GLOBAL ANÁLISIS

1) Halla el valor de a para que la función *f* sea continua en todo R. (1,5 puntos)

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{x} & \text{si } x \le -1 \\ x^2-3 & \text{si } -1 < x \end{cases}$$

Representa gráficamente la función (para ese valor de a)

2) Calcula las siguientes derivadas: (3 puntos)

a) $y=(x^2+2)\cdot 2^{1-3x}$

b) $y=\ln\left(\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)$

c) $y=\sqrt{\cos x - \operatorname{sen} x}$

d) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}$

3) Haz un estudio lo más completo posible de la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$ y represéntala gráficamente. (2 puntos)

4) Halla razonadamente un punto de la función $y=x^2+x+1$ en el que la recta tangente sea paralela a la recta de ecuación $y=3x+7$. Halla también la ecuación de dicha recta tangente. (1,5 puntos)

5) Halla las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-4}$ y estudia su continuidad.

(2 puntos)

SOLUCIONES

1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{x} & \text{si } x \le -1 \rightarrow \text{CONTINUA en } (-\infty,-1) \\ x^2-3 & \text{si } -1 < x \rightarrow \text{CONTINUA en } (-1,+\infty) \end{cases}$

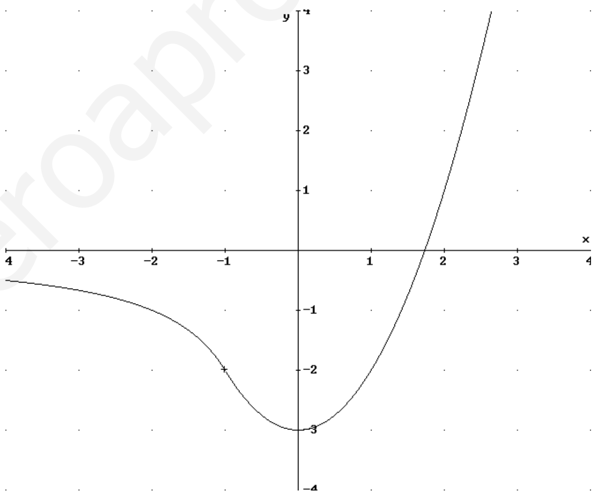
Sólo nos falta que sea continua en x = -1 , para lo cual, tienen que coincidir:

- $f(-1)=\dfrac{a}{-1}=-a$
- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{a}{x}=-a$ $\qquad\qquad -a=-2 \Rightarrow a=2$
- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x^2-3)=-2$

Gráfica de $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{si } x \le -1 \rightarrow \text{trozo de hipérbola} \\ x^2-3 & \text{si } -1 < x \rightarrow \text{trozo de parábola} \end{cases}$

Parábola con vértice en $(0,-3)$ y cortando al eje OX en $\sqrt{3}$

Hipérbola con asíntotas los ejes de coordenadas



2) a) $y=(x^2+2)\cdot 2^{1-3x}$

$y'=2x\cdot 2^{1-3x}+(x^2+2)\cdot 2^{1-3x}\cdot \ln 2\cdot(-3) \rightarrow y'=\left[2x-3(x^2+2)\ln 2\right]2^{1-3x}$

b) $y=\ln\left(\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) \rightarrow y'=\dfrac{1}{\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}}\cdot\dfrac{e^{-x}(1+e^{-x})-(1-e^{-x})(-e^{-x})}{\left(1+e^{-x}\right)^2}=\dfrac{2e^{-x}}{1-e^{-2x}}$

c) $y=\sqrt{\cos x-\operatorname{sen} x} \rightarrow\ y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\cos x-\operatorname{sen} x}}\cdot(-\operatorname{sen} x-\cos x)=\dfrac{-\operatorname{sen} x-\cos x}{2\sqrt{\cos x-\operatorname{sen} x}}$

d) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x+1} \rightarrow y'=\dfrac{1}{1+\left(\sqrt{x+1}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{2(2+x)\sqrt{x+1}}$

3) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$ **Asíntotas:** Verticales: $x^2-4=0 \rightarrow x=\pm 2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{x^2-4}=\frac{4}{0}\left\langle\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2}{x^2-4}=\dfrac{4}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2}{x^2-4}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty\end{array}\right.$$

x = 2 A.V. de ramas divergentes

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2}{x^2-4}=\frac{4}{0}\left\langle\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^2}{x^2-4}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^2}{x^2-4}=\dfrac{4}{0^-}=-\infty\end{array}\right.$$

x = -2 A.V. de ramas divergentes

Horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2}{x^2-4}=1$ y también $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{x^2-4}=1$

Asíntota horizontal y = 1, veamos si la gráfica está por encima o por debajo:

Para x = 1000 $\rightarrow \dfrac{1000^2}{1000^2-4}>1$ para x = -1000 $\rightarrow \dfrac{(-1000)^2}{(-1000)^2-4}>1$

Luego en ambos lados está por encima

Puntos de corte con los ejes:

Para y = 0

$$\frac{x^2}{x^2-4}=0\Rightarrow x=0$$

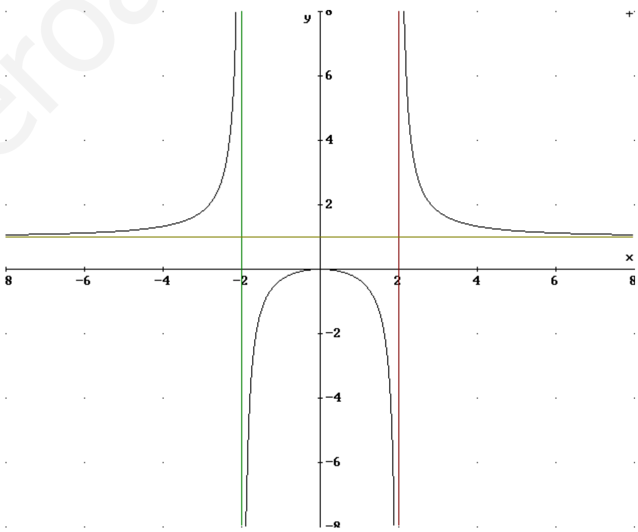
Para x = 0 $\rightarrow y=0$

Puntos singulares:

$$y'=\frac{2x(x^2-4)-x^2\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$$

$$y'=\frac{-8x}{(x^2-4)^2}=0\Rightarrow -8x=0\Rightarrow x=0$$

$\rightarrow (0,0)$, vemos que es un máximo.



4) Halla razonadamente un punto de la función $y=x^2+x+1$ en el que la recta tangente sea paralela a la recta de ecuación $y=3x+7$. Halla también la ecuación de dicha recta tangente. $y'=2x+1=m=3$ (paralela, misma pendiente)

$2x+1=3\Rightarrow 2x=2\Rightarrow x=1$ el punto es el $(1,3)$

Recta tangente en el punto $(1,3)$: $y=3(x-1)+3\rightarrow y=3x$

5) $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-4}$, esta función es una función racional, continua en su dominio que es $Dom(f)=R-\{-2,2\}$, veamos que tipo de discontinuidad hay en esos dos puntos:

En x = 2

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x(x^2-5x+6)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

En x = 2 tiene, por lo tanto, una discontinuidad evitable, ya que existe el límite en el punto, aunque la función no está definida en el mismo.

En x = -2

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-4}=\frac{-8-20-12}{0}=\frac{-40}{0}=\pm\infty$$

luego, en x = -2, tiene una discontinuidad de salto infinito, o más claro, una asíntota vertical de ramas divergentes.

También tiene una asíntota oblicua $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-5x^2+6x}{x^3-4x}=1$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-4}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3-5x^2+6x-x^3+4x}{x^2-4}\right]=-5$$

La asíntota oblicua es: $y=x-5$