

**Examen de Matemáticas I – 1º de Bachillerato**

1. Halla la recta  $s$  perpendicular a la recta  $r \equiv x - 2y + 4 = 0$ , y que además pasa por el punto  $P(1, 2)$ . ¿En qué punto se cortan ambas rectas (pie de la perpendicular)? **(2 puntos)**
2. Dadas las rectas  $r \equiv 2x - 5y - 17 = 0$  y  $s \equiv 3x - ky - 8 = 0$ , calcula el valor de  $k$  para que  $r$  y  $s$  se corten formando un ángulo de  $60^\circ$ . **(2 puntos)**
3. Resuelve la siguiente ecuación logarítmica:  $\log(x^2 + 1) - \log(x^2 - 1) = \log \frac{13}{12}$  **(1 punto)**

4. Calcula los siguientes límites **(1 punto; 0,5 puntos por apartado)**:

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 2x - 8}{2x^3 - 4x^2 - 10x + 12}$  ;      b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + 3x^5 - 2x^6 + 1}{3x^2 - 5x^5 - 5x^4 - 2x^2 + 2}$

5. Estudia la continuidad de la función  $f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \\ \frac{8}{x} - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$  en los puntos  $x = -1$  y  $x = 2$ .

Caso de que no sea continua en alguno de ellos explica el tipo de discontinuidad. **(1 punto)**

6. Dada la función  $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$ , contesta a los siguientes apartados:

- a) Halla los puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**
- b) Halla las asíntotas verticales y horizontales. **(1 punto)**
- c) Realiza una representación gráfica aproximada de la función. **(0,5 puntos)**

7. Calcula la derivada de la función  $f(x) = \frac{3x^2 - 6x - 3}{x - 3}$  en el punto  $x = 2$ , así como la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. **(1 punto)**

① Vector director de  $r$ :  $\vec{u} = (2, 1)$ ; vector perpendicular a  $\vec{u}$ :  
 $\vec{v} = (-1, 2)$ . Recta  $s$ :  $S \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} \Rightarrow 2x-2 = -y-2$   
 $\Rightarrow \underline{2x+y=0}$

Punto de corte:  $\left. \begin{array}{l} x-2y+4=0 \\ 2x+y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x-2y+4=0 \\ 4x+2y=0 \end{array} \right\}$   
 $\frac{5x+4=0}{5} \Rightarrow \underline{x = -\frac{4}{5}}$   
 $2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + y = 0 \Rightarrow \underline{y = \frac{8}{5}}$

por tanto el punto de corte de  $r$  y  $s$  es:  $\left(\underline{-\frac{4}{5}}, \underline{\frac{8}{5}}\right)$

② Pendiente de  $r$ :  $5y = 2x - 17 \Rightarrow y = \frac{2}{5}x - \frac{17}{5} \Rightarrow m_1 = \frac{2}{5}$

Pendiente de  $s$ :  $ky = 3x - 8 \Rightarrow y = \frac{3}{k}x - \frac{8}{k} \Rightarrow m_2 = \frac{3}{k}$

$\tan 60^\circ = \left| \frac{\frac{3}{k} - \frac{2}{5}}{1 + \frac{3}{k} \cdot \frac{2}{5}} \right| \Rightarrow \sqrt{3} = \left| \frac{\frac{15-2k}{5k}}{\frac{5k+6}{5k}} \right| \Rightarrow \sqrt{3} = \left| \frac{15-2k}{5k+6} \right| \Rightarrow$

\*  $\frac{15-2k}{5k+6} = \sqrt{3} \Rightarrow 15-2k = 5\sqrt{3}k + 6\sqrt{3} \Rightarrow (5\sqrt{3}+2)k = 15-6\sqrt{3}$

$\Rightarrow \boxed{k = \frac{15-6\sqrt{3}}{2+5\sqrt{3}}}$ ; \*  $\frac{15-2k}{5k+6} = -\sqrt{3} \Rightarrow 15-2k = -5\sqrt{3}k - 6\sqrt{3}$

$\Rightarrow (5\sqrt{3}-2)k = -6\sqrt{3}-15 \Rightarrow \boxed{k = \frac{-6\sqrt{3}-15}{5\sqrt{3}-2} = \frac{15+6\sqrt{3}}{2-5\sqrt{3}}}$

③  $\log(x^2+1) - \log(x^2-1) = \log \frac{13}{12} \Rightarrow \log \frac{x^2+1}{x^2-1} = \log \frac{13}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{13}{12} \Rightarrow 12x^2+12 = 13x^2-13 \Rightarrow -x^2 = -25 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow \underline{x = \pm 5}$

④ a)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+5x^2+2x-8}{2x^3-4x^2-10x+12} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2+3x-4)}{(x+2)(2x^2-8x+6)} =$

$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+3x-4}{2x^2-8x+6} = \frac{-6}{30} = \underline{\underline{-\frac{1}{5}}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4+3x^5-2x^6+1}{3x^2-5x^5-5x^4-2x^2+2} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = +\infty$

(porque grado del numerador es mayor que grado del denominador y para el signo se tiene en cuenta el signo de los monomios de mayor grado).

$$\textcircled{5} \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (3x + 4) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \neq \lim_{x \rightarrow -1} f(x). \text{ DISCONTINUIDAD}$$

DE SALTO FINITO. Longitud del salto:  $L = |1 - (-1)| = 2$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x}{x} - 2\right) = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \neq 5 = f(2)$$

DISCONTINUIDAD EVITABLE

$$\textcircled{6} \text{ a) Eje X: } y=0 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow \underline{(1,0)}, \underline{(-2,0)}$$

$$\text{Eje Y: } x=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \underline{(0,1)}$$

$$\text{b) Verticales } x^2-x-2=0; x_1=2; x_2=-1$$

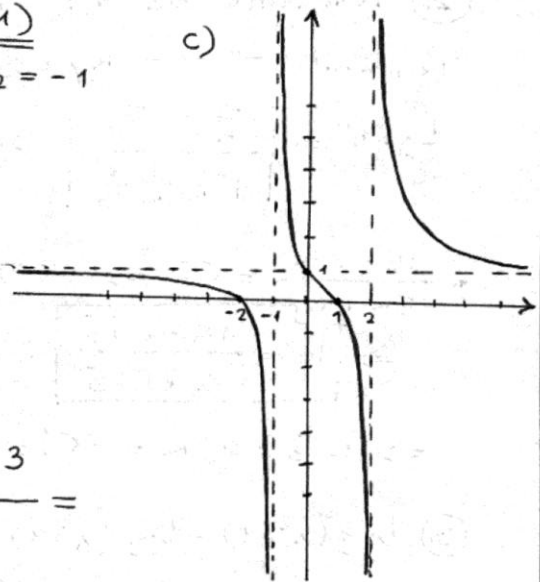
$$* \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-2}{x^2-x-2} = \frac{4}{0} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 2^+ \end{cases}$$

\*  $x=2$  es A.V.

$$* \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x-2} = \frac{-2}{0} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow -1^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow -1^+ \end{cases}$$

\*  $x=-1$  es A.V.

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x-2}{x^2-x-2} = 1 \Rightarrow \underline{y=1 \text{ es A.H.}}$$



$$\textcircled{7} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{3x^2-6x-3}{x-3} - 3}{x-2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{3x^2-9x+6}{x-3}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-9x+6}{(x-2)(x-3)} = \left[ \frac{0}{0} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x-3)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-3}{x-3} = \frac{3}{-1} = -3 \Rightarrow \underline{\underline{f'(2) = -3}}$$

Recta tangente:

$$y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y - 3 = -3(x-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 3 = -3x + 6 \Rightarrow \underline{\underline{y = -3x + 9}}$$