

- Resuelve una de las siguientes ecuaciones trigonométricas, dando todas las posibles soluciones:
 - $\cos 4x + \cos 2x = \cos x$
 - $4 \operatorname{sen} x + 2 \cos 2x = 3$
 - $\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x = \sqrt{3}$
- Resuelve uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, dando las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$:
 - $$\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \\ x - y = 30^\circ \end{cases}$$
 - $$\begin{cases} y + \operatorname{sen}^2 x = 2 \\ y + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$
 - $$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ \cos 2x + \cos 2y = -1 \end{cases}$$
- Dado el triángulo ABC con $a = 1$ m, $B = 30^\circ$ y $C = 45^\circ$:
 - Resuelve el triángulo.
 - Calcula su área.
- Realiza uno de los dos apartados siguientes:
 - Calcula el valor de la siguiente expresión, simplificando el resultado: $\frac{\operatorname{cotg} 150^\circ - \operatorname{cosec} 315^\circ}{\operatorname{sec} 120^\circ - \operatorname{tg} 240^\circ}$
 - Simplifica todo lo que puedas la expresión $\frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}$
- Realiza la siguiente operación con números complejos, expresando el resultado en forma polar y trigonométrica:
$$\sqrt[5]{\frac{-8 - 8\sqrt{3}i}{(-2\sqrt{3} + 2i)^2}}$$
- Encuentra las posibles soluciones, en forma binómica, de la siguiente ecuación: $z^5 + 125z^2 = 0$.

Soluciones

1. Resuelve una de las siguientes ecuaciones trigonométricas, dando todas las posibles soluciones:

a) $\cos 4x + \cos 2x = \cos x$

Por un lado:

$$\cos 4x = \cos(3x + x) = \cos 3x \cdot \cos x - \sin 3x \cdot \sin x$$

y, por otro:

$$\cos 2x = \cos(3x - x) = \cos 3x \cdot \cos x + \sin 3x \cdot \sin x$$

Sumando las dos igualdades anteriores obtenemos:

$$\cos 4x + \cos 2x = 2 \cos 3x \cdot \cos x$$

Entonces la ecuación que hemos de resolver es equivalente a:

$$2 \cos 3x \cdot \cos x = \cos x \Leftrightarrow 2 \cos 3x \cdot \cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2 \cos 3x - 1) = 0$$

Hay dos posibilidades.

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = 90^\circ + 180^\circ k$ (en radianes sería $\frac{\pi}{2} + k\pi$).
- $2 \cos 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x = 60^\circ + 360^\circ k$, o bien $3x = 300^\circ + 360^\circ k \Leftrightarrow x = 20^\circ + 120^\circ k$
(en radianes sería $\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$), o bien $x = 100^\circ + 120^\circ k$ (en radianes sería $\frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$).

b) $4 \sin x + 2 \cos 2x = 3 \Leftrightarrow 4 \sin x + 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 3 \Leftrightarrow 4 \sin x + 2(1 - \sin^2 x - \sin^2 x) = 3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 4 \sin x + 2(1 - 2 \sin^2 x) = 3 \Leftrightarrow -4 \sin^2 x + 4 \sin x - 1 = 0.$

Llamando $\sin x = t$, tenemos $-4t^2 + 4t + 1 = 0$, ecuación de segundo grado cuya solución es

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-4)} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}. \text{ Así pues } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 30^\circ + 360^\circ k, \text{ o bien } x = 120^\circ + 360^\circ k$$

(en radianes serían $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, o bien $x = \frac{2\pi}{6} + 2k\pi$).

c) $\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 1 - \cos x = \sqrt{3} \sin x \Leftrightarrow 1 - \cos x = \sqrt{3} \sqrt{1 - \cos^2 x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos x = \sqrt{3 - 3 \cos^2 x}. \text{ Elevando ambos miembros al cuadrado: } 1 - 2 \cos x + \cos^2 x = 3 - 3 \cos^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^2 x - 2 \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0. \text{ Llamando } \cos x = t, \text{ tenemos } 2t^2 - t - 1 = 0,$$

ecuación de segundo grado cuyas soluciones son $t = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

- Si $t = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0^\circ + 360^\circ k = 360^\circ k$ (en radianes $x = 2k\pi$). Esta solución habría que descartarla pues $\operatorname{cosec} x$ y $\operatorname{cotg} x$ no están definidas para $x = 2k\pi$.
- Si $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 120^\circ + 360^\circ k$, o bien $x = 240^\circ + 360^\circ k$ (en radianes $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, o bien $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$). La segunda solución habría que descartarla pues:

$$\text{Por un lado, } \operatorname{cosec} 240^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 240^\circ} = \frac{1}{-\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{1}{-\sqrt{3}/2} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Y, por otro lado, } \operatorname{cotg} 240^\circ = \operatorname{cotg} 60^\circ = \frac{\cos 60^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Así pues } \operatorname{cosec} 240^\circ - \operatorname{cotg} 240^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}.$$

Lo que ocurre es que al elevar al cuadrado los signos se convierten a positivos.

2. Resuelve uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, dando las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$:

$$\text{a) } \begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \\ x - y = 30^\circ \end{cases}$$

Como $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$, y de la primera ecuación se deduce que

$\cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = 0$, entonces $\cos(x+y) = 0$. De la segunda ecuación $x = 30^\circ + y$. Por tanto

$$\cos(30^\circ + 2y) = 0 \Leftrightarrow 30^\circ + 2y = \begin{cases} 90^\circ \\ 270^\circ \end{cases} \Leftrightarrow 2y = \begin{cases} 60^\circ \\ 240^\circ \end{cases} \Leftrightarrow y = \begin{cases} 30^\circ \\ 120^\circ \end{cases} = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \\ \frac{2\pi}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Como } x = 30^\circ + y \Rightarrow x = \begin{cases} 60^\circ \\ 150^\circ \end{cases} = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \frac{5\pi}{6} \end{cases}.$$

Por tanto hay dos parejas de soluciones $(x_1, y_1) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$, $(x_2, y_2) = \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$.

Recuérdese que las soluciones había que darlas en el intervalo $[0, 2\pi]$.

$$\text{b) } \begin{cases} y + \operatorname{sen}^2 x = 2 \\ y + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

Restando ambas ecuaciones se obtiene:

$$\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = -1 \Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$y + \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2} = 2 \Leftrightarrow y + 1 = 2 \Leftrightarrow y = 1.$$

$$\text{c) } \begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ \cos 2x + \cos 2y = -1 \end{cases}$$

Observemos que $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$.

De la misma manera, $\cos 2y = 2\cos^2 y - 1$.

Sustituyendo en la segunda ecuación: $2\cos^2 x - 1 + 2\cos^2 y - 1 = -1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\cos^2 y = 1$.

Despejando $\cos x$ de la primera ecuación y sustituyendo en esta última obtenemos:

$$2(1 - \cos y)^2 + 2\cos^2 y = 1 \Leftrightarrow 2(1 + \cos^2 y - 2\cos y) + 2\cos^2 y = 1 \Leftrightarrow 4\cos^2 y - 4\cos y + 1 = 0.$$

Haciendo $\cos y = t$, tenemos la ecuación $4t^2 - 4t + 1 = 0$ (la misma que aparece en el apartado b) del

ejercicio 1), cuya solución es $t = \frac{1}{2}$. Entonces $\cos y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \frac{5\pi}{3} \end{cases}$

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema:

$$\cos x + \cos y = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 - \cos y \Leftrightarrow \cos x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

Tenemos pues dos parejas de soluciones: $(x_1, y_1) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, $(x_2, y_2) = \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$

3. Recordemos que en el triángulo ABC , $a = 1$ m, $B = 30^\circ$ y $C = 45^\circ$.

a) En primer lugar $A = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$.

Por el teorema de los senos: $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} 105^\circ} = \frac{b}{\operatorname{sen} 30^\circ} \Leftrightarrow b = \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen} 105^\circ} \Leftrightarrow b \approx 0,518$ m.

Análogamente: $\frac{1}{\operatorname{sen} 105^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} 45^\circ} \Leftrightarrow c = \frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{\operatorname{sen} 105^\circ} \Leftrightarrow c \approx 0,732$ m.

b) Utilicemos una de las fórmulas conocidas para calcular el área A del triángulo:

$$A = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,518 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,183 \text{ m}^2.$$

4. Realiza uno de los dos apartados siguientes:

a) Calcula el valor de la siguiente expresión, simplificando el resultado: $\frac{\operatorname{cotg} 150^\circ - \operatorname{cosec} 315^\circ}{\operatorname{sec} 120^\circ - \operatorname{tg} 240^\circ}$

$$\frac{\operatorname{cotg} 150^\circ - \operatorname{cosec} 315^\circ}{\operatorname{sec} 120^\circ - \operatorname{tg} 240^\circ} = \frac{\frac{\cos 150^\circ}{\operatorname{sen} 150^\circ} - \frac{1}{\operatorname{sen} 315^\circ}}{\frac{1}{\cos 120^\circ} - \frac{\operatorname{sen} 240^\circ}{\cos 240^\circ}} = \frac{\frac{-\cos 30^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} - \frac{1}{-\operatorname{sen} 45^\circ}}{\frac{1}{-\cos 60^\circ} - \frac{-\operatorname{sen} 60^\circ}{-\cos 60^\circ}} =$$

$$= \frac{\frac{-\sqrt{3}/2}{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2}/2}}{\frac{1}{-1/2} - \frac{\sqrt{3}/2}{1/2}} = \frac{-\sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{2}}}{-2 - \sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{2}}{-2 - \sqrt{3}} = \frac{(-\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (-2 + \sqrt{3})}{(-2 - \sqrt{3}) \cdot (-2 + \sqrt{3})} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} - 3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4 - 3} = \sqrt{6} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 3$$

b) Simplifica todo lo que puedas la expresión $\frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} &= \frac{\operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{(1 + 2 \cos \alpha) \operatorname{sen} \alpha}{(1 + 2 \cos \alpha) \cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

5. Realiza la siguiente operación con números complejos, expresando el resultado en forma polar y trigonométrica:

$$\sqrt[5]{\frac{-8 - 8\sqrt{3}i}{(-2\sqrt{3} + 2i)^2}}$$

Por un lado se tiene $(-2\sqrt{3} + 2i)^2 = (-2\sqrt{3})^2 + 2(-2\sqrt{3})(2i) + (2i)^2 = 12 - 8\sqrt{3}i - 4 = 8 - 8\sqrt{3}i$.

$$\begin{aligned} \text{Por tanto } \frac{-8 - 8\sqrt{3}i}{(-2\sqrt{3} + 2i)^2} &= \frac{-8 - 8\sqrt{3}i}{8 - 8\sqrt{3}i} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{(-1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)}{(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)} = \frac{-1 - 2\sqrt{3}i - 3i^2}{1 - 3i^2} = \\ &= \frac{-1 - 2\sqrt{3}i + 3}{1 + 3} = \frac{2 - 2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

La parte real de este número complejo es $x = \frac{1}{2}$, y la parte imaginaria es $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

El módulo r del número complejo es: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$.

El argumento α del mismo es: $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}/2}{1/2} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = 120^\circ$.

Por tanto, el número complejo del cual tenemos que hallar su raíz quinta es, en forma polar: $z = 1_{120^\circ}$.

Hay cinco soluciones para $\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{1_{120^\circ}}$.

Todas tienen módulo $r = 1$ (pues la raíz quinta de 1 es 1) y argumento

$$\frac{\alpha}{n} + \frac{360^\circ k}{n} = \frac{120^\circ}{5} + \frac{360^\circ k}{5} = 24^\circ + 72^\circ k.$$

Para $k = 0, 1, 2, 3, 4$ obtenemos los cinco argumentos (hasta formar un pentágono regular), que son:

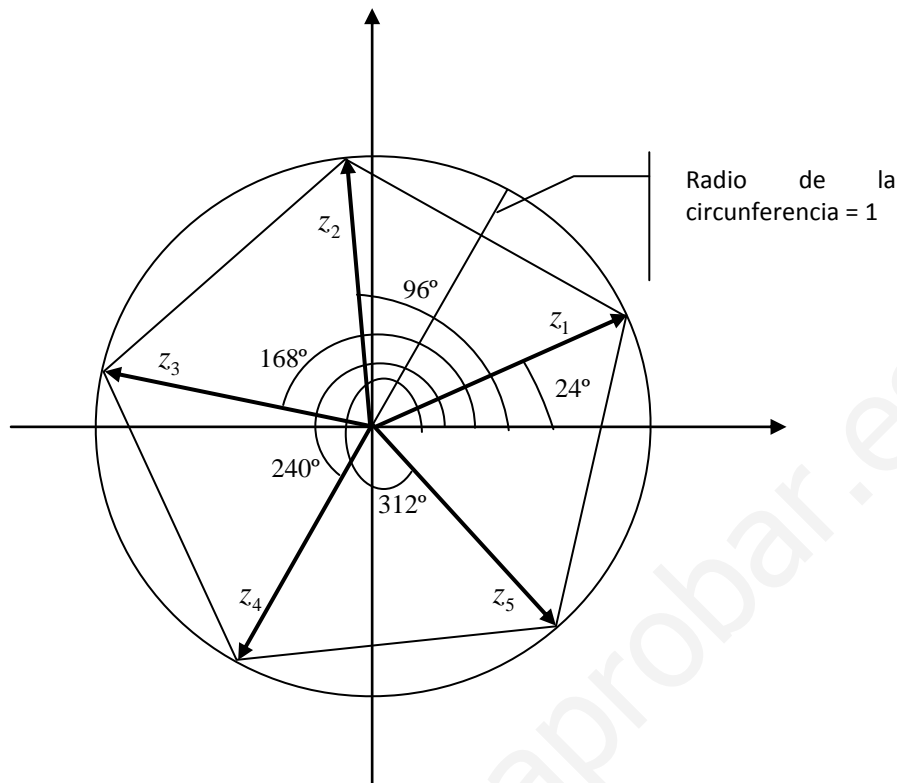
$$\alpha_1 = 24^\circ, \alpha_2 = 96^\circ, \alpha_3 = 168^\circ, \alpha_4 = 240^\circ, \alpha_5 = 312^\circ.$$

Las cinco raíces son pues, en forma polar (ver figura de la página siguiente):

$$z_1 = 1_{24^\circ}, z_2 = 1_{96^\circ}, z_3 = 1_{168^\circ}, z_4 = 1_{240^\circ}, z_5 = 1_{312^\circ}$$

En forma trigonométrica cada raíz z_k adoptaría la forma $z_k = r_k (\cos \alpha_k + i \operatorname{sen} \alpha_k)$. Como $r_k = 1$, se tiene:

$$z_1 = \cos 24^\circ + i \operatorname{sen} 24^\circ, \quad z_2 = \cos 96^\circ + i \operatorname{sen} 96^\circ, \quad z_3 = \cos 168^\circ + i \operatorname{sen} 168^\circ, \quad z_4 = \cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ, \\ z_5 = \cos 312^\circ + i \operatorname{sen} 312^\circ$$



6. Encuentra las posibles soluciones, en forma binómica, de la siguiente ecuación: $z^5 + 125z^2 = 0$.

Esta ecuación es la misma que $z^2(z^3 + 125) = 0$. Hay que encontrar números cuyo cuadrado sea 0, y cuyo cubo sea -125 . En el primer caso es claro que $z = 0$ (se dice que es solución "doble"). En el segundo caso es $z = \sqrt[3]{-125}$. Una solución es, claramente, $z = -5$. Las otras dos que faltan son complejas, en polar, $z_k = r_\alpha$:

$$r = \sqrt[3]{125} = 5, \quad \alpha = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{3} = 60^\circ + 120^\circ k.$$

Por tanto las raíces, y soluciones de $z = \sqrt[3]{-125}$, son:

- $k = 0 \Rightarrow \alpha = 60^\circ \Rightarrow z_1 = 5_{60^\circ} = 5(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i.$
- $k = 1 \Rightarrow \alpha = 180^\circ \Rightarrow z_1 = 5_{180^\circ} = 5(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ) = -5$ (esta es la solución real que habíamos obtenido anteriormente).
- $k = 2 \Rightarrow \alpha = 300^\circ \Rightarrow z_1 = 5_{300^\circ} = 5(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ) = \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i.$