Ecuaciones logarítmicas

Marco Teórico

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas ecuaciones en la que la incógnita aparece afectada por un logaritmo.

Ejemplo 1:

Rosa es una joven atleta que se está preparando para competir en juegos nacionales, pero sucedió que mientras entrenaba se lesionó, por lo que tuvo que acudir al médico, el cual al examinarla la tranquilizó, informándole que no era nada grave, y que pronto se recuperaría sin ningún problema con el suministro de un medicamento.

Como la competencia estaba tan próxima, ella decidió investigar:¿Cuánto tardaría el medicamento en desaparecer del organismo?; para que al momento de la competencia no se le presente problemas por posible dopaje .Ella encontró que el medicamento se puede eliminar a través de la orina y que la cantidad que quede en el cuerpo dependerá del tiempo y que se puede modelar con la siguiente función:

$$A(t) = 10 \cdot 0{,}8^{t}$$

Donde:

A (t) = Cantidad de medicamento en miligramos que queda en el cuerpo **t** horas después de suministrado.

t =Tiempo

Por su parte Rosa se dio a la tarea de determinar después de cuantas horas tendría en su cuerpo 2 miligramos que es lo permitido en una posible prueba de dopaje.

Entonces:

A (t) = 2mg (Cantidad de medicamento permitido)

t=?   (tiempo)

A (t)= 10. $0{,}8^t$

Paso 1:Sustituimos

2= 10. $0{,}8^t$

Paso 2: Despejamos dividiendo entre 10 y simplificamos ,resulta:

0,2 =$0{,}8^t$

Paso 3: Aplicamos logaritmo común en ambos miembros.

log0,2= log $0{,}8^t$

Paso 4: Aplicamos la propiedad de los logaritmos

log 0,2=t log 0,8

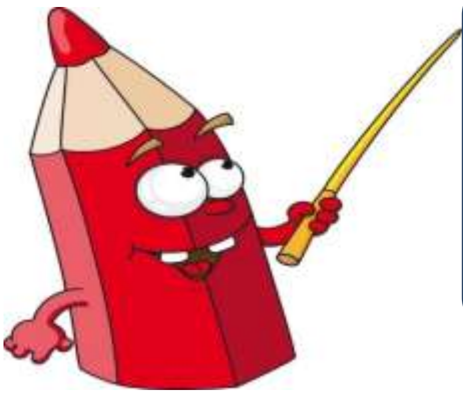
Paso 5: Despejamos **t**

$$= \frac{\log 0{,}2}{\log 0{,}8}$$

t=7,21

Solución: Por lo tanto aproximadamente 7 horas después de administrado el medicamento Rosa tendrá en su cuerpo 2 miligramos de medicamento que es lo requerido en una prueba de dopaje.

Para resolver ecuaciones logarítmicas vamos a tener en cuenta:



$\log_a 1 = 0$	$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
$\log_a x^n = n \log_a x$	$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$	$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

Propiedades de los logaritmos:

Ejemplo 2.

2 log x= 3 log x/10 aplicando las propiedades de los logaritmos tendremos.

Log x^2= log 10^3+log x/10

Log x^2= log 10. X /10

$$\text{Log } x^2 = \log \frac{10^3 \cdot X}{10}$$

donde aplicando la relación logarítmica log x = log y ⇔ x = y , obtendremos la ecuación algebraica:

$$X^2 = \frac{1000\,x}{10}$$

resolviendo esta ecuación obtendremos como soluciones:
x=0 y X=100

de estas dos soluciones de nuestra ecuación algebraica, la solución x = 0 se considera una solución extraña, no válida para nuestra ecuación logarítmica de partida, ya que al sustituir x por cero nos va a quedar el logaritmo de cero , que no existe, con lo que la única solución aceptada para la ecuación logarítmica de partida es x = 100 .

Ejemplo 3.

3 log X-log 32 = log X/2 de nuevo si aplicamos las propiedades de los logaritmos en los dos miembros nos quedará :

$\log \frac{x^3}{32} = \log \frac{x}{2}$ donde aplicando la relación log x = log y ⇔ x = y , quedará:

$\frac{x^3}{32} = \frac{x}{2}$

Una ecuación algebraica que tendrá como soluciones: x = 0, x = −4, x = 4; que como ya hemos comentado en el ejemplo anterior, nos acarrea dos soluciones no válidas para nuestra ecuación logarítmica al ser imposible calcular los logaritmos de números negativos o cero, con lo que son soluciones extrañas: x = 0, x = −4; siendo la única solución válida x = 4.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Resuelve la siguiente ecuación logarítmica:
   $3logx = log25 + logx$

$logx^3 = log25x$

$x^3 = 25x$ **Igualamos**

$x(x^2 - 25) = 0$ **Igualamos a cero**

$x_1 = 0 \rightarrow \ no(\nexists log0)$ **Luego de haber sacado factor común**

$x_2 = -5 \rightarrow no(\nexists log - x)$

x_3=5 si

2. Resuelve:
   $log(2x - 4) - log(x + 2) = 1$

$log\frac{2x - 4}{x + 2} = log10$ Igualamos Logaritmos

$\frac{2x - 4}{x + 2} = 10$ Despejamos ecuaciones

$2x - 4 = 10x + 20$

$8x = -24$

$x = -3 \rightarrow no(\nexists log - x)$

X=-3 ∄log -x

3. Resuelve:
   $log_2x^2 - log_2(x - \frac{3}{4}) = 2$

$log_2(\frac{x^2}{x - \frac{3}{4}}) = log_24$

$$\frac{x^2}{x-\frac{3}{4}} = 4$$

$$x^2 = 4x - 3$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = x_1 = 3, x_2 = 1$$

$X_1=3$, $x_2=1$

4. $2\log x = 3 + \log\frac{x}{10}$

$$2\log x = 3 + \log x - \log 10$$

logx=3-1 logx=2

5. $\log x + \log(x+3) = 2\log(x+1)$

$$\log\left[x(x+3)\right] = \log(x+1)^2$$

$$x(x+3) = (x+1)^2$$

$$x^2 + 3x = x^2 + 2x + 1 \qquad x = 1$$

X=1

6. $4\log\left(\frac{x}{5}\right) + \log\left(\frac{625}{4}\right) = 2\log x$

$$\log\left(\frac{x}{5}\right)^4 + \log\left(\frac{625}{4}\right) = \log x^2 \qquad \log\left(\frac{x^4}{625}\cdot\frac{625}{4}\right) = \log x^2$$

$$\log\left(\frac{x^4}{4}\right) = \log x^2 \qquad \frac{x^4}{4} = x^2 \qquad x^4 - 4x^2 = 0$$

X=0 x=-2 x=2

7. $\dfrac{\log(16-x^2)}{\log(3x-4)} = 2$

$$\log(16-x^2) = 2\log(3x-4)$$

$$\log(16-x^2) = \log(3x-4)^2 \qquad (16-x^2) = (3x-4)^2$$

$$10x^2 - 24x = 0$$

x= 0 ; x=12/5

8. $\dfrac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} = 3$

$$\log(35-x^3) = 3\log(5-x)$$

$$\log(35-x^3) = \log(5-x)^3 \qquad (35-x^3) = (5-x)^3$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

x=2 x=3

9. $\log_5 x + \dfrac{\log_5 125}{\log_5 x} = \dfrac{7}{2}$

$$(\log_5 x)^2 - \frac{7}{2}\log_5 x + \log_5 125 = 0$$

$$2(\log_5 x)^2 - 7\log_5 x + 6 = 0 \qquad \log_5 x = t$$

$$2t^2 - 7t + 6 = 0 \qquad t = 2 \qquad t = \frac{3}{2}$$

$$\log_5 x = 2 \qquad x = 25$$

$$\log_5 x = \frac{3}{2} \qquad x = \sqrt{5^3} = 5\sqrt{5}$$

$x=5\sqrt{5}$

10 $2\log x - 2\log(x+1) = 0$

$$\log x^2 - \log(x+1)^2 = \log 1$$

$$\log \frac{x^2}{(x+1)^2} = \log 1 \qquad \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1$$

$$2x + 1 = 0 \qquad x = -\frac{1}{2}$$

$x=-1/2$ **sin solución**