

Examen de Álgebra

1. Resuelve la ecuación: $\frac{2x-4}{x^2-2x} - \frac{5}{3x+6} = \frac{4}{x^2-4}$ **1.5 puntos**

2. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{x^2}{x+3} \leq 3$

b) $|2x-3| \leq 5$

2 puntos

3. Resuelve las ecuaciones:

a) $2^{x-1} - 4^{x+1} = 0$

b) $\log_{(2x+1)} 49 = 2$

2 puntos

4. Resuelve el sistema:
$$\begin{cases} \log x - \log 5 = 3 \log 5 \\ \log x^3 - \log y^2 = \log 2^4 \end{cases}$$

2 puntos

5. Resuelve la ecuación: $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} = 2$

1.5 puntos

Soluciones

$$1) \frac{2x-4}{x^2-2x} - \frac{5}{3x+6} = \frac{4}{x^2-4}$$

$$x^2 - 2x = x(x-2); \quad 3x+6 = 3(x+2); \quad x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$$

$$\text{m.c.m.: } 3x(x+2)(x-2)$$

$$\frac{2x-4}{3x(x+2)(x-2)} - \frac{5}{3x(x+2)(x-2)} = \frac{4}{3x(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{(2x-4)3(x+2)}{3x(x+2)(x-2)} - \frac{5x(x-2)}{3x(x+2)(x-2)} = \frac{12x}{3x(x-2)(x+2)} \rightarrow 6x^2 - 24 - 5x^2 + 10x = 12x \rightarrow$$

$\rightarrow x^2 - 2x - 24 = 0 \rightarrow x = 6; x = -4$ Al comprobarlas, vemos que las dos soluciones son válidas.

$$2) \frac{x^2}{x+3} \leq 3 \rightarrow \frac{x^2}{x+3} - 3 \leq 0 \rightarrow \frac{x^2 - 3x - 9}{x+3} \leq 0. \text{ Veamos los valores que anulan el}$$

$$\text{numerador y el denominador. } x^2 - 3x - 9 = 0 \rightarrow x = \frac{3 + \sqrt{45}}{2} \approx 4,85 \quad x = \frac{3 - \sqrt{45}}{2} \approx -1,8$$

$$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$$

Probamos el signo de $\frac{x^2 - 3x - 9}{x+3}$ en los intervalos de signo constante:

$$\left(-\infty, -3\right), \left(\frac{3 - \sqrt{45}}{2}, \frac{3 + \sqrt{45}}{2}\right), \left(\frac{3 + \sqrt{45}}{2}, +\infty\right)$$

La solución es:

$$\left(-\infty, -3\right) \cup \left[\frac{3 - \sqrt{45}}{2}, \frac{3 + \sqrt{45}}{2}\right]$$



$$3) a) 2^{x-1} - 4^{x+1} = 0 \Rightarrow$$

$$2^{x-1} = 2^{2(x+1)} \Rightarrow x-1 = 2(x+1) \rightarrow x-1 = 2x+2 \rightarrow -x = 3 \rightarrow x = -3$$

$$b) \log_{(2x+1)} 49 = 2 \Rightarrow (2x+1)^2 = 49 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 49 \rightarrow 4x^2 + 4x - 48 = 0 \rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow x = -4; x = 3$$

Solo es válida la solución 3, pues -4 hace que la base del logaritmo sea -7 , y eso no es posible.

4)

$$\begin{cases} \log x - \log 5 = 3 \log 5 \\ \log x^3 - \log y^2 = \log 2^4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log \frac{x}{5} = \log 5^3 \\ \log \frac{x^3}{y^2} = \log 2^4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} = 5^3 \\ \frac{x^3}{y^2} = 2^4 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 5^4 \\ \frac{(5^4)^3}{y^2} = 2^4 \rightarrow 5^{12} = y^2 2^4 \rightarrow y = \sqrt{\frac{5^{12}}{2^4}} = \begin{cases} + \frac{5^6}{2^2} \\ - \frac{5^6}{2^2} \end{cases} \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son: $\begin{cases} x = 5^4; y = \frac{5^6}{2^2} \\ x = 5^4; y = -\frac{5^6}{2^2} \end{cases}$ Al comprobarlas observamos que

ambas soluciones son válidas.

$$\begin{aligned} 5) \quad \sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} = 2 &\rightarrow \sqrt{2x+3} = \sqrt{x-2} + 2 \rightarrow (\sqrt{2x+3})^2 = (\sqrt{x-2} + 2)^2 \rightarrow \\ 2x+3 &= x-2+4+4\sqrt{x-2} \rightarrow x+1 = 4\sqrt{x-2} \rightarrow (x+1)^2 = (4\sqrt{x-2})^2 \rightarrow \\ x^2 + 1 + 2x &= 16(x-2) \rightarrow x^2 - 14x + 33 = 0 \rightarrow x = 11; x = 3 \end{aligned}$$

Comprobamos y vemos que ambas soluciones, son válidas.