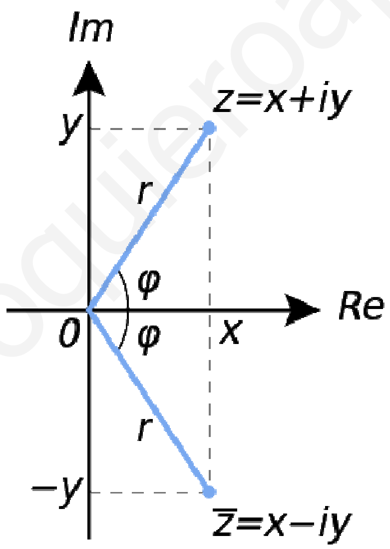
NÚMEROS COMPLEJOS



I) NECESIDAD DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Ejemplo 1: Los números complejos, también llamados imaginarios, surgieron históricamente de la necesidad de resolver ecuaciones tan sencillas como

$$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}$$

Esta ecuación, como muy bien sabemos, no tendría solución en el campo de los números reales. Ahora bien, si definimos:

$$\boxed{\sqrt{-1}=i} \leftarrow \textbf{unidad imaginaria} \qquad \text{es decir, } \boxed{i^2=-1}$$

entonces su solución sería $x=\pm i$. Esto es lo que hicieron en el siglo XVI matemáticos como Girolamo Cardano (1501-1576) o Rafaelle Bombelli (1526-1572); en aquella época a este tipo de números se les empezó a llamar imaginarios. Por cierto, el primero en utilizar la **i** para designar la unidad imaginaria fue el suizo Leonhard Euler (1707-1783), mientras que al alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que profundizó en el estudio de estos números, se debe el adjetivo de complejos.

Ejemplo 2: Resolver, en el campo de los números complejos, la ecuación $x^2+9=0$

Ejemplo 3: Ídem con $x^2-4x+13=0$

Ejemplo 4: Ídem con $x^2+x+1=0$

En general:

unidad imaginaria

$$\mathbf{a+b\,i}$$

parte real parte imaginaria

Nº COMPLEJO EN FORMA BINÓMICA

Conclusión: **TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA: «Todo polinomio de grado n tiene n raíces (reales o complejas)».**

Definiciones:

1º) Se define el **conjunto de los números complejos** como el formado por todos los números de la forma **a+bi**, donde **a** y **b** son reales:

$$\mathbb{C}=\{a+bi \;/\; a, b \in \mathbb{R}\}$$

A los números complejos se les suele designar con la letra z, es decir, $z=a+bi$, y se dice que:

$\mathbb{R}e(z)=a \quad \leftarrow$ **parte real** de z

$Im(z)=b \quad \leftarrow$ **parte imaginaria** de z

2º) Número imaginario puro: es aquel complejo que carece de parte real, es decir, $\mathbb{R}e(z)=0$

Ejemplos: $2i$, $-7i$, i, $\frac{3}{5}i$, $-i$, $\sqrt{5}\,i$, etc.

3º) Número real: es aquel complejo que carece de parte imaginaria, es decir, $Im(z)=0$

Ejemplos: 3, -6, 1, $\frac{2}{7}$, -1, $\sqrt{3}$, etc.

Nótese, por tanto, que los reales están contenidos en los complejos: $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$, o dicho de otra forma, los reales son un subconjunto de los complejos; por lo tanto, ya podemos completar el esquema de todos los conjuntos numéricos que conocemos:

4º) Complejo conjugado, $\bar{z}$: El complejo conjugado del complejo $z=a+bi$ se define como $\bar{z}=a-bi$

Ejemplos: $z=2+5i \longrightarrow \bar{z}=2-5i$

$z=7i \longrightarrow \bar{z}=-7i$

$z=3 \longrightarrow \bar{z}=3$

etc.

Adviértase que las soluciones imaginarias de una ecuación de 2º grado siempre son pares conjugados.

5º) Dos números **complejos** expresados en forma binómica son **iguales** si coinciden sus partes reales e imaginarias.

Ejemplo: $2-xi=y+3i \Leftrightarrow y=2,\ x=-3$

II) OPERACIONES CON COMPLEJOS en FORMA BINÓMICA *(págs. 150 y 151 libro de texto)*

II.1) Suma y diferencia:
Se realiza sumando (o restando) por separado sus partes reales e imaginarias:

Ejemplo 5: $\left.\begin{array}{l} z_1=3+5i \\ z_2=4-2i \end{array}\right\}\quad z_1+z_2=7+3i \qquad\qquad z_1-z_2=-1+7i$

II.2) Producto:
Se realiza calculando los cuatro productos posibles y teniendo en cuenta que $i^2=-1$:

Ejemplo 6: $\left.\begin{array}{l} z_1=3+5i \\ z_2=4-2i \end{array}\right\}\quad z_1\cdot z_2=(3+5i)(4-2i)=12-6i+20i-10i^2=12-6i+20i+10=\boxed{22+14i}$

$i^2=-1$

Consecuencia: $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2\in\mathbb{R}^+$

Este hecho será útil para el cociente que vamos a definir a continuación:

II.3) Cociente:
Se realiza multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador:

Ejemplo 7: $\dfrac{3+5i}{4-2i}=\dfrac{(3+5i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}=\dfrac{12+6i+20i+10i^2}{16-4i^2}=\dfrac{12+6i+20i-10}{16+4}=\dfrac{2+26i}{20}=\dfrac{2}{20}+\dfrac{26}{20}i=\boxed{\dfrac{1}{10}+\dfrac{13}{10}i}$

$i^2=-1$

propiedad distributiva del cociente

Observaciones: **1ª)** Se recomienda hacer la comprobación:

$$(4-2i)\left(\frac{1}{10}+\frac{13}{10}i\right)= \qquad\qquad\qquad\qquad =3+5i$$

2ª) Cuando en el denominador aparece un imaginario puro basta con multiplicar numerador y denominador por i:

Ejemplo 8: $\dfrac{3+5i}{2i}=\dfrac{(3+5i)\cdot i}{2i\cdot i}=\dfrac{3i+5i^2}{2i^2}=\dfrac{3i-5}{-2}=\dfrac{-3i+5}{2}=\boxed{\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}i}$

II.4) Potencia:
Para hacer $(a+bi)^n$ tendremos que aplicar el binomio de Newton, como vimos en el 1er tema del curso; ahora bien, como a continuación habría que sustituir alguna de las **potencias sucesivas de i**, vamos a investigar su valor:

$\boxed{i^0=1}$ como siempre

$\boxed{i^1=i}$ como siempre

$\boxed{i^2=-1}$ por definición

$\boxed{i^3= i^2\cdot i=-1\cdot i=-i}$

$i^4= i^3\cdot i=-i\cdot i=-i^2=1$

$i^5= i^3\cdot i=1\cdot i=i$

$i^6= i^5\cdot i=i\cdot i=i^2=-1$

$i^7= i^6\cdot i=-1\cdot i=-i$

Luego vemos que se trata de una serie de 4 términos (los recuadrados) que se van repitiendo; y lo curioso es que este hecho también se da hacia atrás:

$$i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i\cdot i}=\frac{i}{-1}=-i$$

$$i^{-2}=\frac{1}{i^2}=\frac{1}{-1}=-1$$

$$i^{-3}=\frac{1}{i^3}=\frac{1}{-i}=\frac{i}{-i\cdot i}=\frac{i}{1}=i$$

$$i^{-4}=\frac{1}{i^4}=\frac{1}{1}=1$$

En resumen:

.
.
.

$i^{-4}=1$

$i^{-3}=i$

$i^{-2}=-1$

$i^{-1}=-i$

$$\boxed{\begin{array}{l} i^0=1\\ i^1=i\\ i^2=-1\\ i^3=-i \end{array}}$$

$i^4=1$

$i^5=i$

$i^6=-1$

$i^7=-i$

$i^8=1$

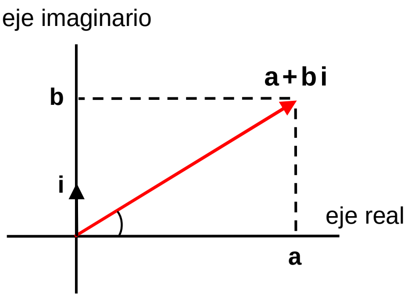
.
.
.

Y, en general, para hallar una potencia n-ésima de i, basta con hacer la división y quedarnos con el resto, que estará en uno de los cuatro casos anteriores:

Ejemplo 9: $\begin{array}{r|l} 151 & 4 \\ \hline 31 & 37 \\ 3 & \end{array}$ ⟹ $151 = 37 \cdot 4 + 3$ ⟹ $\boxed{i^{151} = i^3 = -i}$

Es decir, descenderíamos 37 veces en la serie de 4 elementos para acabar en la posición 3

III) REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE COMPLEJOS (Forma binómica y polar)



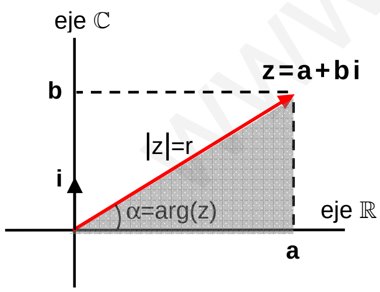
Dado un sistema de dos ejes perpendiculares como el de la figura –eje real y eje imaginario–, llamado plano de Gauss[1], **« para representar un complejo** en forma binómica –es decir, z=**a+bi**–, **le haremos corresponder el vector (a,b) »**.

Definiciones: 1ª) El punto (a,b), es decir, el extremo del vector, se llama **afijo** del complejo a+bi.

2ª) La longitud del vector se denomina **módulo**, y se suele designar como **r** o **|z|**.

3ª) El ángulo que forma el vector con la parte positiva del eje x se llama **argumento**, y se designa como **α** o **arg(z)**.

Forma polar r_α: Consiste en representar un complejo mediante dos valores: su módulo y su argumento, designándolo como r_α .



Para hallar el módulo podemos aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo sombreado:

$$r^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Para obtener el argumento, aplicamos trigonometría elemental en el mismo triángulo:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{\alpha = \text{arctg}\ \frac{b}{a}}$$

Todo lo anterior podemos resumirlo en la siguiente tabla:

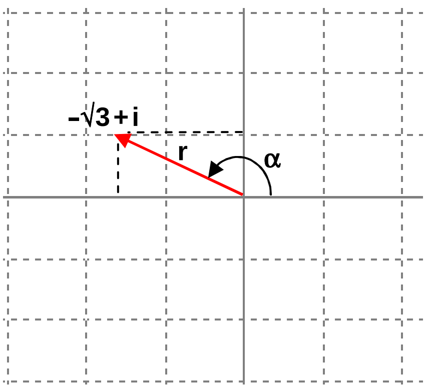
[1] Curiosamente, en realidad los artífices de esta idea fueron el danés Caspar Wessel (1745-1818) en 1797 y el suizo Jean Robert Argand (1768-1822) en 1806, pero la gloria del nombre se debe al alemán Gauss (1777-1885), que profundizó en este tema 30 años después…

		Definición:	Cálculo:	Rango:
FORMA POLAR r_α	**MÓDULO**	Longitud del complejo **z=a+bi**	$r=\sqrt{a^2+b^2}=\lvert z\rvert$	r>0
	ARGUMENTO	Ángulo[2] que forma el complejo con la **parte positiva** del eje $\mathbb{R}$	$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}=\arg(z)$	$0\le\alpha<360^\circ$

Consejos a la hora de pasar de binómica a polar:

1ª) Como muy bien sabemos del tema de Trigonometría, entre 0º y 360º existen dos arcotangentes (que difieren en 180º), por lo que conviene dibujar previamente el complejo y ver con cuál de las dos nos quedamos, en función de en qué cuadrante esté situado:

Ejemplo 10: Pasar **$-\sqrt{3}+i$** a binómica:



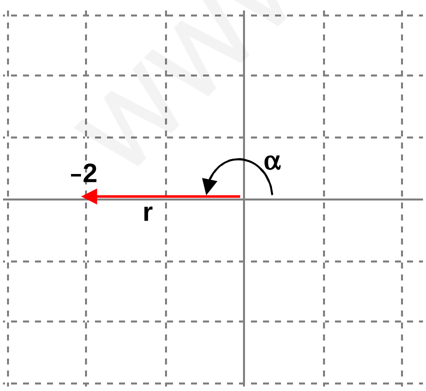
$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(-\cancel{\sqrt{3}}\right)^{\cancel{2}}+1^2}=\sqrt{4}=2$$

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}=\operatorname{arctg}\frac{1}{-\sqrt{3}}=\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{3}=\begin{cases}330^\circ \leftarrow \text{ descartada}\\ \boxed{150^\circ}\end{cases}$$

Por tanto: $\boxed{-\sqrt{3}+i=2_{150^\circ}}$

2ª) Si se trata de un número real o un imaginario puro se pasa a polar gráficamente, es decir, sin necesidad de aplicar las dos fórmulas anteriores:

Ejemplo 11: Pasar –2 a binómica:



En el dibujo se ve que: $\boxed{-2=2_{180^\circ}}$

(Puede comprobarse también, naturalmente, que si se utilizan las dos fórmulas se obtiene el mismo resultado, pero el proceso resulta muy tedioso…)

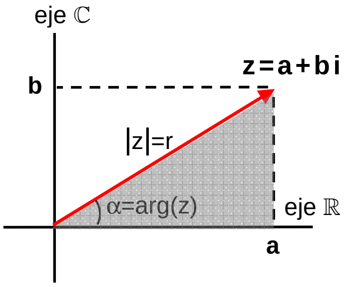
[2] Dicho ángulo puede expresarse en radianes o grados sexagesimales, indistintamente.

¿Cuándo son dos complejos iguales en forma polar?: $\boxed{r_{\alpha} = r'_{\alpha'} \iff \begin{cases} r = r' \\ \alpha = \alpha' + k\cdot 360^{o} \end{cases}, \text{ donde } k \in \mathbb{Z}}$

Es decir: «Dos complejos en forma polar son iguales si sus módulos son exactamente idénticos y sus argumentos son iguales, salvo una diferencia de un múltiplo entero de vueltas»

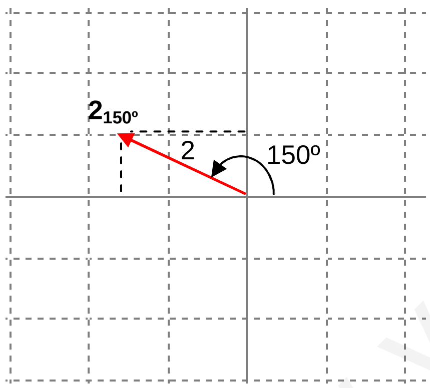
Ejemplos: $2_{30^{o}}=2_{390^{o}}$ $\qquad 5_{330^{o}}=5_{-30^{o}}$ $\qquad 2_{\pi}=2_{3\pi}$ $\qquad \sqrt{2}_{30^{o}}=\sqrt{2}_{750^{o}}$

Forma trigonométrica: Sirve para pasar de polar a binómica:



$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{a}{r} \Rightarrow a = r\cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{b}{r} \Rightarrow b = r\operatorname{sen}\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a+bi = r\cos\alpha + r\operatorname{sen}\alpha\cdot i = r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)}$$

Ejemplo 12: Pasar $2_{150^{o}}$ a binómica:



$$\cos 150^{o} = \cos(180^{o}-30^{o}) = -\cos 30^{o}$$

$$\boxed{2_{150^{o}} = 2(\cos 150^{o} + i\operatorname{sen} 150^{o}) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}+i}$$

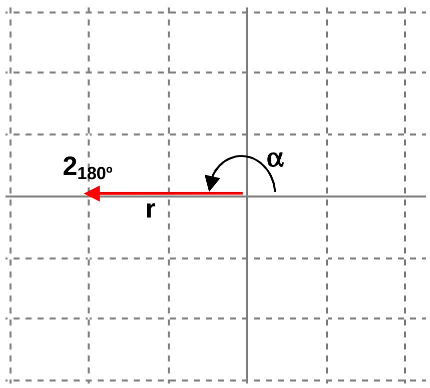
$$\operatorname{sen} 150^{o} = \operatorname{sen}(180^{o}-30^{o}) = \operatorname{sen} 30^{o}$$

Por tanto: $\boxed{2_{150^{o}}=-\sqrt{3}+i}$

Nótese que es el mismo resultado obtenido en el ejemplo 10.

Observación: Para pasar de polar a binómica, y cuando se trate de los argumentos 0º, 90º, 180º y 270º, no es necesario pasar previamente a trigonométrica:

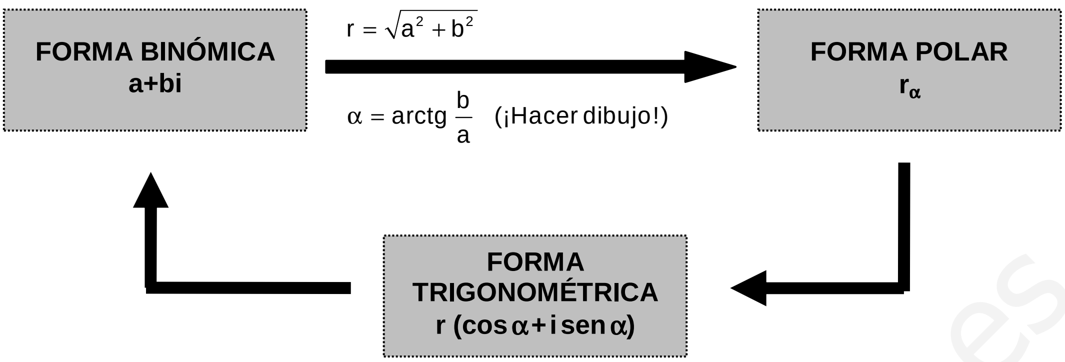
Ejemplo 13: Pasar $2_{180^{o}}$ a binómica:



En el dibujo se ve que: $\boxed{2_{180^{o}}=-2}$

(Puede comprobarse también, naturalmente, que si se pasa previamente a trigonométrica se obtiene el mismo resultado…)

■ Todo lo visto en este apartado se puede resumir en el siguiente diagrama, en el que se muestran las tres formas que hemos indicado de representar un complejo y todas las combinaciones de paso de una a otra:



IV) OPERACIONES EN FORMA POLAR

IV.1) Producto y cociente en forma polar *(págs. 154 y 155 libro de texto)*

«El producto de dos complejos en forma polar es otro complejo de módulo el producto de los módulos y argumento la suma de éstos»:

$$\boxed{r_\alpha \cdot r'_{\alpha'} = (r\cdot r')_{\alpha+\alpha'}}$$

Dem:

$$\begin{aligned}\boxed{r_\alpha \cdot r'_{\alpha'}} &= r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)\cdot r'(\cos\alpha' + i\,\text{sen}\,\alpha') = r\cdot r'(\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha)(\cos\alpha' + i\,\text{sen}\alpha') = \\ &= r\cdot r'\left(\cos\alpha\,\cos\alpha' + i\,\text{sen}\alpha\,\cos\alpha' + i\,\cos\alpha\,\text{sen}\alpha' + i^2\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\alpha'\right) = \\ &= r\cdot r'\left[(\cos\alpha\,\cos\alpha' - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\alpha') + i\,(\text{sen}\alpha\,\cos\alpha' + \cos\alpha\,\text{sen}\alpha')\right] = \\ &= r\cdot r'\left[\cos(\alpha+\alpha') + i\,\text{sen}(\alpha+\alpha')\right] = \boxed{(r\cdot r')_{\alpha+\alpha'}}\end{aligned}$$

(C.Q.D.)

Ejemplos: $3_{60^\circ} \cdot 2_{45^\circ} = 6_{105^\circ}$

$\sqrt{3}_{135^\circ} \cdot 1_{270^\circ} = \sqrt{3}_{405^\circ} = \sqrt{3}_{45^\circ}$

Se puede generalizar a tres o más complejos:

$\sqrt{3}_{120^\circ} \cdot 2_{150^\circ} \cdot \sqrt{3}_{90^\circ} = 6_{360^\circ} = 6_{0^\circ}$

■ «El cociente de dos complejos en forma polar es otro complejo de módulo el cociente de los módulos y argumento la resta de éstos»:

$$\boxed{\frac{r_\alpha}{r'_{\alpha'}} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\alpha'}}$$

Ejemplos: $\frac{6_{85^\circ}}{3_{20^\circ}}=2_{65^\circ}$

$$\frac{\sqrt{2}_{90^\circ}}{2_{120^\circ}}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{-30^\circ}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{330^\circ}$$

En resumen: **1º)** Sumas y restas de complejos: sólo se pueden hacer en binómica.

2º) Productos, cocientes (y potencias y raíces, como veremos a continuación): se recomienda en polar (aunque también pueden hacerse, más prolijamente, en binómica).

IV.2) Potencia en forma polar *(pág. 154 libro de texto)*

Vamos a obtener –en polar, que es la forma más cómoda para ello–, la fórmula para obtener la potencia de un complejo. Para ello, aplicaremos **n** veces el producto recién visto:

$$\boxed{(r_\alpha)^n}=\underbrace{r_\alpha \cdot r_\alpha \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot r_\alpha}_{\text{n términos}}=(r\cdot r\cdots\cdots)_{\underbrace{\alpha+\alpha+\cdots\cdots+\alpha}_{\text{n sumandos}}}=\boxed{(r^n)_{n\cdot\alpha}}$$

Por tanto:

$$\boxed{(r_\alpha)^n=(r^n)_{n\cdot\alpha}}$$

Es decir: «Para elevar un complejo en forma polar a un exponente se eleva su módulo al exponente y se multiplica su argumento por dicho exponente»:

Ejemplos: $(2_{30^\circ})^3=(2^3)_{90^\circ}=8_{90^\circ}$

$$\left(\sqrt{3}_{135^\circ}\right)^4=\left[\left(\sqrt{3}\right)^4\right]_{4\cdot135^\circ}=9_{540^\circ}=9_{180^\circ}$$

Si pasamos ambos miembros de la anterior fórmula a forma trigonométrica obtenemos la **fórmula de De Moivre**[3]:

$$\boxed{\left[r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)\right]^n = r^n(\cos n\alpha + i\,\text{sen}\,n\alpha)}$$

Esta fórmula es muy útil en Trigonometría, para hallar fórmulas de sen$n\alpha$ y cos$n\alpha$ en función de senα y cosα

IV.3) Raíces de un complejo *(págs. 156 y 157 libro de texto)*

Es imposible hallar las raíces de un complejo directamente en forma binómica. Vamos a deducir a continuación las fórmulas para hallar la raíz de un complejo en polar.

Supongamos que nos dan el complejo r_α, y queremos hallar su raíz n–ésima, que vamos a llamar R_β; por tanto, tendremos que:

$$\sqrt[n]{r_\alpha} = R_\beta$$

Por lo tanto, por definición de raíz n–ésima, tendremos que:

$$(R_\beta)^n = r_\alpha$$

Podemos aplicar ahora al primer miembro la fórmula de la potencia obtenida en el apartado anterior:

$$(R^n)_{n\cdot\beta} = r_\alpha$$

A continuación tendremos en cuenta que, según vimos en el apdo. III, dos complejos expresados en forma polar son iguales si sus módulos son iguales y sus argumentos también, salvo una diferencia de un múltiplo entero k de vueltas:

$$(R^n)_{n\cdot\beta} = r_\alpha \Rightarrow \begin{cases} R^n = r \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \sqrt[n]{r}} \\ n\cdot\beta = \alpha + k\cdot 360^\circ \Rightarrow \boxed{\beta = \dfrac{\alpha + k\cdot 360^\circ}{n}} \end{cases} \text{, donde } k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

Falta razonar que k solamente puede tomar los valores 0, 1, 2, …, hasta n–1. Efectivamente, si k=n, entonces, al sustituir en la segunda fórmula recuadrada, obtendríamos $\beta=\alpha+360^\circ$, con lo cual volveríamos al mismo ángulo.

El hecho de k sólo pueda tomar estos **n** valores desde 0, 1, 2... hasta n–1 tiene una serie de consecuencias:

1º) Un complejo tiene **n** raíces n-ésimas.

[3] Descubierta por el francés Abraham de Moivre (1667-1754).

2º) Las **n** raíces comparten el mismo módulo R (lo que varía es el argumento).

3º) Si las dibujamos, formarán un polígono regular de **n** lados.

Ejemplo 14: Hallar $\sqrt[3]{8_{90^o}}$

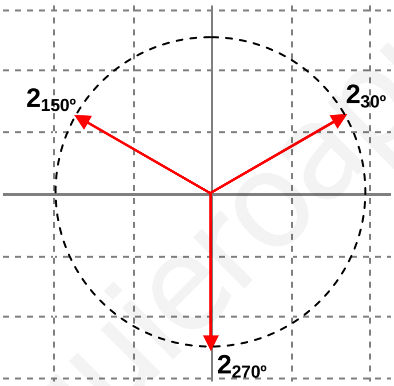
$$\sqrt[3]{8_{90^o}} = R_\beta \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \beta = \dfrac{90^o + k \cdot 360^o}{3} = 30^o + k \cdot 120^o \end{cases} ;\ k = 0 \rightarrow \beta = 30^o$$

$$k = 1 \rightarrow \beta = 150^o$$

$$k = 2 \rightarrow \beta = 270^o$$

Soluc: $\boxed{2_{30^o},\ 2_{150^o},\ 2_{270^o}}$

Si dibujamos las tres raíces, comprobaremos que sus afijos forman un triángulo equilátero:



60 EJERCICIOS de NÚMEROS COMPLEJOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones en el campo de los números complejos:

a) $x^2-2x+2=0$ *(Soluc: $1\pm i$)*

b) $x^2+3=0$ *(Soluc: $\pm\sqrt{3}\,i$)*

c) $x^2-2x+4=0$ *(Soluc: $1\pm\sqrt{3}i$)*

d) $x^2+x+1=0$ *(Soluc: $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$)*

e) $x^3-6x^2+21x-26=0$ *(Soluc: $2,\ 2\pm 3i$)*

f) $x^3+1=0$ *(Soluc: $-1,\ \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$)*

g) $x^4-1=0$ *(Soluc: $\pm 1,\ \pm i$)*

h) $x^4-3x^3-2x^2+10x-12=0$ *(Soluc: $-2,\ 3,\ 1\pm i$)*

Forma binómica de un complejo:

2. Completar (obsérvese el primer ejemplo):

COMPLEJO z	PARTE REAL Re(z)	PARTE IMAGINARIA Im(z)	OPUESTO −z	CONJUGADO $\bar{z}$
z=2+3i	Re(z)=2	Im(z)=3	−z=−2−3i	$\bar{z}=2-3i$
z=3-i				
z=1+i				
$z=3-3\sqrt{3}\,i$				
z=3				
z=−2i				
z=i				

3. Dados los complejos $z_1=2+3i$, $z_2=-1+4i$ y $z_3=2-5i$, hallar:

a) $z_1+z_2=$ *(Soluc: $1+7i$)*

b) $z_1+z_3=$ *(Soluc: $4-2i$)*

c) $z_1-z_2=$ *(Soluc: $3-i$)*

d) $z_3-z_2=$ *(Soluc: $3-9i$)*

e) $3z_2+2z_3=$ *(Soluc: $1+2i$)*

f) $2z_1-3z_2=$ *(Soluc: $7-6i$)*

g) $z_3-3z_1+4z_2=$ *(Soluc: $-8+2i$)*

h) $z_1+\overline{z_2}=$ *(Soluc: $1-i$)*

i) $z_3-\overline{z_3}=$ *(Soluc: $-10i$)*

j) $2\overline{z_1}-z_1=$ *(Soluc: $2-9i$)*

4. Calcular **x** e **y** para que $(2+xi)+(y+3i)=7+4i$ *(Soluc: $x=1$, $y=5$)*

5. Calcular:

a) $(2+5i)\,(3+4i)=$ *(Soluc: $-14+23i$)*

b) $(1+3i)\,(1+i)=$ *(Soluc: $-2+4i$)*

c) $(1+i)\,(-1-i)=$ *(Soluc: $-2i$)*

d) $(2-5i)\,i=$ *(Soluc: $5+2i$)*

e) $(2+5i)\,(2-5i)=$ *(Soluc: 29)*

f) $(1+i)\,(1-i)=$ *(Soluc: 2)*

g) $(5+2i)\,(3-4i)=$ *(Soluc: $23-14i$)*

h) $(3+5i)^2=$ *(Soluc: $-16+30i$)*

i) $(1+3i)\,(1-3i)=$ *(Soluc: 10)*

j) $(-2-5i)\,(-2+5i)=$ *(Soluc: 29)*

k) $(2+3i)\,3i=$ *(Soluc: −9+6i)*

l) $(3i)\,(-3i)=$ *(Soluc: 9)*

m) $(2+3i)^2=$ *(Soluc: −5+12i)*

n) $(6-3i)^2=$ *(Soluc: 27−36i)*

o) $(2+3i)\,(1-i)=$ *(Soluc: 5+i)*

p) $(1-3i)\,2i=$ *(Soluc: 6+2i)*

q) $(1+i)\,(2-3i)=$ *(Soluc: 5−i)*

r) $(5+i)\,(5-i)=$ *(Soluc: 26)*

s) $(4+3i)\,(4+2i)-(2+i)\,(3-4i)=$ *(Soluc: 25i)*

6. ¿Cómo es siempre el producto de dos complejos conjugados? Razonar la respuesta. *(Soluc: $\in IR^+$)*

7. Dados los complejos del ejercicio 2, hallar:

a) $z_1 \cdot z_2=$ *(Soluc: −14+5i)*

b) $z_1 \cdot z_3=$ *(Soluc: 19−4i)*

c) $z_3-z_2=$ *(Soluc: 3−9i)*

d) $z_1\,(z_3+z_2)=$ *(Soluc: 5+i)*

e) $z_1-z_2 \cdot z_3=$ *(Soluc: −16−10i)*

f) $(z_1)^2=$ *(Soluc: −5+12i)*

g) $(z_1-z_3)^2=$ *(Soluc: −64)*

h) $z_1 \cdot \overline{z_1}=$ *(Soluc: 13)*

i) $z_1-\overline{z_1}=$ *(Soluc: 6i)*

j) $z_2\,(2z_1-3z_3)=$ *(Soluc: −82−29i)*

k) $(3z_1+2z_2)^2=$ *(Soluc: −273+136i)*

l) $z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot z_3=$ *(Soluc: 75−28i*

m) $z_1{}^2-\overline{z_1}{}^2=$

8. Dados los complejos 2−mi y 3−ni hallar **m** y **n** para que su producto sea 8+4i.
(Soluc: $m_1=-2$ y $n_1=1$; $m_2=2/3$ y $n_2=-3$)

9. Resolver la ecuación $(a+i)\,(b-3i)=7-11i$ *(Soluc: $a_1=4$ y $b_1=1$; $a_2=-1/3$ y $n_2=-12$)*

10. Calcular:

a) $\frac{1+3i}{1+i}=$ $\left(Sol: 2+i\right)$

b) $\frac{2+5i}{3+4i}=$ $\left(Sol: \frac{26}{25}+\frac{7}{25}i\right)$

c) $\frac{1+i}{1-i}=$ $\left(Sol: i\right)$

d) $\frac{3+5i}{1-i}=$ $\left(Sol: -1+4i\right)$

e) $\frac{2-5i}{i}=$ $\left(Sol: -5-2i\right)$

f) $\frac{20+30i}{3+i}=$ $\left(Sol: 9+7i\right)$

g) $\frac{i}{3-2i}=$ $\left(Sol: -\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i\right)$

h) $\frac{1+i}{i}=$ $\left(Sol: 1-i\right)$

i) $\frac{1+2i}{2-i}=$ $\left(Sol: i\right)$

j) $\frac{1-i}{2+3i}=$ $\left(Sol: -\frac{1}{13}-\frac{5}{13}i\right)$

k) $\frac{19-4i}{2-5i}+\frac{3+2i}{i}=$ $\left(Sol: 4\right)$

l) $\frac{2-i}{3+i}-\frac{1}{2i}=$ $\left(Sol: \frac{1}{2}\right)$

m) $\frac{(5-3i)(1+i)}{\overline{1-2i}}=$ $\left(Sol: \frac{12}{5}-\frac{14}{5}i\right)$

n) $\frac{(3+2i)^2+3-2i}{(5+i)^2}=$ $\left(Sol: \frac{73}{169}+\frac{40}{169}i\right)$

o) $\frac{(3-2i)(1+i)}{\overline{1+i}-2i}=$ $\left(Sol: \frac{1}{5}+\frac{8}{5}i\right)$

p) $\frac{\frac{1+i}{i}}{\frac{2+i}{1-i}}=$ $\left(Sol: -\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i\right)$

q) $\frac{3+2i}{i}-\frac{\overline{11+2i}}{3+4i}=$ $\left(Sol: 1-i\right)$

r) $\frac{10-10i}{i}+\frac{15-25i}{\overline{2+i}}=$ $\left(Sol: 1-17i\right)$

s) $\frac{1+ai}{a-i}=$ $\left(Sol: i\right)$

t) $\frac{-a+bi}{b+ai}=$ $\left(Sol: i\right)$

11. Calcular el inverso de cada uno de los siguientes complejos:

a) 3i $\left(Sol: -\frac{1}{3}i\right)$

b) 1+i $\left(Sol: \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$

c) 2+3i $\left(Sol: \frac{2}{13}-\frac{3}{13}i\right)$

d) 1–i $\left(Sol: \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

e) –2+i $\left(Sol: -\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\right)$

f) i $(Sol: -i)$

12. Calcular las siguientes **potencias sucesivas de i**:

a) $i^{12}=$ *(Soluc: 1)*

b) $i^{77}=$ *(Soluc: i)*

c) $i^{125}=$ *(Soluc: i)*

d) $i^{723}=$ *(Soluc: –i)*

e) $i^{2344}=$ *(Soluc: 1)*

f) $\frac{1}{i}=$ *(Soluc: –i)*

g) $\frac{1}{i^2}=$ *(Soluc: –1)*

h) $\frac{1}{i^3}=$ *(Soluc: i)*

i) $i^{-4}=$ *(Soluc: 1)*

j) $\frac{1}{i^5}=$ *(Soluc: –i)*

k) $i^{-6}=$ *(Soluc: –1)*

l) $i^{544}=$ *(Soluc: 1)*

m) $i^{6254}=$ *(Soluc: –1)*

n) $i^{-1}=$ *(Soluc: –i)*

o) $i^{-527}=$ *(Soluc: i)*

13. Calcular las siguientes **operaciones combinadas en forma binómica**:

a) $(2+i)^3=$ *(Soluc: 2+11i)*

b) $(1+i)^3=$ *(Soluc: –2+2i)*

c) $(2-3i)^3$ *(Soluc: –46–9i)*

d) i^{-131} *(Soluc: i)*

e) $\frac{i^7-1}{1+i}=$ *(Soluc: –1)*

f) $\frac{2i-1}{i^{45}}+\frac{4-3i}{1+2i}=$ *(Soluc: 4+2i)*

g) $\frac{(3-2i)^2+(2-3i)^2}{i^{12}+i^{-5}}=$ *(Soluc: 12–12i)*

h) $\frac{(2+3i)(1-i)-(3+4i)^2}{2i^{14}-i^{-7}}$ $\left(Soluc: -\frac{1}{5}+\frac{58}{5}i\right)$

i) $\frac{(3-2i)(3+i)-(2i-3)^2}{i^{23}-i^{13}}$ $\left(Soluc: -\frac{9}{2}+3i\right)$

j) $\frac{1-(2+3i)^2(1-2i)}{2i^{77}-i^{726}}$ $\left(Soluc: -\frac{62}{5}+\frac{14}{5}i\right)$

k) $\frac{(2+3i)(3-2i)-(2-3i)^2}{17(1-i^{13})}=$ *(Soluc: i)*

l) $-2-5i-\frac{10-10i-5(1+i)}{8+2i-(5+3i)}$ *(Soluc: –5–i)*

m) $\frac{(2-3i)^2-(2+3i)(3-2i)}{3i^{17}-1}=$ $\left(Soluc: -\frac{17}{5}+\frac{34}{5}i\right)$

n) $\frac{(3+i)(3-2i)-(2i-3)^2}{2i^{20}-i^{13}}+\frac{4}{5i}$ $\left(Soluc: \frac{3}{5}+4i\right)$

o) $\frac{(2-3i)^2-(2+3i)(3-2i)}{3i^{17}-1}-\frac{4}{5i^{-25}}$ $\left(Soluc: -\frac{17}{5}+6i\right)$

14. ¿Cuánto ha de valer **m** para que el complejo z=(m–2i) (2+4i) sea un número real? ¿E imaginario puro? ¿De qué números se trata? *(Soluc: m=1 o m=–4; z=10 y z=–20i, respectivamente)*

15. Determinar **x** para que el producto z=(2–5i) (3+xi) sea:

a) Un número real. ¿Qué número resulta? *(Soluc: x=15/2; z=87/2)*

b) Un número imaginario puro. ¿Qué complejo z se obtiene? *(Soluc: x=–6/5; z=–87i/5)*

16. a) Hallar **x** con la condición de que $(x-2i)^2$ sea un número imaginario puro. *(Soluc: x=±2)*

b) Ídem con $(3x-2i)^2$ *(Soluc: x=±2/3)*

c) Ídem con $(2+xi)^2$ *(Soluc: x=±2)*

17. Hallar **x** e **y** de modo que $\frac{3-xi}{1+2i}=y+2i$ *(Soluc: x=−16; y=7)*

18. Hallar **x** para que el cociente $\frac{x+3i}{3+2i}$ sea un número imaginario puro. ¿De qué número imaginario se trata? *(Soluc: x=−2; i)*

19. Determinar **k** para que el cociente $z=\frac{-2+ki}{k-i}$ sea:

a) Un número real. ¿Qué número resulta? $\left(Sol: k=\pm\sqrt{2};\ z=\pm\sqrt{2}\right)$

b) Un número imaginario puro. ¿Qué número es? $\left(Sol: k=0;\ z=-2i\right)$

20. Demostrar la siguiente igualdad, obtenida de manera fortuita por el insigne filósofo y matemático alemán Gottfried Leibniz (1646-1716):

$$\sqrt{1+\sqrt{3}\,i}+\sqrt{1-\sqrt{3}\,i}=\sqrt{6}$$

21. Hallar dos complejos de los que sabemos que su diferencia es un número real, su suma tiene la parte real igual a 1 y su producto es −7+i *(Soluc: 3+i y −2+i)*

22. Determinar los valores de **a** y **b** para que el complejo z=a+bi satisfaga la ecuación $z^2=\bar{z}$

$$\left(Soluc:\ z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ z_3=0,\ \ z_4=1\right)$$

23. Comprobar que los números complejos 2±3i verifican la ecuación $x^2-4x+13=0$

24. Hallar una ecuación polinómica cuyas raíces sean:

a) 1±3i *(Soluc: $x^2-2x+10=0$)*

b) 5±2i *(Soluc: $x^2-10x+29=0$)*

c) 2+i y 3+5i *(Soluc: $x^2-(5+6i)x+1+13i=0$)*

d) ±i *(Soluc: $x^2+1=0$)*

25. TEORÍA: Demostrar que si las raíces complejas de $Ax^2+Bx+C=0$ son a±bi, entonces:

$$A\left[(x-a)^2+b^2\right]=Ax^2+Bx+C$$

(Ayuda: Desarrollar el miembro izquierdo y aplicar las relaciones de Cardano-Vieta)

Forma polar de un complejo:

26. Representar los siguientes complejos, sus opuestos y sus conjugados:

a) $z_1=3+4i$ **b)** $z_2=1-i$ **c)** $z_3=-3+i$ **d)** $z_4=-2-5i$ **e)** $z_5=7i$

f) $z_6=-7$ **g)** i **h)** $-\sqrt{2}\,i$

27. Pasar a forma polar los siguientes complejos (**se recomienda representarlos previamente, para así elegir correctamente su argumento**):

a) $4+4\sqrt{3}\,i=$ *(Soluc: 8_{60°)*

b) $3-3\sqrt{3}\,i=$ *(Soluc: 6_{300°)*

c) $-\sqrt{2}+i=$ *(Soluc: $\sqrt{3}_{144^\circ\,44'}$)*

d) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i=$ *(Soluc: 2_{225°)*

e) $\sqrt{3}-i=$ *(Soluc: 2_{330°)*

f) $1+i$ *(Soluc: $\sqrt{2}_{45^\circ}$)*

g) $1-i$ *(Soluc: $\sqrt{2}_{315^\circ}$)*

h) $-1-i$ *(Soluc: $\sqrt{2}_{225^\circ}$)*

i) i *(Soluc: 1_{90°)*

j) $-i$ *(Soluc: 1_{270°)*

k) $3+4i$ *(Soluc: $5_{53^\circ\,8'}$)*

l) $3-4i$ *(Soluc: 5_{306°)*

m) $-3+4i$ *(Soluc: $5_{126^\circ\,52'}$)*

n) $-5+12i$ *(Soluc: $13_{112^\circ\,37'}$)*

o) $-8i$ *(Soluc: 8_{270°)*

p) 8 *(Soluc: 8_{0°)*

q) -8 *(Soluc: 8_{180°)*

r) $3+2i$ *(Soluc: $\sqrt{13}_{33^\circ 41'}$)*

s) $-2-5i$ *(Soluc: $\sqrt{29}_{248^\circ 12'}$)*

28. a) Hallar **m** para que el número complejo m+3i tenga módulo 5. Justificar gráficamente la solución. *(Soluc: m=±4)*

b) Hallar **m** para que su argumento sea 60º *(Soluc: m=√3)*

29. Hallar un número complejo tal que |z|=3 e Im(z)=-2. Justificar gráficamente la solución. *(Soluc: $z_1=\sqrt{5}-2i,\ z_2=-\sqrt{5}-2i$)*

30. Hallar un número complejo del 2º cuadrante que tiene por módulo 2 y tal que Re(z)=-1. Expresarlo en forma polar. Justificar gráficamente la solución. *(Soluc: $-1+\sqrt{3}\,i=2_{120^\circ}$)*

31. Hallar un complejo de argumento 45º tal que sumado a 1+2i dé un complejo de módulo 5 *(Soluc: 2+2i)*

32. Encontrar un complejo tal que sumándolo con 1/2 dé otro complejo de módulo $\sqrt{3}$ y argumento 60º *(Soluc: $\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{3}{2}i$)*

33. Pasar a forma binómica:

a) 4_{30° *(Soluc: $2\sqrt{3}+2i$)*

b) 4_{90°

c) 2_{0°

d) 5_{π}

e) $2_{3\pi/2}$

f) 1_{90°

g) 1_{30° *(Soluc: $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$)*

h) 2_{60° $\left(Soluc:\ 1+\sqrt{3}\,i\right)$

i) 6_{225° $\left(Soluc:\ -3\sqrt{2}-3\sqrt{2}i\right)$

j) 4_{120° $\left(Soluc:\ -2+2\sqrt{3}i\right)$

k) 2_{150° $\left(Soluc:\ -\sqrt{3}+i\right)$

l) 3_{60° $\left(Soluc:\ \frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)$

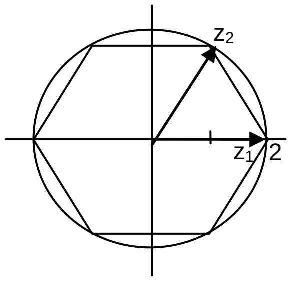
m) 3_{50° *(Soluc: 1,929+2,298i)*

n) 2_{180° *(Soluc: −2)*

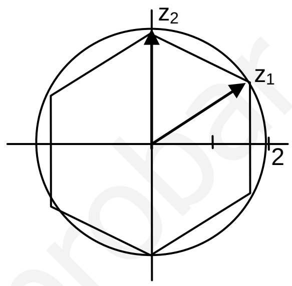
o) 1_{210° $\left(Soluc:\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$

34. Hallar los números complejos, en forma polar y binómica, que corresponden a los vértices de estos hexágonos:

a)



b)



(Soluc: a) $z_1=2_{0^\circ}=2$; $z_4=-z_1$; $z_2=2_{60^\circ}=1+\sqrt{3}i$; $z_6=\bar{z}_2$; $z_5=-z_2$; $z_3=-z_6$ b) $z_1=2_{30^\circ}=\sqrt{3}+i$; $z_4=-z_1$; $z_6=\bar{z}_1$; $z_3=-z_6$; $z_2=2_{90^\circ}=2i$; $z_5=-z_2$)

35. Determinar el valor de **a** para que el complejo z=(3−6i) (2−ai) sea:

a) Un número real. ¿De qué número se trata? *(Sol: a=−4; 30)*

b) Un número imaginario puro. ¿De qué número se trata? *(Sol: a=1; −15i)*

c) Tal que su afijo esté en la bisectriz del 1^er^ y 3^er^ cuadrantes. ¿De qué número se trata? *(Sol: a=6; −30−30i)*

36. Determinar el valor de **m** para que el complejo $z=\frac{2-mi}{8-6i}$ sea:

a) Un número real. ¿Qué número es? *(Soluc: m=3/2; 1/4)*

b) Imaginario puro. ¿Cuál en concreto? *(Soluc: m=−8/3; i/3)*

c) Tal que su afijo esté en la bisectriz del 2º y 4º cuadrantes. *(Soluc: m=14; 1−i)*

37. Determinar el valor de **a** para que el complejo z=(2+3i) (−2+ai) sea:

a) Un número real. *(Soluc: a=3)*

b) Un número imaginario puro. *(Soluc: a=−4/3)*

c) Tal que su afijo esté en la bisectriz del 1^er^ y 3^er^ cuadrantes. *(Soluc: a=−10)*

38. a) Dado $z=2_{45^\circ}$, hallar $\bar{z}$ en polar. *(Soluc: 2_{315°)*

b) Dado $z=1_{30^\circ}$, hallar $-z$

c) Si $z=2_{30^\circ}$, hallar su conjugado y su opuesto.

d) Hallar un número complejo y su opuesto sabiendo que su conjugado es $\bar{z}=3_{70^\circ}$

39. Representar las siguientes regiones del plano complejo:

a) $\mathrm{Im}(z)=-2$ *(Sol: recta horizontal)*

b) $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)$ *(Sol: bisectriz del 1er cuadrante)*

c) $-1<\mathrm{Re}(z)\le 3$ *(Sol: banda vertical)*

d) $\mathrm{Im}(z)<2$ *(Sol: semiplano)*

e) $|z|=5$ *(Sol: circunferencia)*

f) $|z|<3$ *(Sol: región circular)*

g) $-1\le|z|<3$ *(Sol: anillo)*

h) $\mathrm{Arg}(z)=30^{\circ}$ *(Sol: recta)*

i) $\mathrm{Re}(z)=-3$ *(Sol: recta vertical)*

j) $|z|\ge 4$

k) $\mathrm{Arg}(z)=90^{\circ}$

40. __TEORÍA__:

a) Demostrar que $|z|=\sqrt{z\cdot\overline{z}}$

b) Si $z=r_{\alpha}$, ¿qué relación tienen con z los números $r_{\alpha+180^{\circ}}$ y $r_{360^{\circ}-\alpha}$?

c) El producto de dos complejos imaginarios, ¿puede ser real? Poner un ejemplo.

d) ¿Qué relación existe entre el argumento de un complejo y el de su opuesto?

e) ¿Qué condición debe cumplir un número complejo z para que $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ *(Soluc: Su módulo tiene que ser 1)*

Producto y cociente en forma polar:

41. a) Dados los números complejos $3_{30^{\circ}}$ y $5_{60^{\circ}}$, comprobar que el producto en forma polar y en forma binómica dan el mismo complejo. *(Soluc: 15i)*

b) Ídem con 3i y 2–2i $\left(Soluc:\ 6+6i=6\sqrt{2}_{\,45^{\circ}}\right)$

42. Efectuar las siguientes operaciones en forma polar y pasar el resultado a binómica:

a) $3_{45^{\circ}}\cdot 2_{15^{\circ}}$ $\left(Soluc:\ 6_{60^{\circ}}=3+3\sqrt{3}\,i\right)$

b) $3_{150^{\circ}}\cdot 4_{45^{\circ}}$ $\left(Soluc:\ 12_{195^{\circ}}\cong -11{,}59-3{,}11i\right)$

c) $1_{33^{\circ}}\cdot 2_{16^{\circ}}\cdot 3_{41^{\circ}}$ $\left(Soluc:\ 6_{90^{\circ}}=6i\right)$

d) $3_{12^{\circ}}\cdot 4_{17^{\circ}}\cdot 2_{1^{\circ}}$ $\left(Soluc:\ 24_{30^{\circ}}=12\sqrt{3}+12i\right)$

e) $2_{106^{\circ}}:1_{61^{\circ}}$ $\left(Soluc:\ 2_{45^{\circ}}=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i\right)$

f) $9_{37^{\circ}}:3_{97^{\circ}}$ $\left(Soluc:\ 3_{300^{\circ}}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i\right)$

g) $(2_{40^{\circ}})^3$ $\left(Soluc:\ 8_{120^{\circ}}\cong -4+4\sqrt{3}i\right)$

h) $1_{33^{\circ}}:2_{16^{\circ}}\cdot 3_{41^{\circ}}$ $\left(Soluc:\ \left(\dfrac{3}{2}\right)_{58^{\circ}}\cong 0{,}79+1{,}27i\right)$

i) $3_{12^{\circ}}:4_{17^{\circ}}:2_{1^{\circ}}$ $\left(Soluc:\ \left(\dfrac{3}{8}\right)_{354^{\circ}}\cong 0{,}37-0{,}04i\right)$

43. El complejo de argumento 80º y módulo 12 es el producto de dos complejos; uno de ellos tiene de módulo 3 y argumento 50º. Escribir en forma binómica el otro complejo. $\left(Soluc:\ 2\sqrt{3}+2i\right)$

44. Efectuar las siguientes operaciones en forma polar y pasar el resultado a binómica:

a) $\dfrac{2_{15^{\circ}}\cdot 4_{135^{\circ}}}{8_{170^{\circ}}}=$ $\left(Soluc:\ 1_{340^{\circ}}\cong 0{,}94-0{,}34i\right)$

b) $\dfrac{2_{15^{\circ}}\cdot(1+i)}{2_{-15^{\circ}}\cdot(1-i)}=$ $\left(Soluc:\ 1_{120^{\circ}}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

c) $(1+\sqrt{3}\,i)(1+i)(\sqrt{3}-i)=$ $\left(Soluc:\ 4\sqrt{2}_{\,75^{\circ}}\cong 1{,}46+5{,}46i\right)$

45. Hallar el valor de α para que el producto $3_{\pi/2}\cdot 1_{\alpha}$ sea:

a) Un número real positivo. *(Soluc: $\alpha=3\pi/2$)*

b) Un número real negativo. *(Soluc: $\alpha=\pi/2$)*

46. Hallar el valor de α para que el cociente $5_\pi : 3_\alpha$ sea:

a) Un número real positivo. *(Soluc: $\alpha=\pi$)*

b) Un número real negativo. *(Soluc: $\alpha=0$)*

c) Un número imaginario puro con su parte imaginaria positiva. *(Soluc: $\alpha=\pi/2$)*

d) Un número imaginario puro con su parte imaginaria negativa. *(Soluc: $\alpha=3\pi/2$)*

e) " " " situado en la bisectriz del 2º cuadrante

47. Sin necesidad de efectuar el producto en binómica, hallar cuánto ha de valer **m** para que el complejo z=(m−2i) (2+4i) tenga módulo 10 *(Soluc: $m=\pm1$)*

48. Sin necesidad de efectuar el cociente, determinar el valor de **a** para que el módulo del complejo $z=\dfrac{a+2i}{1-i}$ sea 2 *(Soluc: $a=\pm2$)*

49. Hallar dos números complejos sabiendo que su producto es −8 y el cociente de uno entre el cuadrado del otro es la unidad. (Ayuda: utilizar la forma polar) *(Soluc: $z_1=4_{120^o}$ y $z_2=2_{60^o}$)*

50. Hallar dos números complejos sabiendo que su producto es 4 y el cociente de uno entre el cuadrado del otro es 2 $\left(\text{Soluc: } z_1=\left(2\sqrt[3]{4}\right)_{0^o} \text{ y } z_2=\left(\sqrt[3]{2}\right)_{0^o}\right)$

51. Interpretar geométricamente el resultado de multiplicar el complejo $z=a+bi=r_\alpha$ por la unidad imaginaria i.
(Soluc: Se trata de una rotación de 90º en el plano complejo)

52. Calcular cos 75º y sen 75º mediante el producto $1_{30^o}\cdot 1_{45^o}$ $\left(\text{Soluc: } \cos 75^o=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};\ \text{sen}\, 75^o=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$

Potencias en forma polar:

53. Calcular, aplicando el método más apropiado (es decir, operando en polar o en binómica) en cada caso; dar el resultado en forma binómica:

a) $(1+i)^2$ *(Soluc: 2i)*

b) $(2-2i)^2$ *(Soluc: −8i)*

c) $(1+i)^3$ *(Soluc: −2+2i)*

d) $(2+3i)^3$ *(Soluc: −46+9i)*

e) $(1-i)^4$ *(Soluc: −4)*

f) $(-2+i)^5$ *(Soluc: 38+41i)*

g) $\dfrac{(1+i)^2}{4+i}$ $\left(\text{Soluc: } \dfrac{2}{17}+\dfrac{8}{17}i\right)$

h) $\dfrac{2+i}{(1+i)^2}$ $\left(\text{Soluc: } \dfrac{1}{2}-i\right)$

i) $(i^4+i^{-13})^3$ *(Soluc: −2−2i)*

j) $(1+i)^{20}$ *(Soluc: −1024)*

k) $(-2+2\sqrt{3}\,i)^6$ *(Soluc: 4096)*

l) $\dfrac{i^7-i^{-7}}{2i}$ *(Soluc: −1)*

m) $(4-4\sqrt{3}\,i)^3$ *(Soluc: −512)*

n) $(-2+2\sqrt{3}\,i)^4$ $\left(\text{Soluc: } -128+128\sqrt{3}i\right)$

o) $(\sqrt{3}-i)^5$ $\left(\text{Soluc: } -16\sqrt{3}-16i\right)$

p) $\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3i}{2}\right)^3$ *(Soluc: 27i)*

q) $(-1+i)^{30}$ *(Soluc: $2^{15}i$)*

r) $\dfrac{(-1+i)^2}{(1+i)^3}$ $\left(\text{Soluc: } -\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}\right)$

s) $(2+2\sqrt{3}\,i)^4$ $\left(Soluc:\ -128-128\sqrt{3}i\right)$

t) $(4+4\sqrt{3}\,i)^4$ $\left(Soluc:\ -2048-2048\sqrt{3}i\right)$

u) $(2+2\sqrt{3}\,i)^2$ $\left(Soluc:\ -8+8\sqrt{3}i\right)$

v) $(1+i)^5$ *(Soluc: −4−4i)*

w) $(1+2i)^3$

x) $(2+i^5)^3$ *(Soluc: 2+5i)*

y) $(3+3i)^5$ *(Soluc: −972−972i)*

z) $\dfrac{\left(2\sqrt{3}-2i\right)^8}{\left(-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,i\right)^6}$ $\left(Soluc:\ \left(\dfrac{1}{4}\right)_{30^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}+\dfrac{1}{8}i\right)$

α) $\dfrac{(1-\sqrt{3}\,i)^3\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)}{(-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i)^2}$ $\left(Soluc:\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

β) $\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i)^2\ (-1-i)^4}{(-1+i)^3\ i^7}$ $\left(Soluc:\ 4\sqrt{2}_{135^\circ}=-4+4i\right)$

γ) $\dfrac{(-2\sqrt{3}-2\,i)^5}{(-4+4\sqrt{3}\,i)^3\ 2i}$ $\left(Soluc:\ 1_{240^\circ}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

δ) $\dfrac{(-2\sqrt{3}-2\,i)^4}{(-1+\sqrt{3}\,i)^3\ (2-2i)^2}=$ $\left(Soluc:\ 4_{210^\circ}=-2\sqrt{3}-2i\right)$

ε) $\dfrac{\left(2-2\sqrt{3}\,i\right)^3}{\left(-\sqrt{3}+i\right)^4\cdot i}=$ $\left(Soluc:\ 2_{210^\circ}=-\sqrt{3}-i\right)$

ζ) $\left[\dfrac{\left(-\sqrt{3}+i\right)\left(-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i\right)}{-6}\right]^3$ *(Soluc: −i)*

54. Dados los complejos $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=3i$ y $z_3=1+i$, calcular las siguientes expresiones, dando el resultado en binómica:

a) $\dfrac{z_1+z_2}{z_3}$ **b)** $z_1\cdot z_3$ **c)** $(z_1)^4$ **d)** $\overline{z_2}$ $\left(Sol:\ a)\ \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}i;\ b)(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-)i;\ c)-8+8\sqrt{3}i;\ d)-3i\right)$

55. Dado el complejo $z=\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$, calcular $z^5\cdot\overline{z}$ *(Soluc: −64)*

56. **a)** Aplicando la fórmula de De Moivre[1], hallar sen 3α y cos 3α. Comprobar las expresiones obtenidas sustituyendo valores apropiados de α (p.ej. α=30º)

(Soluc: sen 3α=3sen α−4sen^{3}α; cos 3α=4cos^{3}α−3cos α)

b) Ídem para sen 4α y cos 4α

c) Ídem para las ya conocidas sen 2α y cos 2α

Raíces de un nº complejo:

57. Calcular las siguientes raíces (dando el resultado en binómica en aquellos apartados marcados con **(*)**), y representarlas en el plano complejo:

a) $\sqrt[4]{1+i}$ $\left(Soluc:\ \sqrt[8]{2}_{11,25^\circ};\ \sqrt[8]{2}_{101,25^\circ};\ \sqrt[8]{2}_{191,25^\circ};\ \sqrt[8]{2}_{281,25^\circ}\right)$

b) $\sqrt[3]{1-i}$ $\left(Soluc:\ \sqrt[6]{2}_{105^\circ};\ \sqrt[6]{2}_{225^\circ};\ \sqrt[6]{2}_{345^\circ}\right)$

(*) c) $\sqrt[4]{\dfrac{-4}{1-\sqrt{3}\,i}}$ $\left(Soluc:\ \sqrt[4]{2}_{60^\circ};\ \sqrt[4]{2}_{150^\circ};\ \sqrt[4]{2}_{240^\circ};\ \sqrt[4]{2}_{330^\circ}\right)$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{-1+3i}{2-i}}$ $\left(Soluc:\ \sqrt[6]{2}_{45^\circ};\ \sqrt[6]{2}_{165^\circ};\ \sqrt[6]{2}_{285^\circ}\right)$

(*) e) $\sqrt[3]{-i}$ $\left(Soluc:\ i;\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pm\dfrac{1}{2}i\right)$

[1] Abraham De Moivre (1667-1754), matemático francés. Como dato curioso, parece ser que predijo exactamente la fecha de su propia muerte: se dio cuenta de que cada día dormía 15 minutos más que el día anterior; a partir de ahí, conjeturó que el descanso eterno le llegaría el día que durmiera durante 24 horas. Ese día aciago, calculado por él mismo, fue el 27 de noviembre de 1754.

(*) f) $\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i}$ $\left(Soluc: \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i;\ -0,97+0,26i;\ 0,26-0,97i\right)$

(*) g) $\sqrt{i}$ $\left(Soluc: \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

h) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$ $(Soluc: 0,89_{95^o};\ 0,89_{215^o};\ 0,89_{335^o})$

(*) i) $\sqrt[3]{8i}$ $(Soluc: 2i;\ \pm\sqrt{3}+i)$

(*) j) $\sqrt[4]{-1}$ $\left(Soluc: \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

(*) k) $\sqrt[3]{8}$ $(Soluc: 2;\ -1\pm\sqrt{3}\,i)$

(*) l) $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}\,i}$ $\left(Soluc: \frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i;\ -\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i;\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)$

m) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}\,i}$ $(Soluc: 2_{100^o};\ 2_{220^o};\ 2_{340^o})$

(*) n) $\sqrt[3]{\frac{8+8i}{1-i}}$ $\left(Soluc: -2i;\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}+i\right)$

o) $\sqrt[4]{-2+2i}$ $(Soluc: \sqrt[8]{8}_{\,33,75^o};\ \sqrt[8]{8}_{\,123,75^o};\ \sqrt[8]{8}_{\,213,75^o};\ \sqrt[8]{8}_{\,303,75^o})$

(*) p) $\sqrt[4]{-16}$ $(Soluc: \pm\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i)$

q) $\sqrt[5]{-243}$ $(Soluc: 3_{30^o};\ 3_{108^o};\ 3_{180^o};\ 3_{252^o};\ 3_{324^o})$

(*) r) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}\,i}$ $(Soluc: \sqrt{3}+i;\ -1+\sqrt{3}\,i;\ -\sqrt{3}-i;\ 1-\sqrt{3}\,i)$

(*) s) $\sqrt[3]{\frac{-1-i}{-1+i}}$

(*) t) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i}$

(*) u) $\sqrt[3]{\frac{-8+8i}{1+i}}$

(*) v) $\sqrt[4]{\frac{-4}{1-\sqrt{3}\,i}}$

(*) w) $\sqrt[4]{\frac{-16i}{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}}$

x) $\sqrt[3]{-1}$

y) $\sqrt{-36}$

z) $\sqrt[3]{-27}$

α) $\sqrt[6]{729i}$

β) $\sqrt[4]{16_{180^o}}$

(*) γ) $\sqrt[4]{\frac{8\sqrt{3}+8i}{-\sqrt{3}+i}}$ $\left(Soluc: \frac{\sqrt[4]{8}}{2}+\frac{\sqrt[4]{72}}{2}i;\ -\frac{\sqrt[4]{72}}{2}+\frac{\sqrt[4]{8}}{2}i;\ -\frac{\sqrt[4]{8}}{2}-\frac{\sqrt[4]{72}}{2}i;\ \frac{\sqrt[4]{72}}{2}-\frac{\sqrt[4]{8}}{2}i\right)$

(*) δ) $\sqrt[3]{\frac{i^6+i^{-6}}{-2i}}$

58. <u>TEORÍA</u>:

a) El número 4+3i es la raíz cuarta de un cierto complejo z; hallar las otras tres raíces.

b) ¿Pueden ser 2+i, –2+i, –1–2i y 1–2i las raíces cuartas de un complejo? Justificar la respuesta.

c) ¿Pueden ser 2_{28^o}, 2_{100^o}, 2_{172^o}, 2_{244^o} y 2_{316^o} las raíces de un complejo? ¿De cuál?

d) El complejo 3_{40^o} es vértice de un pentágono regular. Hallar los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.

e) Una de las raíces cúbicas de un número complejo z es i+i. Hallar z y las otras raíces cúbicas.

59. a) Hallar las raíces cúbicas de la unidad en forma binómica, y dibujarlas.

$\left(\mathit{Soluc:} 1;\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$

b) Hallar las raíces cuartas de la unidad en forma binómica, y dibujarlas.

$(\mathit{Soluc:} \pm 1;\ \pm i)$

c) Hallar las raíces quintas de la unidad en forma polar, y dibujarlas.

$(\mathit{Soluc:} 1_{0^o;} 1_{72^o;} 1_{144^o};\ 1_{216^o;} 1_{288^o})$

d) Hallar las raíces sextas de la unidad en forma binómica, y dibujarlas.

$\left(\mathit{Soluc:} \pm 1;\ \pm\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$

60. Resolver las siguientes ecuaciones en el campo de los complejos. Dibujar los afijos de las raíces:

a) $x^3+8=0$ *(Soluc:* $-2,\ 1\pm\sqrt{3}\,i$*)*

b) $x^4-16=0$ *(Soluc:* $\pm 2,\ \pm 2i$*)*

c) $ix^4+16=0$

d) $x^4+1=0$ $\left(\mathit{Soluc:} \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$