EXAMEN : Funciones, límites y continuidad

1.- Halla los siguientes límites:

a) $lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ b) $lim_{x \to -1} \frac{x^2-x-2}{|x+1|}$ c) $\lim_{x \to 2} \frac{3x^3-11x^2+12x-4}{3x^2-8x+4}$

2.- Dadas las funciones f(x) = $\frac{3}{x}$ y g (x) =$\frac{x-3}{3x+1}$, halla y simplifica las expresiones de :

a) (g o f) (x) b) (f o g) (x) c) g^{-1} (x)

3.- Representa la función y = $\frac{x^2+2x-3}{x}$ a partir de su dominio, cortes con los ejes y asíntotas.

4.- Representa y da la expresión analítica (= fórmula) de la función que da la temperatura en función del tiempo, en horas, y que describe la siguiente situación :

A las 0 h, el termómetro marcaba 3ºC y empezó a descender de forma uniforme de manera que a las 4 de la mañana marcaba - 2ºC. Así se mantuvo hasta las 8 de la mañana, hora en la que la temperatura comenzó a ascender, también uniformemente, hasta llegar a los 4ºC a las 10 de la mañana.

SOLUCIÓN EXAMEN FUNCIONES

1.-a) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \dfrac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x\to 3} \dfrac{x+6-9}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} =$

$=\lim_{x\to 3} \dfrac{1}{(\sqrt{x+6}+3)} = \dfrac{1}{\sqrt{3+6}+3} = \dfrac{1}{6}$

b) $\dfrac{(-1)^2-(-1)+2}{|-1+1|} = \dfrac{4}{0}$ Estudiamos los límites por la derecha y por la izquierda

Para x = -1,001, $\dfrac{(-1.001)^2-(-1.001)+2}{|-1.001+1|} = 4003.0$ $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \infty$

Para x = -0.999 $\dfrac{(-0.999)^2-(-0.999)+2}{|-0.999+1|} = 3997.0$ $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \infty$

Por lo tanto el límite existe y su valor es ∞

c) $3x^3-11x^2+12x-4 = (x-1)(x-2)(3x-2)$ $3x^2-8x+4 = (3x-2)(x-2)$

$lim_{x\to 2} \dfrac{3x^3-11x^2+12x-4}{3x^2-8x+4} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-1)(x-2)(3x-2)}{(3x-2)(x-2)} = \lim_{x\to 2}(x-1) = 1$

2º.-

a) (g o f) (x) =

$x \to \dfrac{3}{x} \to \dfrac{\frac{3}{x}-3}{3.\frac{3}{x}+1} = \dfrac{\frac{3-3x}{x}}{\frac{9+x}{x}} = \dfrac{3-3x}{9+x}$

b) (f o g) (x) =

$x \to \dfrac{x-3}{3x+1} \to \dfrac{3}{\frac{x-3}{3x+1}} = \dfrac{9x+3}{x-3}$

c) $g^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{1-3x}$

$y = \dfrac{x-3}{3x+1}$; $3xy+y = x-3$; $y+3 = x-3xy$

$y+3 = x(1-3y) \to \dfrac{y+3}{1-3y} = x$

3.- Dominio : R - $\{0\}$

Cortes eje Y : no se puede hacer x = 0 luego no hay

Cortes eje X; si x = 0, $x^2+2x-3 = 0$, $\{x=-3\}, \{x=1\}$

Asíntotas verticales; x = 0

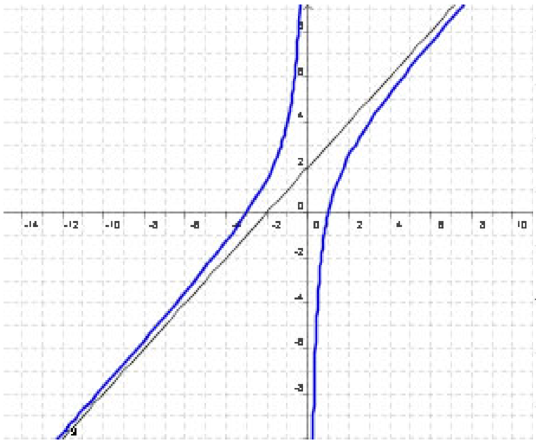
$\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+2x-3}{x} = \infty$ $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+2x-3}{x} = -\infty$

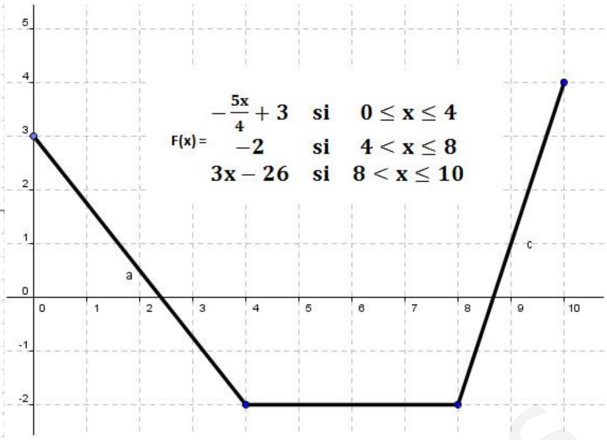
Asíntotas horizontales : No hay

$\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2+2x-3}{x} = \infty$ $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+2x-3}{x} = -\infty$

Asíntotas oblicuas: y = x + 2

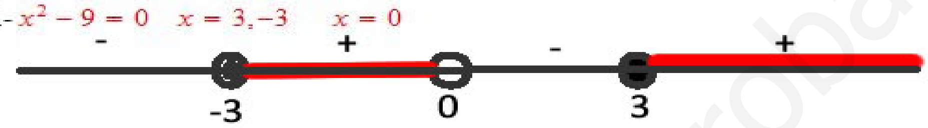
m = $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2} = 1$ n =$\lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+2x-3}{x} - x\right) = 2$





EJERCICIO 5

5.- $x^2-9=0$ $x=3,-3$ $x=0$



Si x = -4, $\frac{16-9}{-4}$ $-$ Si x = -1, $\frac{1-9}{-1}$, $+$ Si x = 1, $\frac{1-9}{1}$, $-$ Si x= 4, $\frac{16-9}{4}$, $+$

Así pues, el dominio de la función es la solución de $\frac{x^2-9}{x} \ge 0$ y es $[-3,0) \cup [3,\infty)$

Ejercicio 6

6.-

x	0	1	−1	2	−2	3	−3	4	−4
y=$1,2^x$	1	1,2	0.83	1.44	0.69	1.73	0.58	2.07	0.48

Ejercicio 7

$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^+} f(x)$ $\lim_{x\to-2}(6+3x) = \lim_{x\to-2}(ax^2+bx)$ $0 = 4a-2b$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x)$ $\lim_{x\to1}(ax^2+bx) = \lim_{x\to1}(x+\ln x)$ $1 = a+b$

Resolviendo el sistema : $a = \frac{1}{3}$ $b = \frac{2}{3}$