**1.** Hallar una recta perpendicular y otra paralela a la recta $r \equiv 2x - 5y + 4 = 0$ que pasen ambas por el punto $P(-3,\ 0)$. **(2 puntos)**

**2.** Encuentra el punto de la recta $r \equiv 4x - 8y + 7 = 0$ que está a la misma distancia de los puntos $A(2,\ 1)$ y $B(1,\ -3)$. **(2 puntos)**

**3.** Resuelve la siguiente ecuación logarítmica: $\frac{1}{2}\log(2x+3) = \log x$ **(1 punto)**

**4.** Calcula los siguientes límites **(1 punto; 0,5 puntos por apartado)**:

**a)** $\lim_{x \to 1} \frac{5x^2 + 5x - 10}{3x^3 - 6x^2 - 3x + 6}$ ; **b)** $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^4 - 3x^5 + 7}{6x^3 + 5x^4 - 2x^2 - x + 2}$

**5.** Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+2} & \text{si} \quad x < -1 \\ 3 & \text{si} \quad x = -1 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad -1 < x < 3 \\ \frac{4}{x-1} + 5 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$ en los puntos $x = -1$ y $x = 3$.

Caso de que no sea continua en alguno de ellos explica el tipo de discontinuidad. **(1 punto)**

**6.** Dada la función $f(x) = \frac{x+1}{x^2 + x - 2}$, contesta a los siguientes apartados:

**a)** Halla los puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**
**b)** Halla las asíntotas verticales y horizontales. **(1 punto)**
**c)** Realiza una representación gráfica aproximada de la función. **(0,5 puntos)**

**7.** Calcula la derivada de la función $f(x) = \frac{-2x^3 + 1}{3x - 1}$ en el punto $x = 2$, así como la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. **(1 punto)**

① Vector director de $r$ : $\vec{u} = (5,2)$. Recta paralela a $r$ que pasa por $P(-3,0)$ : $\dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y}{2} \Leftrightarrow 2x + 6 = 5y \Leftrightarrow \underline{\underline{2x - 5y + 6 = 0}}$

Vector perpendicular a $\vec{u}$ : $\vec{v} = (-2,5)$. Recta perpendicular a $r$ que pasa por $P(-3,0)$ : $\dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y}{5} \Leftrightarrow 5x + 15 = -2y \Leftrightarrow$
$\underline{\underline{5x + 2y + 15 = 0}}$

② Sea $P(x,y) \in r$. Entonces $d(P,A) = d(P,B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{(1-x)^2 + (-3-y)^2} \Leftrightarrow 4 + x^2 - 4x + 1 + y^2 - 2y =$
$= 1 + x^2 - 2x + 9 + y^2 + 6y \Leftrightarrow 5 - 4x - 2y = 10 - 2x + 6y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2x - 8y - 5 = 0 \Leftrightarrow \underline{S \equiv 2x + 8y + 5 = 0}$ (esta es la mediatriz de los puntos A y B. El punto que se busca es el corte de $r$ con S:

$$\left.\begin{array}{l} 4x - 8y + 7 = 0 \\ 2x + 8y + 5 = 0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema: $x = -2$ ; $y = \dfrac{-1}{8}$.

Por tanto el punto buscado es : $\underline{\underline{P\left(-2, \dfrac{-1}{8}\right)}}$

③ $\dfrac{1}{2}\log(2x+3) = \log x \Rightarrow \log(2x+3) = 2\log x \Rightarrow$
$\Rightarrow \log(2x+3) = \log x^2 \Rightarrow 2x + 3 = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \underline{\underline{x_1 = 3}} \\ \underline{\underline{x_2 = -1}} \end{cases}$$

④ a) $$\lim_{x\to 1} \frac{5x^2 + 5x - 10}{3x^3 - 6x^2 - 3x + 6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(5x+10)}{(x-1)(3x^2 - 3x - 6)} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{5x+10}{3x^2 - 3x - 6} = \frac{15}{-6} = \underline{\underline{-\frac{15}{6}}}$$

b) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^4 - 3x^5 + 7}{6x^3 + 5x^4 - 2x^2 - x + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \underline{\underline{+\infty}}$$ (como grado numerador mayor que grado denominador, se estudian los signos de los monomios de mayor grado).

⑤ $\underline{\underline{x = -1}}$ :
$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x}{x+2} = -1 \\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2 - 2) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to -1} f(x) = -1, \text{ pero}$$

$f(-1) = 3 \neq \displaystyle\lim_{x\to -1} f(x) \Rightarrow$ $\underline{f \text{ no es continua en } x = -1}$ : $\underline{\text{discontinuidad evitable}}$.

$\underline{\underline{x = 3}}$ :
$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x^2 - 2) = 7 \\ \displaystyle\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \left(\frac{4}{x-1} + 5\right) = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x) = 7 = f(3) \Rightarrow$$

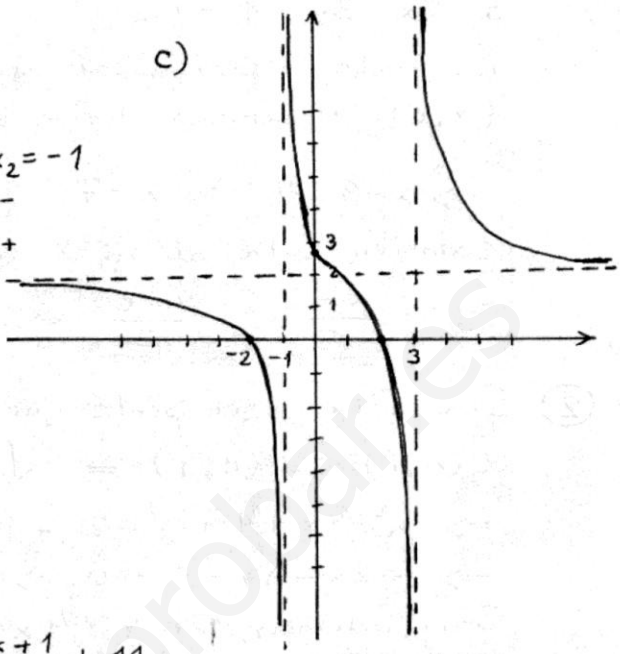
$\Rightarrow \underline{f \text{ es continua en } x = 3}$.

(6) a) Puntos de corte eje X: $y=0 \Rightarrow 2x^2-8=0 \Rightarrow x^2=4$

$\Rightarrow x = \pm 2$ ; $\underline{\underline{(2,0)}}$ y $\underline{\underline{(-2,0)}}$

Punto de corte eje Y : $\underline{\underline{(0, 8/3)}}$

c)




(*) b) Verticales: $x^2-2x-3=0 \Rightarrow x_1=3,\ x_2=-1$

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-8}{x^2-2x-3} = \frac{10}{0} = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } x\to 3^- \\ +\infty & \text{si } x \to 3^+ \end{cases}$$

$\Rightarrow \underline{x=3}$ es una asíntota vertical.

Horizontales:

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{2x^2-8}{x^2-2x-3} = 2 \Rightarrow \underline{\underline{y=2}}$$

es una asíntota horizontal

(7) $$\lim_{x\to -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to-2} \frac{\frac{x^2-3x+1}{3x+5}+11}{x+2} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{\frac{x^2-3x+1+33x+55}{3x+5}}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{x^2+30x+56}{(3x+5)(x+2)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+28)(x+2)}{(3x+5)(x+2)} = \frac{26}{-1} = -26 \Rightarrow \underline{\underline{f'(-2)=-26}}$$

Recta tangente:

$y - f(a) = f'(a)(x-a) \Rightarrow y - f(-2) = f'(-2)(x-(-2))$

$\Rightarrow y + 11 = -26(x+2) \Rightarrow y + 11 = -26x - 52$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = -26x - 63}}$

(6) (*) Verticales

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-8}{x^2-2x-3} = \frac{-6}{0} = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } x\to -1^- \\ +\infty & \text{si } x\to -1^+ \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{\underline{x=-1}}$ es una asíntota vertical.