

Examen de Matemáticas I – 1º de Bachillerato

1. Hallar una recta perpendicular y otra paralela a la recta $r \equiv 2x - 5y + 4 = 0$ que pasen ambas por el punto $P(-3, 0)$. **(2 puntos)**
2. Encuentra el punto de la recta $r \equiv 4x - 8y + 7 = 0$ que está a la misma distancia de los puntos $A(2, 1)$ y $B(1, -3)$. **(2 puntos)**

3. Resuelve la siguiente ecuación logarítmica: $\frac{1}{2} \log(2x+3) = \log x$ **(1 punto)**

4. Calcula los siguientes límites **(1 punto; 0,5 puntos por apartado)**:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + 5x - 10}{3x^3 - 6x^2 - 3x + 6}$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - 3x^5 + 7}{6x^3 + 5x^4 - 2x^2 - x + 2}$

5. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+2} & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } x = -1 \\ x^2 - 2 & \text{si } -1 < x < 3 \\ \frac{4}{x-1} + 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ en los puntos $x = -1$ y $x = 3$.

Caso de que no sea continua en alguno de ellos explica el tipo de discontinuidad. **(1 punto)**

6. Dada la función $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-2}$, contesta a los siguientes apartados:

- a) Halla los puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**
- b) Halla las asíntotas verticales y horizontales. **(1 punto)**
- c) Realiza una representación gráfica aproximada de la función. **(0,5 puntos)**

7. Calcula la derivada de la función $f(x) = \frac{-2x^3 + 1}{3x - 1}$ en el punto $x = 2$, así como la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. **(1 punto)**

① Vector director de r : $\vec{U} = (5, 2)$. Recta paralela a r que pasa por $P(-3, 0)$: $\frac{x+3}{5} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow 2x+6 = 5y \Leftrightarrow \underline{\underline{2x-5y+6=0}}$

Vector perpendicular a \vec{U} : $\vec{V} = (-2, 5)$. Recta perpendicular a r que pasa por $P(-3, 0)$: $\frac{x+3}{-2} = \frac{y}{5} \Leftrightarrow 5x+15 = -2y \Leftrightarrow \underline{\underline{5x+2y+15=0}}$

② Sea $P(x, y) \in r$. Entonces $d(P, A) = d(P, B) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{(1-x)^2 + (-3-y)^2} \Leftrightarrow 4+x^2-4x+1+y^2-2y =$
 $= 1+x^2-2x+9+y^2+6y \Leftrightarrow 5-4x-2y = 10-2x+6y \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -2x-8y-5=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{S \equiv 2x+8y+5=0}}$ (esta es la mediatriz de los puntos $A \ni B$. El punto que se busca es el corte de r con S : $4x-8y+7=0$ } Resolviendo el sistema:
 $2x+8y+5=0 \left\{ \begin{array}{l} x=-2; \\ y=-\frac{1}{8} \end{array} \right.$

Por tanto el punto buscado es: $\underline{\underline{P(-2, -\frac{1}{8})}}$

③ $\frac{1}{2} \log(2x+3) = \log x \Rightarrow \log(2x+3) = 2 \log x \Rightarrow$
 $\Rightarrow \log(2x+3) = \log x^2 \Rightarrow 2x+3 = x^2 \Rightarrow x^2-2x-3=0$
 $x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \underline{\underline{x_1=3}} \\ \underline{\underline{x_2=-1}} \end{cases}$

④ a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2+5x-10}{3x^3-6x^2-3x+6} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(5x+10)}{(x-1)(3x^2-3x-6)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x+10}{3x^2-3x-6} = \frac{15}{-6} = \underline{\underline{-\frac{15}{6}}}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4-3x^5+7}{6x^3+5x^4-2x^2-x+2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \underline{\underline{+\infty}}$ (como grado numerador mayor que grado denominador, se estudian los signos de los monomios de mayor grado).

⑤ $\underline{\underline{x=-1}}$: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x+2} = -1$ } $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$, pero
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2-2) = -1$ }

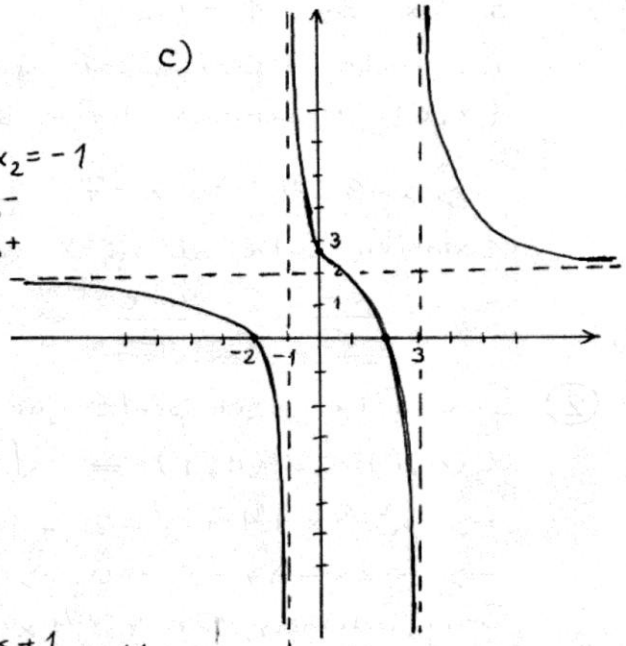
$f(-1) = 3 \neq \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \Rightarrow \underline{\underline{f \text{ no es continua en } x=-1}}$: discontinuidad evitable.

$\underline{\underline{x=3}}$: $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2-2) = 7$ } $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7 = f(3) \Rightarrow$
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{4}{x-1} + 5 \right) = 7$ }

$\Rightarrow \underline{\underline{f \text{ es continua en } x=3}}$.

⑥ a) Puntos de corte eje X: $y=0 \Rightarrow 2x^2-8=0 \Rightarrow x^2=4$
 $\Rightarrow x = \pm 2$; $(2,0)$ y $(-2,0)$
 Punto de corte eje Y: $(0, 8/3)$

* b) Verticales: $x^2-2x-3=0 \Rightarrow x_1=3, x_2=-1$
 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2-8}{x^2-2x-3} = \frac{10}{0} = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 3^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 3^+ \end{cases}$
 $\Rightarrow \underline{x=3}$ es una asíntota vertical.



Horizontales:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2-8}{x^2-2x-3} = 2 \Rightarrow \underline{y=2}$
 es una asíntota horizontal

⑦ $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{x^2-3x+1}{3x+5} + 11}{x + 2} =$

$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{x^2-3x+1+33x+55}{3x+5}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+30x+56}{(3x+5)(x+2)} = \left[\frac{0}{0} \right]$

$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+28)(x+2)}{(3x+5)(x+2)} = \frac{26}{-1} = -26 \Rightarrow \underline{\underline{f'(-2) = -26}}$

Recta tangente:

$y - f(a) = f'(a)(x - a) \Rightarrow y - f(-2) = f'(-2)(x - (-2))$

$\Rightarrow y + 11 = -26(x + 2) \Rightarrow y + 11 = -26x - 52$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = -26x - 63}}$

⑥ * Verticales

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2-8}{x^2-2x-3} = \frac{-6}{0} = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow -1^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow -1^+ \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{x = -1}}$ es una asíntota vertical.