

1.-- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - \sqrt{4x^6 - 2x^3}) = [\infty - \infty]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^3)^2 - (\sqrt{4x^6 - 2x^3})^2}{2x^3 + \sqrt{4x^6 - 2x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^6 - 4x^6 + 2x^3}{2x^3 + \sqrt{4x^6 - 2x^3}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3} + \sqrt{\frac{4x^6}{x^6} - \frac{2x^3}{x^6}}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2x^6 + 2\sqrt{9x^{12} + x^2}}{\sqrt{4x^{12} + 1}} \right)^{\frac{x^3+1}{x^2}} = \left[\frac{\infty - \infty}{\infty} \right]^{\frac{\infty}{\infty}} =$

dividimos por x^6

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-2x^6 + 2\sqrt{9x^{12} + x^2}}{\sqrt{4x^{12} + 1}} \right]^{\frac{x^3+1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{-\frac{2x^6}{x^6} + 2\sqrt{\frac{9x^{12}}{x^{12}} + \frac{x^2}{x^{12}}}}{\sqrt{\frac{4x^{12}}{x^{12}} + \frac{1}{x^{12}}}} \right]^{-\infty}$$

$$= \left(\frac{-2 + 2 \cdot 3}{2} \right)^{-\infty} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$$

2.-Dada la función: (2 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+x+2}{2\sqrt{x+2}-4} & x > 2 \\ \frac{x^4-2x^2-8}{4-x^2} & 1 < x < 2 \\ \frac{x}{1+x^2} & 1 \geq x \end{cases}$$

Estudiar la continuidad en $x=2$ y $x=1$ indicando donde proceda el tipo de discontinuidad.

$x=2$ Discontinuidad Evitable

1) $f(2) = \left[\frac{0}{0} \right] \neq$

2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2+x+2}{2\sqrt{x+2}-4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)(x+1) \cdot (2\sqrt{x+2}+4)}{4x+8-16 = 4(x-2)} = -\frac{3 \cdot 8}{4} = -6 //$ 0'75

3) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^4-2x^2-8}{4-x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)(x^2+2)}{(2-x)(2+x)} = -6 //$ 0'5

tiene límite $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -6$

1	0	-2	0	-8
2	2	4	4	8
1	2	2	4	0
-2	-2	0	-4	
1	0	2	0	

0'5

$x=1$

Discontinuidad de salto finito

1) $f(1) = \frac{-9}{3} = -3 //$

2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^4-2x^2-8}{4-x^2} = -3$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} //$

0'75

3.-Dada la función $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}$ a) Estudiar donde es continua, y en sus puntos de discontinuidad razona de que tipo se trata b) Determinar sus asíntotas horizontales y verticales

Es continua en todo $\mathbb{R}$ menos en los valores p.e. se anula el denominador.
 $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$.

	1	-2	2	-2	1
1		1	-1	1	-1
	1	-1	1	-1	0
1		1	0	1	
	1	0	1	0	

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2(x^2+1)$$

Es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$ //

• $x=1$. Discontinuidad de salto infinito. 0.5

$$f(1) = \left[\frac{0}{0} \right].$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = \left[\frac{0}{0} \right] \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} &= -\infty \end{aligned}$$

0.5

b)

Asíntota vertical

$x=1$ ya p.e. el límite es ∞ .

0.5

Asíntota horizontal

$y=0$ cp p.e. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = 0 //$

0.5

4.- ¿Es $x=2^+$, asíntota vertical de la función $f(x) = \left(\frac{-x^2+5x-6}{2-x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$? Razona la respuesta

Vemos si el límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow 2^+$ tiende a ∞ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{-x^2+5x-6}{2-x} \right)^{\frac{1}{x-2}} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{-(x-2)(x-3)}{(2-x)} \right)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x+3)^{\frac{1}{x-2}} = 1^{+\infty} \text{ (nºe)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (1+3-x-1)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (1+2-x)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[1 + \frac{1}{\frac{2-x}{x-2}} \right]^{\frac{1}{x-2}} \end{aligned}$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e} // \Rightarrow x=2^+ \text{ no es una asíntota vertical de } f(x) \text{ ya que el límite no es } \infty.$$

5.- Hallar k y p para que la función sea continua en $x=1$, razonando el proceso

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+k}{x^2-1} & x \neq 1 \\ p & x = 1 \end{cases}$$

$x=1$ continua.

1) $x=1 \Rightarrow f(1)=p$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x+k}{x^2-1} = \frac{-4+k}{0} \Rightarrow$ si $k=4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-3}{2} //$

3) Para $k=4 \Rightarrow$ el límite de $f(x)$ valdría $-\frac{3}{2}$ y para que este límite coincidiera con $f(1)=p$, tendríamos que ser $p = -\frac{3}{2}$.

$$p = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{3}{2} \quad \text{si } k=4$$

Sol.: $k=4$ y $p = -\frac{3}{2} \Rightarrow f(x)$ continua en $x=1$