1. Halla la ecuación de una recta s paralela a $2x-3y+1=0$ que corta al eje X en el mismo punto que la recta $r\equiv\frac{x-3}{-1}=\frac{y-8}{2}$. **(2 puntos)**

2. Encuentra el punto de la recta $r\equiv 4x-8y+7=0$ que está a la misma distancia de los puntos $A(2,1)$ y $B(1,-3)$. **(2 puntos)**

3. Resuelve la siguiente ecuación logarítmica: $\log(x+3)-\log(x-6)=1$ **(1 punto)**

4. Calcula los siguientes límites **(1 punto; 0,5 puntos por apartado)**:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^3-3x^2+3x-1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x^4+3x^5-2x+1}{x-7x^3-2x^2}$

5. Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases}\frac{5}{x-4} & si \quad x\le -1\\ \sqrt{x+1} & si \quad -1<x<3\\ \frac{x+3}{x} & si \quad x\ge 3\end{cases}$ en los puntos $x=-1$ y $x=3$. Caso de que no sea continua en alguno de ellos explica el tipo de discontinuidad. **(1 punto)**

6. Dada la función $f(x)=\frac{2x^2-8}{x^2-2x-3}$, contesta a los siguientes apartados:

a) Halla los puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**
b) Halla las asíntotas verticales y horizontales. **(1 punto)**
c) Realiza una representación gráfica aproximada de la función. **(0,5 puntos)**

7. Calcula la derivada de la función $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{3x+5}$ en el punto $x=-2$, así como la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. **(1 punto)**

① Un vector director de s es $\vec{u} = (3,2)$ pues s es paralela a $2x - 3y + 1 = 0$.

La recta r corta al eje X en un punto de la forma $(x, 0)$. Hallemos x haciendo $y = 0$: $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{0-8}{2} \Rightarrow \dfrac{x-3}{-1} = -4$

$\Rightarrow x - 3 = 4 \Rightarrow x = 7$. Luego la recta que buscamos también corta al eje X en el punto $(7,0)$. Así, la recta s es: $\underline{\underline{\dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-0}{2}}} \Rightarrow 2x - 14 = 3y \Rightarrow \underline{\underline{2x - 3y - 14 = 0}}$

② Sea $P(x,y)$ el punto que buscamos. Entonces:

$d(A,P) = d(B,P) \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2}$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow -2x - 8y - 5 = 0 \Rightarrow 2x + 8y + 5 = 0 \\ \text{Como, además, } P \in r: 4x - 8y + 7 = 0 \end{array}\right\}$ Resolviendo el sistema obtenemos el punto buscado: $\underline{\underline{P\left(-2, -\frac{1}{8}\right)}}$

③ $\log(x+3) - \log(x-6) = 1 \Rightarrow \log\dfrac{x+3}{x-6} = 1 \Rightarrow \dfrac{x+3}{x-6} = 10$

$\Rightarrow x + 3 = 10x - 60 \Rightarrow -9x = -63 \Rightarrow \underline{x = 7}$

④ $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x^2 - 2x + 1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3}{x^2 - 2x + 1} =$

$= \dfrac{4}{0} = \infty = \left\{\begin{array}{ll} +\infty & \text{si } x \to 1^- \\ +\infty & \text{si } x \to 1^+ \end{array}\right\} = \underline{\underline{+\infty}}$

$\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^4 + 3x^5 - 2x + 1}{x - 7x^3 - 2x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2/x + 3 - 2/x^4 + 1/x^5}{1/x^4 - 7/x^2 - 2/x^3} = \frac{3}{0} = \underline{\underline{-\infty}}$

(negativo por el signo de los monomios de mayor grado).

⑤ $\underline{\underline{x = -1}}$ $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{5}{x-4} = -1 \\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \sqrt{x+1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \displaystyle\lim_{x\to -1} f(x) \Rightarrow$

$f(x)$ no es continua en $x = -1$. Discontinuidad de salto finito. Longitud del salto: $L = 1$.

$\underline{\underline{x = 3}}$ $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{x+1} = 2 \\ \displaystyle\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x+3}{x} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to 3} f(x) = 2.$

Además $f(3) = 2$. Entonces $\displaystyle\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$ y f es continua en $x = 3$.

⑥ a) Puntos de corte eje X: $y = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$

$\Rightarrow x = \pm 2$; $\underline{\underline{(2,0)}}$ y $\underline{(-2,0)}$

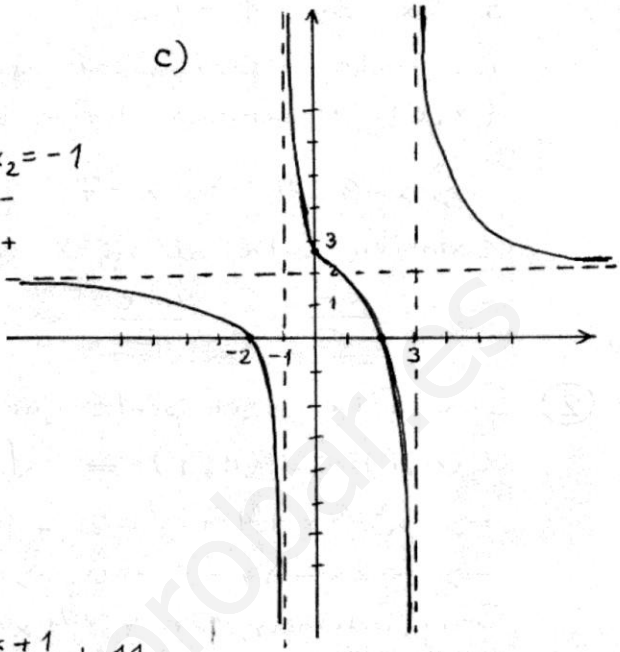
Punto de corte eje Y : $\underline{\underline{(0, 8/3)}}$

(*) b) Verticales : $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -1$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2-8}{x^2-2x-3} = \frac{10}{0} = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \to 3^- \\ +\infty & \text{si } x \to 3^+ \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\underline{x = 3}$ es una asíntota vertical.

c)



Horizontales :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2-8}{x^2-2x-3} = 2 \Rightarrow \underline{\underline{y = 2}}$$

es una asíntota horizontal

⑦ $$\lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{\frac{x^2-3x+1}{3x+5} + 11}{x+2} =$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{\frac{x^2-3x+1+33x+55}{3x+5}}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{x^2+30x+56}{(3x+5)(x+2)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(x+28)(x+2)}{(3x+5)(x+2)} = \frac{26}{-1} = -26 \Rightarrow \underline{\underline{f'(-2) = -26}}$$

Recta tangente :

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \Rightarrow y - f(-2) = f'(-2)(x-(-2))$$

$$\Rightarrow y + 11 = -26(x+2) \Rightarrow y + 11 = -26x - 52$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = -26x - 63}}$$

⑥ (*) Verticales

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^2-8}{x^2-2x-3} = \frac{-6}{0} = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \to -1^- \\ +\infty & \text{si } x \to -1^+ \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{x = -1}}$ es una asíntota vertical.