Ecuaciones logarítmicas

Resuelve las siguientes ecuaciones

Ejercicio 1 $\log(x-2)=2$

$\log(x-2)=2 \rightarrow \log_{10}(x-2)=2$
Aplicando la definción de logaritmo, tendremos:

$$x-2=10^2=100 \rightarrow x=102$$

Comprobación:
$\log(102-2)=\log 100=2$

Ejercicio 2 $2\log x-\log 4=0$

$2\log x-\log 4=0 \rightarrow \log x^2=\log 4$

$$x^2=4 \rightarrow x=\left\{\begin{array}{c}2\\-2\end{array}\right.$$

Comprobación:
a) $x=2$ si que es solución ya que:
$2\log 2-\log 4=\log 2^2-\log 4=\log 4-\log 4=0$
b) $x=-2$ no es solución ya que $\log(-2)$no se puede calcular en $\mathbb{R}$

Ejercicio 3 $\log\sqrt[5]{x}-\log x^2=9$

$\log\sqrt[5]{x}-\log x^2=9 \rightarrow \frac{1}{5}\log x-2\log x=9 \rightarrow \left(\frac{1}{5}-2\right)\log x=9$
la ecuación inicial es equivalente a:

$$-\frac{9}{5}\log x=9 \rightarrow \log x=-5$$

como $\log x=\log_{10} x$, entonces:

$$\log_{10} x=-5$$

Aplicando la definción de logaritmo, tendremos:

$$x=10^{-5}=\frac{1}{10^5}$$

Comprobación:
$x=\frac{1}{10^5}$ si que es solución ya que:
$\log\sqrt[5]{10^{-5}}-\log\left(10^{-5}\right)^2=\log 10^{-1}-\log 10^{-10}=\log\left(\frac{10^{-1}}{10^{-10}}\right)=\log 10^9=9$

Ejercicio 4 $\log_3\sqrt{x}+\log_3 9x-5=\log_3\left(\frac{x}{3}\right)$

$\log_3 \sqrt{x}+\log_3 9x-5 = \log_3\left(\frac{x}{3}\right) \rightarrow \log_3 \sqrt{x}+\log_3 9x-\log_3\left(\frac{x}{3}\right) = 5$
Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\frac{1}{2}\log_3 x + \log_3 9 + \log_3 x - \log_3 x + \log_3 3 = 5$$

Como $\begin{bmatrix} \log_3 9 = 2 \\ y \\ \log_3 3 = 1 \end{bmatrix}$ la ecuación quedará así:

$$\frac{1}{2}\log_3 x + 2 + \log_3 x - \log_3 x + 3 = 5$$

Reduciendo términos y aislando $\log_3 x$:

$$\frac{1}{2}\log_3 x = 2 \rightarrow \log_3 x = 4$$

Aplicando la definición de logaritmo

$$x = 3^4 = 81$$

Comprobación:
$x = 3^4 = 81$ si que es solución; ya que:

Término izquierda ec	Término derecha ec.
$\log_3 \sqrt{3^4} + \log_3\left(3^3 \cdot 3^4\right) - 5$	$\log_3\left(\frac{3^4}{3}\right)$
$\log_3 3^2 + \log_3 3^6 - 5$	$\log_3 3^3$
$2+6-5 = 3$	3

Ejercicio 5 $2^x = 3$

$2^x = 3$
Por la definición de logaritmo; sabemos que la solución es $\log_2 3$
Ahora bien, la solución también la podemos obtener tomando logaritmos decimales:

$$\log 2^x = \log 3 \rightarrow x \log 2 = \log 3$$

Aislando x

$$x = \frac{\log 3}{\log 2} = \log_2 3 \approx 1.585$$

Ejercicio 6 $x^{1.56} = 8$

$x^{1.56} = 8$
tomando logaritmos decimales:

$$\log x^{1.56} = \log 8 \rightarrow 1.56 \log x = \log 8$$

Aislando $\log x$
$$\log_{10} x = \frac{\log_{10} 8}{1.56}$$
Aplicando la defnición de logaritmo decimal:
$$\log_{10} x = \frac{\log_{10} 8}{1.56} \rightarrow x = 10^{\frac{\log_{10} 8}{1.56}} \approx 3.792$$

Ejercicio 7 $\log(2x-4) - \log(x+2) = 1$,

$$\log(2x-4) - \log(x+2) = 1 \rightarrow \log\left(\frac{2x-4}{x+2}\right) = 1 = \log 10$$
De donde;: obtenemos la ecuación:
$$\frac{2x-4}{x+2} = 10$$
Multiplicando por $x+2$ (Lo podemos hacer ya que $x \neq$ [1] -2)
$$2x - 4 = 10x + 20 \rightarrow x = -3$$
Comprobación

$x = -3$ no es solución de la ecuación; ya que al sustituir en la ecuación inicial obtenemos el logaritmo decimal de un número negativo (no es un número real)

Ejercicio 8 $3\log x = \log 25 + \log x$

Aislando $\log x$
$$2\log x = \log 25 \rightarrow \log x = \frac{1}{2}\log 25 = \log\left(25^{\frac{1}{2}}\right) = \log 5$$
De donde deducimos que
$$x = 5$$
Comprueba tú que $x = 5$ si es solución de la ecuación.

Ejercicio 9 $2\log(x+1) - \log 2 = \log(x^2-1)$
$$2\log(x+1) - \log 2 = \log(x^2-1) \rightarrow \log(x+1)^2 - \log 2 = \log(x^2-1)$$
$$\log\left[\frac{(x+1)^2}{2}\right] = \log(x^2-1)$$
Por lo que:
$$\frac{(x+1)^2}{2} = (x^2-1)$$

[1] Si $x = -2$ al sustituir en la ecuación inicial no podríamos calcular $\log(x+2)$

Multiplicando la ecuación por 2

$$(x+1)^2 = 2(x^2-1)$$

Desarrollando los cuadrados y transponiendo términos, obtenemos la ec. de segundo grado

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ -1 \end{array} \right.$$

Comprobación:

a) $x = 3$ si que es solución ya que:

Término izquierda ec	Término derecha ec.
$2\log 4 - \log 2$	
$\log 4^2 - \log 2$	$\log 8$
$\log\left(\frac{4^2}{2}\right) = \log 8$	

b) $x = -1$ no es solución ($\log 0$ no se puede calcular)

Ejercicio 10 $\log(x^3-8) = 3\log(x-2)$

$\log(x^3-8) = 3\log(x-2) \rightarrow \log(x^3-8) = \log(x-2)^3$
De donde, podemos afirmar que:

$$x^3 - 8 = (x-2)^3$$

como $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ entonces

$$\begin{aligned} x^3 - 8 &= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \\ 0 &= -6x^2 + 12x \\ 0 &= x^2 - 2x \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación $0 = x^2 - 2x$ obtenemos como posibles soluciones.

$$x = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \right.$$

Nota: Comprueba tú que ninguna posible solución lo es

Ejercicio 11 $\frac{\log(x^2+11)}{2} = \log x + \log 6 - \log 5$

$\frac{\log(x^2+11)}{2} = \log x + \log 6 - \log 5 \rightarrow \frac{\log(x^2+11)}{2} = \log\left(\frac{6x}{5}\right)$
Multiplicando por 2:

$$\log(x^2+11) = 2\log\left(\frac{6x}{5}\right) = \log\left(\frac{6x}{5}\right)^2$$

De donde

$$x^2 + 11 = \frac{36x^2}{25}$$

Multiplicando por 25

$$25x^2 + 275 = 36x^2 \rightarrow 11x^2 = 275 \rightarrow x^2 = 25$$

Con lo que las posibles soluciones son

$$x = \begin{cases} 5 \\ -5 \end{cases}$$

Nota: La única que vale es el 5 (Compruébalo tú)

Ejercicio 12 $\frac{\log_{10}(x^2-4)}{2} = 1 - \log_{10} 5$

Multiplicando por 2

$$\log(x^2 - 4) = 2 - 2\log 5$$

como $\left[\begin{array}{c} 2 = \log 100 \\ y \\ 2\log 5 = \log 5^2 = \log 25 \end{array} \right]$ la ecuación nos quedará asi:

$$\log(x^2 - 4) = \log 100 - \log 25 = \log 4$$

De donde:

$$x^2 - 4 = 4 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = \begin{cases} \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{8} = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

Los dos valores obtenidos son solución de la ecuación inicial.

Ejercicio 13 $\log\sqrt{3x+10} - \log\sqrt{x+2} = 1 - \log 5$

$\log(3x+10)^{\frac{1}{2}} - \log(x+2)^{\frac{1}{2}} = \log 10 - \log 5$
$\frac{1}{2}\log(3x+10) - \frac{1}{2}\log(x+2) = \log\left(\frac{10}{5}\right) = \log 2$
Si multiplicamos por 2
$\log(3x+10) - \log(x+2) = 2\log 2$
$\log\left(\frac{3x+10}{x+2}\right) = \log 4^2 = \log 4 \rightarrow \frac{3x+10}{x+2} = 4$
Multiplicando por $x+2$ (Lo podemos hacer; ya que $x \neq$[2] -2)
$3x + 10 = 4(x+2)$
Transponiendo términos y aislando la incógnita:

$$x = 2$$

Comprobación:

[2]Si $x = -2$ al sustituir en la ecuación inicial no podríamos calcular $\log(x+2)$

Miembro izquierda ec	Miembro derecha ec
$\log\sqrt{3\,(2)+10}-\log\sqrt{(2)+2}$	$1-\log 5$
$\log 4-\log 2=\log\left(\frac{4}{2}\right)=\log 2$	$\log 10-\log 5=\log\left(\frac{10}{5}\right)=\log 2$

Ejercicio 14 $\dfrac{\log(16-x^2)}{\log(3x-4)}=2$

$$\frac{\log(16-x^2)}{\log(3x-4)}=2\rightarrow\log(16-x^2)=2\log(3x-4)$$

$$\log(16-x^2)=\log(3x-4)^2$$

Obteniendo la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}16-x^2&=(3x-4)^2\\16-x^2&=9x^2-24x+16\\0&=10x^2-24x\\0&=5x^2-12x\end{aligned}$$

Factorizando la ecuación

$$x\,(5x-12)=0\rightarrow x=\begin{cases}0\\\frac{12}{5}\end{cases}$$

Nota 1: $x=0$ no es solución
Nota 2: $x=\frac{12}{5}$ si es solución (compruébalo)

Ejercicio 15 $\dfrac{\log 2+\log(11-x^2)}{\log(5-x)}=2$

$$\frac{\log 2+\log(11-x^2)}{\log(5-x)}=2\rightarrow\log 2+\log(11-x^2)=2\log(5-x)$$

$$\log 2+\log(11-x^2)=\log(5-x)^2$$
$$\log\left[2(11-x^2)\right]=\log(25-10x+x^2)$$

Lo que da lugar a la ecuación:

$$22-2x^2=25-10x+x^2$$

Transponiendo y ordenando términos, obtenemos la ecuación:

$$3x^2-10x+3=0$$

Cuyas soluciones son:

$$x=\frac{10\pm\sqrt{64}}{6}=\begin{cases}3\\\frac{1}{3}\end{cases}$$

Nota: comprueba que los dos valores son solución de la ecuación.

Ejercicio 16 $\log(x+1) - \log\sqrt{x-1} = \log(x-2)$

$$\log(x+1) - \log\sqrt{x-1} = \log(x-2)$$

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}\right) &= \log(x-2) \\ \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} &= x-2 \end{aligned}$$

Si elevamos al cuadrado:

$$\frac{x^2+2x+1}{x-1} = x^2-4x+4$$

Multiplicando por $x-1$ (Lo podemos hacer ya que $x-1 \neq$ [3]0.) :

$$\begin{aligned} x^2+2x+1 &= \left(x^2-4x+4\right)(x-1) \\ x^2+2x+1 &= x^3-5x^2+8x-4 \end{aligned}$$

Transponiendo y reduciendo términos semejantes, obtenemos la ecuación de tercer grado:

$$0 = x^3-6x^2+6x-5$$

Para resolverla, factorizamos dicho polinomio utilizando la regla de Ruffini

	1	-6	6	-5
5		5	-5	5
	1	-1	1	0

Con lo que resolver la ecuación anterior es equivalente a resolver

$$(x-5)(x^2-x+1) = 0 \to \begin{cases} x-5=0 \to x=5 \\ x^2-x+1=0 \text{ no tiene solución real} \end{cases}$$

Ejercicio 17 $\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) + \ln 2 = \ln(x+3)$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \ln 2 = \ln(x+3) \to \ln\left[\frac{2\,(x+1)}{x}\right] = \ln(x+3)$$

Por lo que:

$$\frac{2\,(x+1)}{x} = x+3$$

Multiplicando por x (Lo podemos hacer ya que $x \neq$ [4]0.)

$$2x+2 = x^2+3x$$
$$x^2+x-2 = 0$$

[3] Si $x=1$ al sustituir en la ecuación inicial no podríamos calcular $\log(\sqrt{x-1})$

[4] Si $x=0$ al sustituir en la ecuación inicial no podríamos calcular $\dfrac{x+1}{x}$

Cuyas soluciones son

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Nota: Las dos soluciones obtenidas son válidas (Compruébalo)

Ejercicio 18 $\log(x^2 + 2x - 39) - \log(3x - 1) = 1$

$\log(x^2+2x-39)-\log(3x-1) = 1 \rightarrow \log\left[\dfrac{x^2+2x-39}{3x-1}\right] = \log 10$
De donde

$$\frac{x^2 + 2x - 39}{3x - 1} = 10$$

Multiplicando por $3x-1$ (Lo podemos hacer ya que $3x-1 \neq$ [5] 0)

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 39 &= 30x - 10 \\ x^2 - 28x - 29 &= 0 \end{aligned}$$

Cuyas soluciones son

$$x = \frac{28 \pm \sqrt{784 + 116}}{2} = \frac{28 \pm \sqrt{900}}{2} \begin{cases} 29 \\ -1 \end{cases}$$

De las dos posibles soluciones, $x = -1$ no es solución (Compruébalo)

Ejercicio 19 $\log(x - 1) = \log\sqrt{x+1} + \log\sqrt{x-4}$

$\log(x-1) = \log\sqrt{x+1} + \log\sqrt{x-4} \rightarrow \log(x-1) = \log\left[\sqrt{x+1}\sqrt{x-4}\right]$
De donde:

$$\begin{aligned} x - 1 &= \sqrt{x+1}\sqrt{x-4} \\ x - 1 &= \sqrt{x^2 - 3x - 4} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &= x^2 - 3x - 4 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Nota: $x = -5$ no es solución

Ejercicio 20 $\log(x + 1) = \log\sqrt{x-1} + \log\sqrt{x+4}$

[5] Si $x = \frac{1}{3}$ al sustituir en la ecuación inicial no podríamos calcular $\log(3x - 1)$

$\log(x+1) = \log\sqrt{x-1} + \log\sqrt{x+4} \rightarrow \log(x+1) = \log\left[\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}\right]$
De donde:

$$\begin{aligned} x+1 &= \sqrt{x-1}\sqrt{x+4} \\ x+1 &= \sqrt{x^2+3x-4} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned} x^2+2x+1 &= x^2+3x-4 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Nota: $x = 5$ si es solución

Ejercicio 21 $\log(x+1) = \log\sqrt{x-1} + \log\sqrt{x-4}$

$\log(x+1) = \log\sqrt{x-1} + \log\sqrt{x-4} \rightarrow \log(x+1) = \log\left[\sqrt{x-1}\sqrt{x-4}\right]$
De donde:

$$\begin{aligned} x+1 &= \sqrt{x-1}\sqrt{x-4} \\ x+1 &= \sqrt{x^2-5x+4} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned} x^2+2x+1 &= x^2-5x+4 \\ x &= \frac{3}{7} \end{aligned}$$

Nota: $x = \frac{3}{7}$ no es solución.

Ejercicio 22 $\log(1-x) = \log\sqrt{1+x} + \log\sqrt{4-x}$

$\log(1-x) = \log\sqrt{1+x} + \log\sqrt{4-x} \rightarrow \log(1-x) = \log\left[\sqrt{1+x}\sqrt{4-x}\right]$
De donde:

$$\begin{aligned} 1-x &= \sqrt{1+x}\sqrt{4-x} \\ 1-x &= \sqrt{-x^2+3x+4} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned} x^2-2x+1 &= -x^2+3x+4 \\ 2x^2-5x-3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos:

$$x = \begin{cases} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Nota: $x = 3$ no es solución y $x = .-\frac{1}{2}$ si lo es

Ejercicio 23 $\log_7(x-2)-\log_7(x+2)=1-\log_7(2x-7)$

$\log_7(x-2)-\log_7(x+2)=1-\log_7(2x-7)$
como $1=\log_7 7$; entonces la ecuación anterior queda:

$$\begin{aligned}\log_7(x-2)-\log_7(x+2) &= \log_7 7-\log_7(2x-7)\\ \log_7\left(\frac{x-2}{x+2}\right) &= \log_7\left(\frac{7}{2x-7}\right)\end{aligned}$$

Al ser la función logarítmica una biyección de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$, tendremos.

$$\frac{x-2}{x+2}=\frac{7}{2x-7}$$

Multiplicando por $(x+2)(2x-7)$ (Lo podemos hacer ya que x$\neq -2$ y $x\neq \frac{7}{2}$. Si x fuese -2 no podría calcular $\log(x+2)$ y si fuese x $\frac{7}{2}$ entonces no podría calcular $\log_7(2x-7)$

$$(x-2)\,(2x-7)=7\,(x+2)$$

Operando y transponiendo términos , obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned}2x^2-18x &= 0\\ x^2-9x &= 0\\ x(x-9) &= 0\end{aligned}$$

cuyas soluciones son :

$$x=\begin{cases}0\\9\end{cases}$$

comprueba que el *o* no es solución y 9 si que lo es

Ejercicio 24 $\log(2x+1)^2+\log(3x-4)^2=2$

$\log(2x+1)^2+\log(3x-4)^2=2\rightarrow 2\log(2x+1)+2\log(3x-4)=2$
Dividiendo entre 2
$\log(2x+1)+\log(3x-4)=1\rightarrow \log_{10}\left[(2x+1)(3x-4)\right]=1$
Aplicando la definición de logaritmo:

$$(2x+1)(3x-4)=10$$

Operando y transponiendo términos, obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$6x^2-5x-14=0$$

Cuyas soluciones son:

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25+336}}{12}=\frac{5\pm\sqrt{361}}{12}=\frac{5\pm 19}{12}=\begin{cases}2\\-\frac{7}{6}\end{cases}$$

Realiza tú las comprobaciones (Los dos valores obtenidos verifican la ecuación).

Ejercicio 25 $-2\ln x=3$

$-2\ln x=3\rightarrow \ln x=-\frac{3}{2}$
como $\ln x=\log_e x$; entonces

$$\log_e x=-\frac{3}{2}$$

Aplicando la definición de logaritmo:

$$x=e^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{e\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}}{e\sqrt{e}\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}}{e^2}\approx 0.223\,13$$