

FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Propiedades consecuencia inmediata de la definición:

- 1) En cualquier base se cumple: $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$ y $\log_a a^n = n$
- 2) Si $x \leq 0$, no existe $\log_a x$

En efecto: Supongamos, por ejemplo, que $\log_2(-4) = y \Rightarrow 2^y = -4$ (Imposible)

Logaritmos decimales y logaritmos neperianos:

- Si la base es $a = 10$ los logaritmos se llaman decimales y se expresan:
 $\log x = y \Leftrightarrow 10^y = x$
- Si la base es $a = e \approx 2.718...$ los logaritmos se llaman neperianos y se expresan:
 $\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$

Propiedades de los logaritmos:

- 1) $\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$
- 2) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$
- 3) $\log_a m^p = p \cdot \log_a m$
- 4) $\log_a \sqrt[n]{m} = \frac{\log_a m}{n} = \frac{1}{n} \log_a m$

Ejercicio: Indica si son ciertas o falsas las siguientes igualdades. En las falsas indica, si es posible, a qué es igual el primer miembro.

- 1) $(\log x) \cdot (\log y) = \log(x + y)$
- 2) $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$
- 3) $\log a - \log b = \log(a - b)$
- 4) $\log 0 = 1$
- 5) $\log_b b^n = n$
- 6) $\log_b a^n = n$
- 7) $\log \frac{a}{b} = \frac{\log a}{\log b}$
- 8) $\frac{\log a}{3} = \log a - 1000$
- 9) $\log a - \log b = \frac{\log a}{\log b}$
- 10) $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$
- 11) $\log \sqrt[n]{x} = \log \frac{x}{n}$
- 12) $\frac{1}{n} \log a = \log \frac{a}{n}$
- 13) $\frac{1}{2} \log a = \log \sqrt{a}$
- 14) $-\log a = \log \frac{1}{a}$
- 15) $2 \cdot \log a = \log(100 \cdot a)$
- 16) $\log a + \log \frac{1}{b} = \log a - \log b$
- 17) $\log x + \log \frac{1}{x} = 0$
- 18) $3 + \log x = \log 1000 \cdot x$
- 19) $\log a - \log b - \log c = \log a - \log \frac{b}{c}$
- 20) $n = \log 10^n$
- 21) $\log_a x + \log_b y = \log_a(x \cdot y)$
- 22) $\log \frac{1}{a} = \frac{1}{\log a}$

Ejemplos: Utilizando las propiedades de los logaritmos podemos desarrollar las siguientes expresiones:

$$1) \log_a \frac{1}{m} = \log_a 1 - \log_a m = -\log_a m$$

$$2) \log_a (m^2 \cdot n) = \log_a m^2 + \log_a n = 2 \cdot \log_a m + \log_a n$$

$$3) \log_a \sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{\log_a \frac{m}{n}}{2} = \frac{\log_a m - \log_a n}{2}$$

$$4) \log_a (m^3 \cdot \sqrt{n}) = \log_a m^3 + \log_a \sqrt{n} = 3 \cdot \log_a m + \frac{\log_a n}{2}$$

$$5) \log \frac{1000 \cdot a}{b^2} = \log(1000 \cdot a) - \log b^2 = \log 1000 + \log a - 2 \cdot \log b = 3 + \log a - 2 \cdot \log b$$

Ejemplo: Sabiendo que $\log 2 \cong 0'301$ y $\log 7 \cong 0'845$, calcula $\log \sqrt{0'98}$

$$\begin{aligned} \log \sqrt{0'98} &= \frac{\log 0'98}{2} = \frac{\log \frac{98}{100}}{2} = \frac{\log 98 - \log 100}{2} = \frac{\log 2 \cdot 7^2 - 2}{2} = \frac{\log 2 + 2 \log 7 - 2}{2} = \\ &= \frac{0'301 + 2 \cdot 0'845 - 2}{2} = -0'0045 \quad (\text{Con la calculadora : } \log \sqrt{0'98} = -0'0043869...) \end{aligned}$$

1.- Aplicando la definición de logaritmo halla "a", "x" o "y" en las expresiones:

$$a) \log_a 8 = -3$$

$$b) \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = y$$

$$c) \log_{\frac{1}{2}} x = -2$$

$$d) \log_a 4 = -1$$

$$e) \log_{\frac{1}{2}} 4 = y$$

$$f) \log_3 x = -\frac{1}{2}$$

$$g) \log_{\sqrt{2}} x = -4$$

$$h) \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9} = y$$

$$i) \log_a 0'001 = -3$$

$$j) \log_{\frac{1}{2}} x = -1$$

$$k) \log_2 0'25 = y$$

$$l) \log_4 x = \frac{1}{4}$$

2.- Sabiendo que $\log 2 = 0'301$ y $\log 3 = 0'477$, calcula:

$$a) \log 0'024$$

$$b) \log(81)^3$$

$$c) \log \frac{1}{0'6}$$

$$d) \log \sqrt{72}$$

$$e) \log \sqrt{0'12}$$

$$f) \log 7'5$$

$$g) \log 24^2$$

$$h) \log 5$$

$$i) \log 250$$

$$j) \log \sqrt{\frac{27}{4}}$$

$$k) \log \sqrt{0'81}$$

$$l) \log \sqrt{\frac{1}{0'3}}$$

Comprueba los resultados obtenidos con la calculadora.