ecuaciones exponenciales

son aquellas que verifican que la incógnita o incógnitas aparecen formando parte de un exponente; resolveremos dos tipos:

a) *ecuaciones exponenciales monómicas*

son aquellas que se pueden expresar como una igualdad entre dos expresiones monómicas;

- <u>ejemplos</u>:

$5^{2x+1}=25$

$6^{3x-1}=216$

- <u>resolución</u>: se trata de expresar los dos miembros de la igualdad como potencias de la misma base; si ésto no fuera posible hay dos posibilidades: o la ecuación no tiene solución o debe resolverse mediante el uso de logaritmos; veamos algunos <u>ejemplos</u>:

1) $5^{2x+1}=25$

ponemos 25 como potencia de 5, con lo cual: $5^{2x+1}=5^2$

de la igualdad anterior se deduce que los exponentes son iguales; esta operación es equivalente a "tachar" las bases: $\cancel{5}^{2x+1} = \cancel{5}^2$

por ello: $2x+1=2$; obtenemos una ecuación de 1º grado cuya resolución es inmediata:

$2x=2-1 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=1/2$

2) $6^{3x-1}=216$

ponemos 216 como potencia de 6, con lo cual: $6^{3x-1}=6^3$

tal y como hicimos antes, "tachamos" las bases: $\cancel{6}^{3x-1} = \cancel{6}^3$

y así nos queda la ecuación: $3x-1=3$ cuya resolución es sencilla:

$3x=3+1 \Rightarrow 3x=4 \Rightarrow x=4/3$

www.yoquieroaprobar.es

3) $5^{x^2-5x+6}=1$

aquí el problema parece más complicado: ¿cómo expresamos 1 como potencia de base 5? si recordamos las propiedades de las potencias: $a^0=1$, con lo cual, es cierto que $5^0=1$; ésto nos conduce a lo siguiente:

$5^{x^2-5x+6}=5^0$

gracias a lo cual ya podemos resolver la ecuación:

"tachamos" las bases: $\cancel{5}^{x^2-5x+6}=\cancel{5}^0$, y obtenemos: $x^2-5x+6=0$, ecuación de 2º grado que se resuelve utilizando la fórmula que aprendimos en 3º de ESO y cuyo resultado es: $x_1=2$, $x_2=3$

b) *ecuaciones exponenciales trinómicas*

son aquellas que, mediante una operación que denominamos "cambio de variable", se pueden convertir en una ecuación de 2º grado (que sí sabemos resolver)

- <u>ejemplos</u>

$2^{2x+1} - 3\cdot 2^x + 1 = 0$

$3^{2x-1} - 8\cdot 3^{x-1} - 3 = 0$

[observemos que se denominan trinómicas porque aparecen 3 términos sumándose o restándose]

- <u>resolución</u>:

1) $2^{2x+1} - 3\cdot 2^x + 1 = 0$

lo primero que debemos hacer es "aislar" los términos que llevan x utilizando las propiedades de las potencias:

$$\overbrace{2^{2x}\cdot 2^1}^{2^{2x+1}}-3\cdot 2^x+1=0$$

a continuación hacemos lo que se denomina un "cambio de variable":

$$\begin{cases} \text{a } 2^x \text{ le llamamos y} \\ \text{a } 2^{2x} \text{ le llamamos } y^2, \quad \text{ya que :} \quad 2^{2x}=\left(2^x\right)^2=y^2 \end{cases}$$

con lo cual la ecuación anterior queda de la siguiente manera:

$y^2\cdot 2-3\cdot y+1=0$, que es una ecuación de 2º grado de resolución inmediata:

www.yoquieroaprobar.es

$$y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

calculada y debemos deshacer el cambio de variable para hallar x:

$2^x=y$ $\qquad\qquad$ $2^x=y$

$2^x=2 \Rightarrow x=1$ $\qquad\qquad$ $2^x=1 \Rightarrow 2^x=2^0 \Rightarrow x=0$

2) $3^{2x-1} - 8 \cdot 3^{x-1} - 3 = 0$

primer paso: "aislar" las incógnitas aplicando las propiedades de las potencias:

$$\overbrace{3^{2x} \cdot 3^{-1}}^{3^{2x-1}} - \overbrace{8 \cdot 3^x \cdot 3^{-1}}^{8 \cdot 3^{x-1}} - 3 = 0$$

en este caso, al haber exponentes negativos, por las propiedades de las potencias, podemos escribir así la ecuación:

$$\frac{3^{2x}}{3} - \frac{8 \cdot 3^x}{3} - 3 = 0$$

sacando el mcm, ésta queda: $3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$

ahora hacemos el cambio de variable:

$$\begin{cases} \text{a } 3^x \text{ le llamamos } y \\ \text{a } 3^{2x} \text{ le llamamos } y^2, \quad \text{ya que : } \quad 3^{2x} = \left(3^x\right)^2 = y^2 \end{cases}$$

con lo cual la ecuación anterior queda de la siguiente manera:

$$y^2 - 8y - 9 = 0$$

resolvemos:

$$y = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2} \begin{cases} y_1 = 9 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

calculada y debemos deshacer el cambio de variable para hallar x:

$3^x=y$ $\qquad\qquad$ $3^x=y$

$3^x=-1 \Rightarrow$ imposible $\qquad\qquad$ $3^x=9 \Rightarrow 3^x=3^2 \Rightarrow x=2$

[las soluciones negativas no valen, ya que es imposible que al elevar un número positivo a otro obtengamos un resultado negativo]

www.yoquieroaprobar.es

Ejercicios:

1) Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales monómicas:

a) $3^{3x-2} = 81$

b) $5^{\frac{x-3}{4}} = 25$

c) $3^{\frac{2x+1}{3}} = 27$

d) $4^{\frac{2x-3}{5}} = 64$

e) $4^{x^2-11x+30} = 16$

f) $7^{x^2-3x+2} = 1$

g) $7^{3x-2} = 2401$

h) $6^{\frac{1-3x}{4}} = 1296$

i) $10^{\frac{3x-1}{2x+1}} = 100$

2) Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales trinómicas:

a) $2^{2x-1} - 6 \cdot 2^{x-1} + 4 = 0$

b) $7^{2x+1} - 2 \cdot 7^{x+1} + 7 = 0$

c) $3^{2(x+1)} - 18 \cdot 3^{x} + 9 = 0$

d) $2^{2x-1} - 5 \cdot 2^{x-1} + 2 = 0$

3) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales:

a) $\begin{cases} 2^{3x} \cdot 2^{5y} = 512 \\ \dfrac{5^{2x}}{5^{y}} = 625 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3^{x-4y} = 81 \\ 7^{6x} \cdot 7^{2y} = 49 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2^{x-1} + 3^{y+2} = 245 \\ 2^{x+2} - 3^{y-1} = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5^{x-2} - 6^{y+1} = 245 \\ 5^{x+1} - 6^{y+2} = 1829 \end{cases}$

www.yoquieroaprobar.es

logaritmos

- Introducción

supongamos que tenemos un número cualquiera, por ejemplo, el 2, y que queremos averiguar a cuanto debemos elevarlo para conseguir otro, por ejemplo el 16; ésto lo escribiríamos así:

$2^x = 16$

ese número desconocido, x, se denomina "logaritmo en base 2 del número 16", y la manera de escribirlo es la siguiente:

$x = \log_2 16$

- Definición

se denomina logaritmo en base *a* de un número *b* a otro número *x* al que hay que elevar *a* para obtener *b*; ésto se puede escribir de la siguiente manera:

$$\log_a b = x \quad \Rightarrow \quad a^x = b$$

a se denomina "base" del logaritmo;
debe ser un número distinto de cero,
y, en este curso, positivo;

- Ejemplos

1) Hallar el logaritmo en base 3 de 27.

Este problema consiste en calcular el número al que hay que elevar 3 para obtener 27; ésto lo podemos escribir así:

$\log_3 27 = x \quad \Rightarrow \quad 3^x = 27 \quad \Rightarrow \quad x = 3$, ya que $3^3=27$

2) Hallar el logaritmo en base 2 de 64.

Aquí se trata de calcular a qué número hay que elevar 2 para que nos de 64; lo escribimos de la siguiente manera:

$\log_2 64 = x \quad \Rightarrow \quad 2^x = 64 \quad \Rightarrow \quad x = 6$, ya que $2^6=64$

3) Hallar el logaritmo en base 10 de 1000.

¿A qué número hay que elevar 10 para obtener 1000?

$\log_{10} 1000 = x \quad \Rightarrow \quad 10^x = 1000 \quad \Rightarrow \quad x = 3$, ya que $10^3=1000$

www.yoquieroaprobar.es

Ejercicio:

Calcula los siguientes logaritmos:

$\log_2 2 =$	$\log_3 9 =$	$\log_5 125 =$	$\log_4 64 =$
$\log_5 25 =$	$\log_3 81 =$	$\log_2 16 =$	$\log_7 49 =$
$\log_{10} 10000 =$	$\log_{15} 225 =$	$\log_6 216 =$	$\log_2 32 =$

propiedades de los logaritmos

1) No se pueden calcular los logaritmos de números negativos (ya que antes dijimos que este curso sólo estudiaríamos logaritmos de base positiva);

Imaginemos que queremos hallar $\log_2(-16)$; ésto supone buscar un número que cumpla que 2 elevado a él de -16; sin pensar mucho podríamos decir: el -4; pero ¿es ésto correcto? comprobémoslo:

$\log_2(-16) = -4 \quad \Rightarrow \quad 2^{-4} = -16$, pero por las propiedades de las potencias sabemos que $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$, que, claramente, no es -16;

en general, **es imposible conseguir un número negativo a partir de uno positivo elevándolo a otro**, por ello no se pueden calcular los logaritmos de los números negativos;

2) El logaritmo de 1 en cualquier base vale 0: $\log_a 1 = 0$

ya que, en las condiciones que establecimos al principio, se cumple $a^0=1$;

$\log_a 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^0 = 1$

- Ejemplos:

$\log_2 1 = 0$ ya que $2^0=1$

$\log_{10} 1 = 0$ ya que $10^0=1$

3) $\log_a a^b = b$

esta propiedad es muy simple: ¿a qué número debemos elevar *a* para obtener a^b? a *b*

- Ejemplos:

$\log_2 2^5 = 5$; ¿a qué número debemos elevar 2 para obtener 2^5? a 5

$\log_3 3^7 = 7$; ¿a qué número debemos elevar 3 para obtener 3^7? a 7

www.yoquieroaprobar.es

observemos que esta propiedad nos permite también convertir un número cualquiera en un logaritmo:

ejemplos:

convierte 3 en un logaritmo de base 5: $3 = \log_5 5^3$

convierte 7 en un logaritmo de base 10: $7 = \log_{10} 10^7$

convierte -4 en un logaritmo de base 2: $-4 = \log_2 2^{-4}$

4) El logaritmo de cero es:

$-\infty$ si *a* es mayor que 1

$+\infty$ si *a* es un número comprendido entre cero y uno

-Ejemplos:

$\log_5 0 = -\infty$

$\log_2 0 = -\infty$

$\log_{\frac{1}{4}} 0 = \infty$

en cualquier caso, como infinito no es un número real, también podemos decir que **el logaritmo de cero no tiene solución real**, lo que, para nosotros, equivale a que no se puede calcular;

www.yoquieroaprobar.es

Ejercicios

1) Calcula el valor de los siguientes logaritmos:

$\log_2 1 =$	$\log_4(-1) =$	$\log_5 1 =$	$\log_3(-2) =$
$\log_3 3^5 =$	$\log_7 7^{-2} =$	$\log_4 4^{-3} =$	$\log_{10} 10^4 =$
$\log_{10} 1 =$	$\log_6(-5) =$	$\log_6 6^{10} =$	$\log_8 1 =$

2) Convierte los siguientes números en logaritmos:

4 en logaritmo de base 3

7 en logaritmo de base 5

6 en logaritmo de base 10

-9 en logaritmo de base 2

-6 en logaritmo de base 7

$\frac{1}{2}$ en logaritmo de base 4

$\frac{2}{5}$ en logaritmo de base 6

operaciones con logaritmos

1) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3) $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$

3.1. $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a x^{-1} = -\log_a x$

3.2. $\log_a \sqrt[z]{x^y} = \frac{y}{z} \cdot \log_a x$

(las propiedades 3.1 y 3.2 se deducen de la propiedad 3)

- Ejemplos:

1) $\log_2(5 \cdot 10) = \log_2 5 + \log_2 10$

2) $\log_3(17 : 4) = \log_3 17 - \log_3 4$

3) $\log_5 7^3 = 3 \cdot \log_5 7$

3.1. $\log_4\left(\frac{1}{5}\right) = -\log_4 5$

3.2. $\log_7 \sqrt[4]{2^5} = \frac{5}{4} \cdot \log_7 2$

El uso de estas operaciones es necesario para la resolución de ecuaciones logarítmicas y de los problemas relacionados con ellas; junto con las propiedades anteriores podemos hacer una tabla resumen con las características fundamentales de los logaritmos.

tabla resumen de propiedades y operaciones

no existen logaritmos de números negativos

$\log_a 1 = 0$

$\log_a a^b = b$

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a(x : y) = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^y = y \cdot \log_a x$

$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a x^{-1} = -\log_a x$

$\log_a \sqrt[z]{x^y} = \frac{y}{z} \cdot \log_a x$

www.yoquieroaprobar.es

Veamos un ejemplo de aplicación simultánea de varias propiedades:

- Desarrollar al máximo la siguiente expresión: $\log_2(x \cdot y \cdot z)^4$

en primer lugar, la potencia del logaritmo (el número 4) puede "bajarse" de manera que multiplique al logaritmo: $4 \cdot \log_2(x \cdot y \cdot z)$; a continuación, como tenemos el logaritmo de un producto, podemos convertirlo en suma de varios logaritmos: $4 \cdot \log_2(x \cdot y \cdot z) = 4 \cdot (\log_2 x + \log_2 y + \log_2 z)$; con lo cual hemos desarrollado al máximo la expresión inicial

-Ejercicio: empleando las propiedades y operaciones de los logaritmos, desarrolla al máximo las siguientes expresiones:

1) $\log_3(x \cdot y : z)^5$
2) $\log_2(a : b)^7$
3) $\log_7(x \cdot y : z)^5$
4) $\log\left[(x+y)^2 \cdot (x-y)^2\right]$
5) $\log\left(\dfrac{a^4 \cdot b^2 \cdot c^3}{x \cdot y^2}\right)$

-Ejercicio: empleando las propiedades y operaciones de los logaritmos, "comprime" al máximo las siguientes expresiones:

1) $\log x + \log y + \log z$
2) $(\log a - \log b) + (\log b - \log c)$
3) $2\log x + 3\log y - 4\log z$
4) $(5\log x - 4\log y) + (3\log x - \log y)$
5) $4(\log x + \log y) + 2(\log x - \log y)$

www.yoquieroaprobar.es

- <u>Ejercicios</u>

1) Utilizando la calculadora determina el valor de los siguientes logaritmos:

a) log 200
b) log 40.000
c) log 100.000
d) log 0,5
e) log 0,075
f) log (5/6)
g) log 1
h) log 0
i) log 10
j) log 10^{-5}
k) ln 200
l) ln 40.000
m) ln 100.000
n) ln 0,5
ñ) ln 0,075
o) ln (5/6)
p) ln 1
q) ln 0
r) ln 10
s) ln 10^{-5}

2) Utilizando la calculadora determina el valor de los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 200$
b) $\log_3 40.000$
c) $\log_4 100.000$
d) $\log_5 0,5$
e) $\log_2 0,075$
f) $\log_3 (5/6)$
g) $\log_4 1$
h) $\log_5 0$
i) $\log_6 10$
j) $\log_2 10^{-5}$

www.yoquieroaprobar.es

ecuaciones logarítmicas

Son aquellas que verifican que la incógnita o incógnitas aparecen en el interior de un logaritmo. Su resolución es sencilla: aplicamos las propiedades de los logaritmos ("comprimiendo" las expresiones que aparezcan) hasta lograr una igualdad de logaritmos de este tipo:

log (*expresión algebraica 1*)=log (*expresión algebraica 2*)

lo cual conduce a:

expresión algebraica 1= expresión algebraica 2

En este curso esta igualdad dará como resultado una ecuación de primer o segundo grado. Puede darse el caso de que tengamos un sistema de ecuaciones logarítmicas. Si ocurre ésto, al resolverlo de la manera indicada antes, obtendremos un sistema de ecuaciones (ya vistas el curso anterior).

- Ejemplos:

1) log (x+1)-logx=3

primer paso: aplicando las propiedades convertimos la resta de logaritmos en el logaritmo de la división:

$$\log\left(\frac{x+1}{x}\right)=3$$

segundo paso: el 3 de la parte derecha de la igualdad debe aparecer dentro de un logaritmo decimal; por las propiedades sabemos que $3=\log 10^3$, con lo cual:

$$\log\left(\frac{x+1}{x}\right)=\log 10^3$$

tercer paso: sólo nos queda igualar la expresión que hay en el logaritmo de la izquierda con la expresión que hay en el logaritmo de la derecha, y resolver la ecuación resultante:

$$\frac{x+1}{x}=10^3 \Rightarrow x+1=1.000x \Rightarrow x-1000x=-1 \Rightarrow -999x=-1 \Rightarrow x=\frac{1}{999}$$

www.yoquieroaprobar.es

2) log (x+9)+logx=1

- *primer paso*: aplicando las propiedades convertimos la suma de logaritmos en el logaritmo del producto:

$$\log[(x+9)\cdot x] = 1$$

- *segundo paso*: el 1 de la parte derecha de la igualdad debe aparecer dentro de un logaritmo decimal; por las propiedades sabemos que $1=\log 10^1$, con lo cual:

$$\log[(x+9)\cdot x] = \log 10^1$$

- *tercer paso*: sólo nos queda igualar la expresión que hay en el logaritmo de la izquierda con la expresión que hay en el logaritmo de la derecha, y resolver la ecuación resultante:

$$x\cdot(x+9) = 10^1 \Rightarrow x^2 + 9x = 10 \Rightarrow x^2 + 9x - 10 = 0$$

En este caso hemos obtenido una ecuación de 2º grado (en el ejemplo anterior era de 1º grado). La resolvemos empleando la fórmula que ya conocemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4\cdot 1\cdot(-10)}}{2\cdot 1} = \frac{-9 \pm \sqrt{81+40}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-9 \pm 11}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-9+11}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-9-11}{2} = \dfrac{-20}{2} = -10 \end{cases}$$

La segunda solución no es válida, ya que, como sabemos, los logaritmos de números negativos no son números reales.

Solución: x=1

- <u>Ejercicios</u>: resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas

1) $\log (x^2 + 1) - \log x = 1$

2) $\log_2 (9x^2 - 20) - \log_2 x - \log_2 6 = 2$

3) $\log x - \log (x - 1) = 1$

4) $\log [(x + 1)/(x - 1)] = \log (3/2)$

5) $\log x = 5/2$

6) $\log(x-2) + \log x = \log 8$

7) $\log(x-5) + \log(x-4) = 1$

www.yoquieroaprobar.es