x-2) - \log(x-1) = 1$ **(1 punto)**

4. Calcula los siguientes límites **(1 punto; 0,5 puntos por apartado)**:

   a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 - x - 3}{x^3 + 4x^2 - 7x - 10}$; **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^4 + 3x^3 - 2x + 1}{x - 7x^3 - 5x^4 - 2x^2 + 2}$

5. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x-4} & \text{si} \quad x < -2 \\ 3 & \text{si} \quad x = -2 \\ x^2 - 5 & \text{si} \quad -2 < x < 4 \\ \dfrac{4}{x} + 1 & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$ en los puntos $x = -2$ y $x = 4$.

   Caso de que no sea continua en alguno de ellos explica el tipo de discontinuidad. **(1 punto)**

6. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 2x}$, contesta a los siguientes apartados:

   a) Halla los puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**
   b) Halla las asíntotas verticales y horizontales. **(1 punto)**
   c) Realiza una representación gráfica aproximada de la función. **(0,5 puntos)**

7. Calcula la derivada de la función $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 3}{x - 2}$ en el punto $x = 1$, así como la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. **(1 punto)**

① Vector director de r : $\vec{u} = (-4, 2)$. Vector perpendicular a $\vec{u}$: $\vec{v} = (2, 4)$. Recta que pasa por $P(1, -2)$ y tiene como vector director $\vec{v}$ (por tanto perpendicular a r):

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} \Rightarrow 4x - 4 = 2y + 4 \Rightarrow 2y = 4x - 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{s \equiv y = 2x - 4}}$. La pendiente de la recta t es $m_1 = 1$ y la de s es $m_2 = 2$. Entonces $tg\,\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| =$

$= \left|\frac{1-2}{1+1\cdot 2}\right| = \left|\frac{-1}{3}\right| = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 18'435^\circ}}$.

② $\vec{AB} = (6, -2)$. Vector perpendicular : $\vec{v} = (2, 6)$.

Punto medio de A y B : $M = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (1, 2)$.

Mediatriz : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{6} \Rightarrow 6x - 6 = 2y - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x - 2y - 2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{3x - y - 1 = 0}}$.

③ $2\log(2x-2) - \log(x-1) = 1 \Rightarrow \log(2x-2)^2 - \log(x-1) = 1$

$\Rightarrow \log\frac{(2x-2)^2}{x-1} = 1 \Rightarrow \frac{(2x-2)^2}{x-1} = 10 \Rightarrow 4x^2 + 4 - 8x = 10x - 10$

$\Rightarrow 4x^2 - 18x + 14 = 0$. Resolviendo la ecuación : $x_1 = \frac{7}{2}$

$\Rightarrow x_2 = 1$. La segunda solución hay que descartarla pues el logaritmo de cero no existe.

④ $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + 4x^2 - 7x - 10} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+1)(2x-3)}{(x+1)(x^2+3x-10)} =$

$= \lim\limits_{x\to -1} \frac{2x-3}{x^2+3x-10} = \frac{-5}{-12} = \underline{\underline{\frac{5}{12}}}$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x^4 + 3x^3 - 2x + 1}{x - 7x^3 - 5x^4 - 2x^2 + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \underline{\underline{\frac{-2}{5}}}$ (cuando los grados son iguales se dividen los coeficientes líderes).

⑤ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} \frac{6}{x-4} = -1 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} (x^2 - 5) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -2} f(x) = -1 \neq f(-2) = 3 \Rightarrow$

<u>f no es continua</u>. <u>Discontinuidad evitable en $x = -2$</u>.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} (x^2 - 5) = 11 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \left(\frac{4}{x} + 1\right) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 4} f(x) \Rightarrow$

<u>f no es continua en $x = 4$</u>. <u>Discontinuidad de salto finito</u>.

Longitud del salto : $L = |11 - 2| = \underline{\underline{9}}$.

⑥ a) Eje X : $y = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$: $\underline{\underline{(1,0)}}$

Eje Y : $x = 0 \Rightarrow y = \frac{-1}{0}$ (que no existe) $\Rightarrow$ la gráfica de f no corta al eje Y.

b) $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 ;\ x_2 = 2$

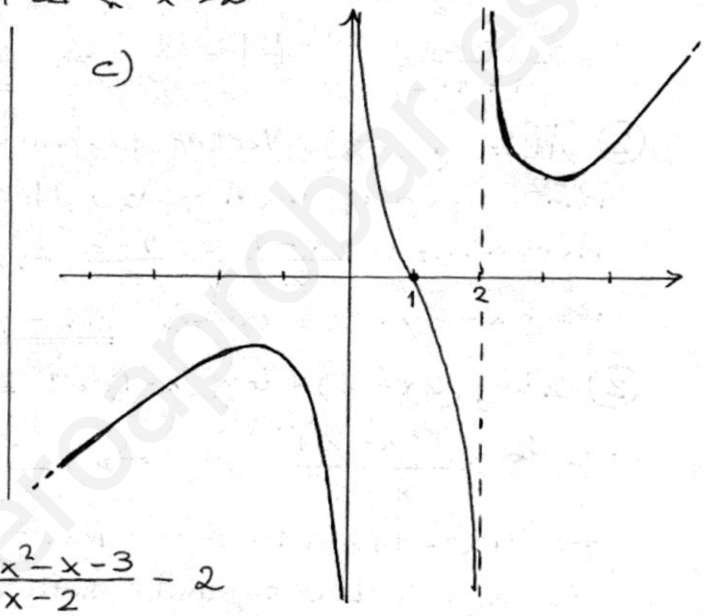
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x} = \frac{-1}{0} = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \to 0^- \\ +\infty & \text{si } x \to 0^+ \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{x = 0}} \text{ es asíntota vert.}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x} = \frac{7}{0} = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \to 2^- \\ +\infty & \text{si } x \to 2^+ \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{x = 2}} \text{ es asíntota vert.}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x} = \infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \to +\infty \\ -\infty & \text{si } x \to -\infty \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ no tiene asíntotas horizontales.

c)



⑦
$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{2x^2 - x - 3}{x - 2} - 2}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\frac{2x^2 - x - 3 - 2x + 4}{x - 2}}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{(x-1)(x-2)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{2x - 1}{x - 2} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{\underline{f'(1) = -1}}$

Recta tangente a la gráfica de f en $x = 1$:

$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 2 = -1(x - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow y - 2 = -x + 1 \Rightarrow \underline{\underline{y = -x + 3}}$