

GLOBAL ÁLGEBRA

1) Opera y simplifica: $\frac{x}{x^2-9} + \frac{3}{x^2+5x+6} - \frac{x}{x+2}$ (1 punto)

2) Resuelve las siguientes ecuaciones: (3 puntos)

a) $49^x - 10 \cdot 7^x + 21 = 0$

b) $\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+3} = -1$

c) $\frac{x-1}{x^2-x} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x+1)}$

3) Halla un polinomio que tiene por raíces 1 -2 y cero, sabiendo que es de grado 4, y que su coeficiente principal es -5.

(1 punto)

4) Resuelve las siguientes inecuaciones: a) $\frac{x^2-4+x}{x+2} < 1$ (3 puntos)

b) $|x^2-7| \leq 5$

5) Resuelve los sistemas:

b) $\begin{cases} 3^{2x} \cdot 81^y = 27 \\ 2^x = \frac{1}{2^y} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \ln x + \ln y = 0 \\ \ln x - \ln y = 1 \end{cases}$

(2 puntos)

Soluciones

1) Debemos hallar el mínimo común múltiplo:

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3);$$

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3) \quad \text{El m.c.m. es } (x-3)(x+3)(x+2)$$

$$x + 2 = x + 2$$

$$\frac{x}{x^2 - 9} + \frac{3}{x^2 + 5x + 6} - \frac{x}{x + 2} = \frac{x(x + 2) + 3(x - 3) - x(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(x + 3)(x + 2)} =$$

$$\frac{x^2 + 2x + 3x - 9 - x^2 + 9x}{(x - 3)(x + 3)(x + 2)} = \frac{x^2 + 2x + 3x - 9 - x^3 + 9x^2}{(x - 3)(x + 3)(x + 2)} = \frac{-x^3 + x^2 + 14x + 9}{(x - 3)(x + 3)(x + 2)}$$

El polinomio del numerador, no tiene ninguna raíz en común con el polinomio del denominador por tanto, no podemos simplificar la fracción algebraica.

2) a) $49^x - 10 \cdot 7^x + 21 = 0$ Hacemos el cambio $7^x = t$.

$$t^2 - 10t + 21 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 7 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\text{Por tanto: } 7^x = 7 \rightarrow x = 1; 7^x = 3 \rightarrow x \log 7 = \log 3 \rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 7}$$

b) $\sqrt{3x - 2} - \sqrt{x + 3} = -1 \rightarrow \sqrt{3x + 2} = -1 + \sqrt{x + 3}$ elevamos ambos miembros al cuadrado: $3x - 2 = 1 - 2\sqrt{x + 3} + x + 3 \rightarrow 2\sqrt{x + 3} = -2x + 6$ elevamos ambos miembros

al cuadrado: $4(x + 3) = 4x^2 + 36 - 24x \rightarrow 4x^2 - 28x + 24 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 1 \end{cases}$ Comprobando las

soluciones, vemos que solo es válida $x = 1$

$$\text{c) } \frac{x - 1}{x^2 - x} - \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2(x + 1)}$$

$$x^2 - x = x(x - 1);$$

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1) \quad \text{m.c.m.} = 2x(x + 1)(x - 1)$$

$$2(x + 1) = 2(x + 1)$$

$$\frac{x - 1}{x^2 - x} - \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2(x + 1)} = \frac{2(x + 1) - 2x}{2x(x + 1)(x - 1)} = \frac{x(x - 1)}{2x(x + 1)(x - 1)} \rightarrow$$

$$2x + 2 - 2x = x^2 - x \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \quad \text{Comprobando, solo es válida } x = 2$$

3) Halla un polinomio que tiene por raíces 1 -2 y cero, sabiendo que es de grado 4, y que su coeficiente principal es -5.

Este polinomio factorizado será: $-5(x + 2)(x - 1)x^2$

$$4) \text{ a) } \frac{x^2 - 4 + x}{x + 2} < 1 \rightarrow \frac{x^2 - 4 + x}{x + 2} - 1 < 0 \rightarrow \frac{x^2 - 4 + x - (x + 2)}{x + 2} < 0 \rightarrow \frac{x^2 - 6}{x + 2} < 0$$

Para resolver esta inecuación debo empezar por resolver las ecuaciones que resultan

de igualar a cero el numerador y el denominador:

$$x^2 - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6} \approx 2.4 \\ x = -\sqrt{6} \approx -2.4 \end{cases} \quad x+2=0 \rightarrow x = -2$$

A la vista de las soluciones debemos probar el signo de la función en los intervalos $(-\infty, -\sqrt{6}), (-\sqrt{6}, -2), (-2, \sqrt{6}), (\sqrt{6}, +\infty)$.

Tomando un valor para x encada uno de los intervalos, vemos que la expresión $\frac{x^2 - 6}{x + 2}$ es negativa en $(-\infty, -\sqrt{6}) \cup (-2, \sqrt{6})$

$$|x^2 - 7| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x^2 - 7 \leq 5 \rightarrow \text{Esto equivale al siguiente}$$

$$\text{sistema: } \begin{cases} x^2 - 7 \leq 5 \rightarrow x^2 \leq 12 \\ x^2 - 7 \geq -5 \rightarrow x^2 \geq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 12 \leq 0 \\ x^2 - 2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Para resolverlo, resolvemos las}$$

$$\text{ecuaciones } \begin{cases} x^2 - 12 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} \sqrt{12} \\ -\sqrt{12} \end{cases} \\ x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

Para obtener la solución del sistema debemos obtener las soluciones de las inecuaciones $x^2 - 12 \leq 0$ y de la inecuación $x^2 - 2 \geq 0$

Para solucionar la primera probamos en los intervalos de la recta

$$(-\infty, -\sqrt{12}), (-\sqrt{12}, \sqrt{12}), (\sqrt{12}, +\infty)$$

Vemos que $x^2 - 12$ es negativa en $(-\sqrt{12}, \sqrt{12})$

Para solucionar la segunda probamos en los intervalos de la recta

$$(-\infty, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, +\infty) \quad \text{Vemos que } x^2 - 2 \text{ es positiva en}$$

$$(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) = \text{Sol}_2$$

La solución del sistema será la intersección de ambas soluciones:

$$\text{Sol} = \text{Sol}_1 \cap \text{Sol}_2 = (-\sqrt{12}, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \sqrt{12})$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3^{2x} \cdot (3^4)^y = 3^3 \\ 2^x = 2^{-y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ x = -y \end{cases} \rightarrow -2y + 4y = 3 \rightarrow -2y = 3 \rightarrow y = -\frac{3}{2}; x = \frac{3}{2}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \ln x + \ln y = 0 \\ \ln x - \ln y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ln x \cdot y = \ln 1 \\ \ln \frac{x}{y} = \ln e \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \cdot y = 1 \\ \frac{x}{y} = e \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \rightarrow y = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{e}} \\ -\frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases} \\ \frac{x}{\frac{1}{x}} = e \rightarrow x^2 = e \rightarrow x = \begin{cases} \sqrt{e} \\ -\sqrt{e} \end{cases} \end{cases}$$

Sólo es válida, la solución $x = \sqrt{e} \quad y = \frac{1}{\sqrt{e}}$ ya que los negativos no tienen logaritmo