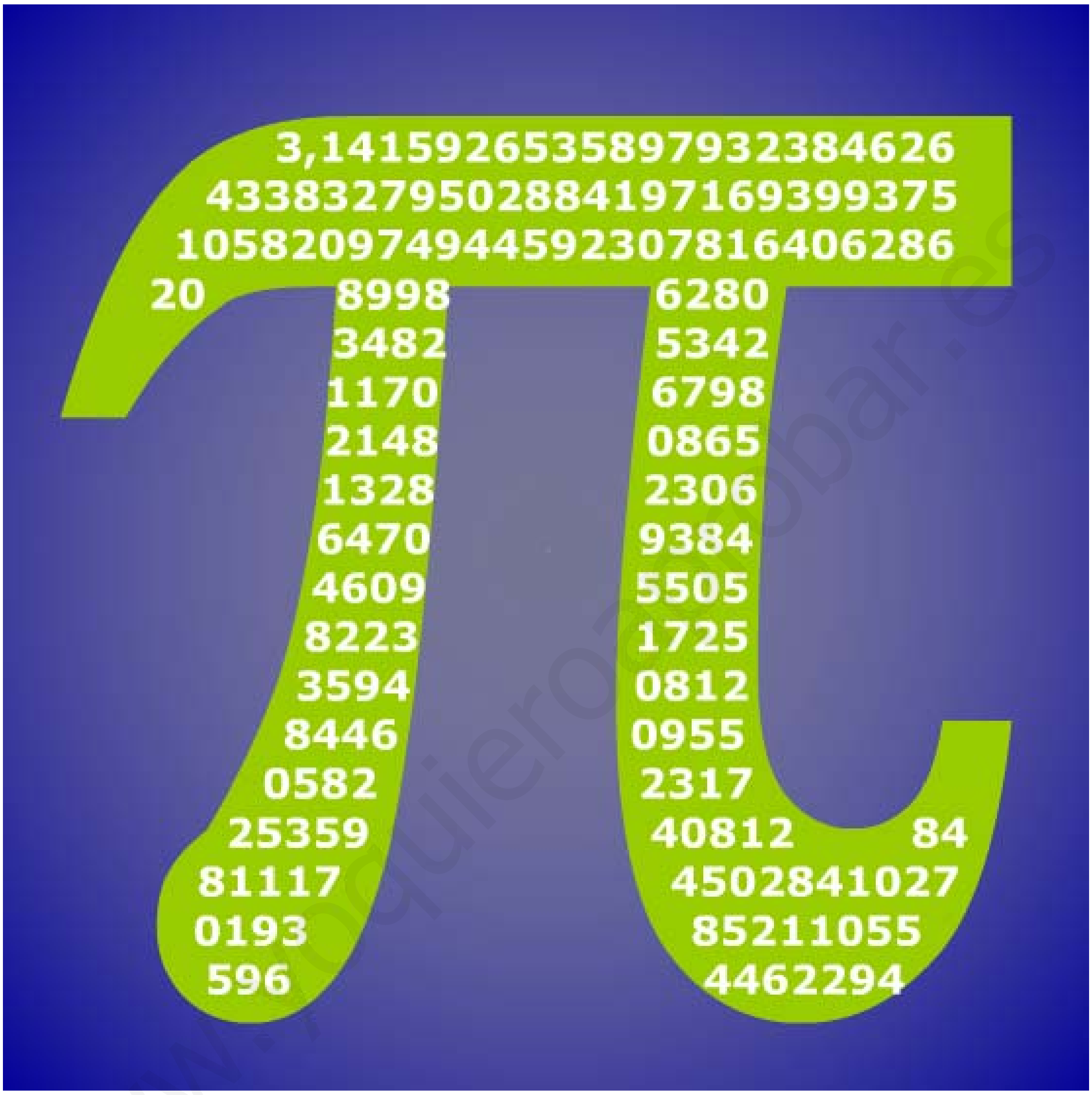
1 Números reales

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Clasificar los números reales en racionales e irracionales.
- Aproximar números con decimales hasta un orden dado.
- Calcular la cota de error de una aproximación.
- Representar en la recta números reales.
- Expresar y representar intervalos de números reales.
- Utilizar la calculadora para facilitar los cálculos.

Antes de empezar



Investiga

Seguramente hayas realizado alguna vez algún cálculo con el número pi; por ejemplo, calcular la longitud de alguna circunferencia o el área de un círculo. En estos cálculos habrás utilizado valores como 3'14, 3'1416, 3'141592,... También es posible que hayas leído en algún periódico que se ha descubierto otra cifra del número pi, o que ya se conocen con exactitud tantas cifras del número pi. Todo lo anterior resulta un poco confuso. ¿Cuál de las cantidades anteriores es el auténtico número pi? ¿Cómo es posible que llamemos pi a todas ellas si es obvio que son diferentes? ¿Cómo es posible que se estén descubriendo todavía cifras de pi si lo estamos usando desde hace un montón de años?.

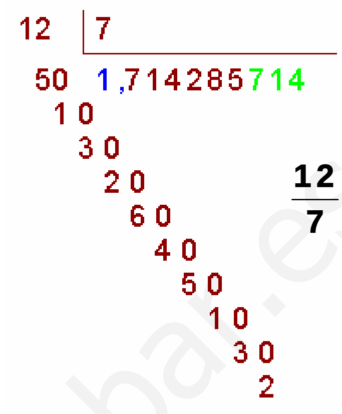
Intenta dar una respuesta a estas preguntas. Si no lo consigues ahora vuelve a intentarlo después de ver este tema en profundidad. Para finalizar la propuesta ahí va otra pregunta: ¿Cuál es o cuál podría ser la última cifra del número pi?

1. Números racionales e irracionales

Decimales periódicos

Has visto en cursos anteriores que una fracción es un cociente entre dos números enteros. La división de esos dos números da lugar a una **expresión decimal** con un grupo de cifras que se repiten periódicamente, el llamado **periodo**, y que puede ser:

- Decimal **periódico puro**.
  La representación de un número de este tipo es:
  $\frac{12}{11} = 1{,}090909\ldots = 1{,}\overset{\frown}{09}$; el periodo es 09.
- Decimal **periódico mixto**.
  $\frac{31}{15} = 2{,}06666\ldots = 2{,}0\hat{6}$; el periodo es 6.
- Decimal exacto.
  $\frac{1}{8} = 0{,}125000\ldots = 0{,}125$



El resto siempre es menor que el divisor, luego a lo sumo en un número de pasos igual al divisor, el resto se va repetir y las cifras decimales del cociente también.

Fracción generatriz

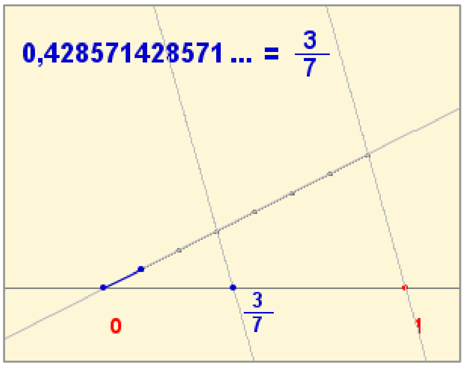
Todo decimal periódico puede expresarse en forma de fracción que llamaremos **fracción generatriz** del decimal en cuestión.

En estos casos no es necesario aplicar la fórmula sino que resulta más sencillo proceder de la siguiente manera:

- Decimal exacto
  Se divide por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales hay.
- Decimal periódico puro
  En el numerador se escribe la diferencia entre la parte entera seguida del periodo y la parte entera, en el denominador tantos nueves como cifras tiene el periodo.
- Decimal periódico mixto
  En el numerador se escribe la parte entera seguida de las cifras hasta acabar el primer periodo menos la parte entera seguida de las cifras hasta comenzar el periodo, en el denominador tantos nueves como cifras tiene el periodo seguidos de tantos ceros como cifras hay entre la coma y el comienzo del periodo.

- Decimal exacto $x=71{,}52$
  2 cifras decimales
  se multiplica por 10^2
  $100x=7152$
  $x = \frac{7152}{100}$
- Periódico puro $x=853{,}11\ldots$
  Periodo con 1 cifra
  se multiplica por 10
  $10x=8531{,}11\ldots$
  Restando: $9x=8531-853$
  $x = \frac{7678}{9}$
- Periódico mixto $x=4{,}9368368\ldots$
  1 cifra entre la coma y el periodo
  se multiplica por 10
  $10x=49{,}368368\ldots$
  Periodo con 3 cifras
  se multiplica por 10^3
  $10000x=49368{,}368\ldots$
  Restando: $9990x=49368-49$
  $x = \frac{49319}{9990}$

Números racionales



Los decimales exactos, periódicos puros y periódicos mixtos tienen en común que su parte decimal acaba siendo periódica (por lo que a todos ellos los llamaremos **decimales periódicos**). Además, hemos visto que pueden escribirse en forma de *fracción* o *razón*, por lo que a partir de ahora a los decimales periódicos los llamaremos **números racionales**.

Los números racionales pueden representarse de forma ordenada sobre una línea recta, asignando a cada número un punto de la misma.

$\sqrt{2}$ no es un decimal periódico

Si lo fuese se podría escribir en forma de fracción irreducible:

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r}{q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s}$$

siendo $p_1, p_2, \ldots$, los factores primos de n; $q_1, q_2, \ldots$ los de m y todas las "p" distintas de las "q".

Elevando al cuadrado:

$$2 = \frac{n^2}{m^2} = \frac{p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \ldots \cdot p_r^2}{q_1^2 \cdot q_2^2 \cdot \ldots \cdot q_s^2} \Rightarrow n^2 = 2m^2$$

Luego n es divisible para 2, n=2t,

por tanto $\sqrt{2} = \frac{2t}{m}$

Elevando de nuevo al cuadrado:

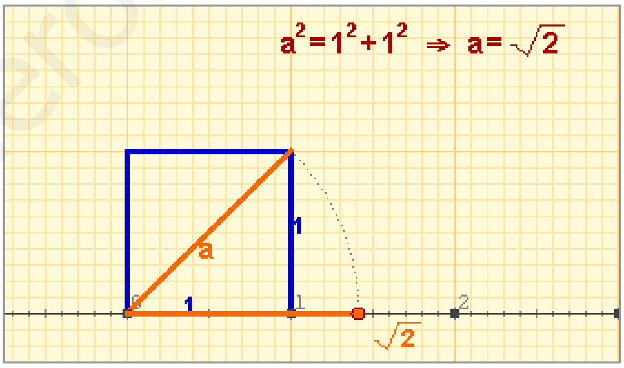
$$2m^2 = 4t^2 \Rightarrow m^2 = 2t^2$$

De donde se deduce que también m es divisible por 2, lo que es contradictorio con que m/n sea una fracción irreducible.

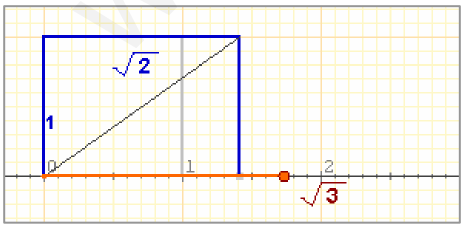
Por lo que $\sqrt{2}$ no se puede escribir en forma de fracción y no es decimal periódico.

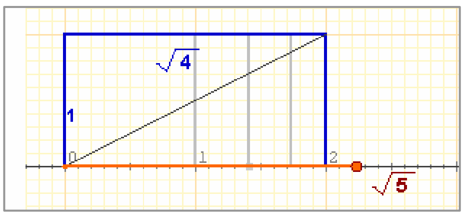
Números irracionales

Existen números que no pueden escribirse en forma de fracción o equivalentemente su parte decimal no es periódica. Estos números reciben el nombre de **números irracionales**.



Números reales





En las figuras adjuntas puedes ver cómo pueden representarse en la recta números irracionales procedentes de raíces cuadradas. Sin embargo, no todos los números irracionales pueden representarse mediante una técnica simple como ésta y hay que recurrir a métodos aproximados para lograrlo.

Ahora, lo importante es que tenemos dos conjuntos numéricos: los decimales periódicos o **racionales** y los decimales no periódicos o **irracionales**. La unión de estos dos conjuntos es el conjunto de los **números reales**.

EJERCICIOS resueltos

1. Calcula la fracción generatriz:

a) 2,375 $\quad 1000x=2375 \quad \Rightarrow x = \frac{2375}{1000} = \frac{19}{8}$

b) 43,666... $\quad x = 43,\widehat{6}$

$10x = 436,\widehat{6} \quad 9x=436-43 \quad \Rightarrow x = \frac{393}{9} = \frac{131}{3}$

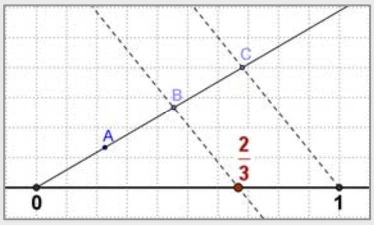
c) 4,3666... $\quad x = 4,3\widehat{6}$

$10x = 43,\widehat{6}$

$100x = 436,\widehat{6} \quad 90x=436-43 \quad \Rightarrow x = \frac{393}{90} = \frac{131}{30}$

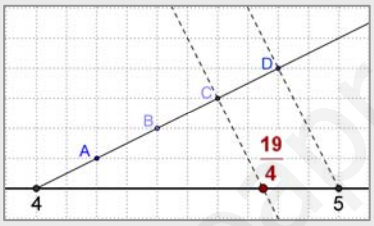
2. Representa en la recta:

a) 2/3



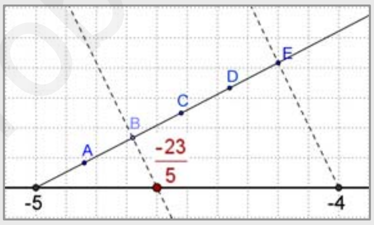
Se divide el segmento (0,1) en 3 partes iguales y se toman 2.

b) 19/4 =4 + 3/4



Puesto que 19/4 = 4 + 3/4, se divide el segmento (4,5) en 4 partes iguales y se toman 3.

c) -23/5 = -5 + 2/5

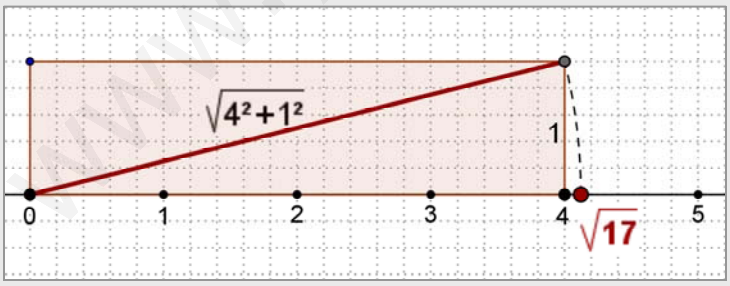


Puesto que -23/5 = -5 + 2/5, se divide el segmento (-5,-4) en 5 partes iguales y se toman 2.

3. Determina qué tipo de decimales son los siguientes:

a) $\frac{92}{73}$ b) $\frac{57}{22}$ c) $\frac{27}{36}$ $\quad$ a) Periódico puro b) Periódico mixto c) Exacto

4. Representa $\sqrt{17}$:



$17=16 + 1= 4^2+1^2$

Basta dibujar un rectángulo de base 4 unidades y altura 1, a partir del origen.

La diagonal mide $\sqrt{17}$, con el compás se toma la medida y se marca el punto correspondiente sobre la recta graduada..

5. Decide si los siguientes números son racionales o irracionales:

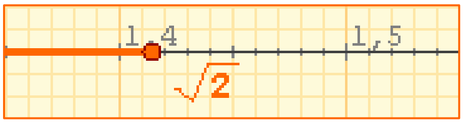
-5, 0, $\pi/2$, $\sqrt{16}$, 7/3, 2,313131...., $\sqrt{15}$, 1,01001000100001... , -4/5, 4,65

Son racionales los enteros y decimales exactos o periódicos:

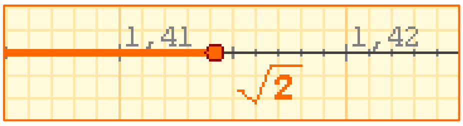
-5, 0, $\sqrt{16} = 4$, 7/3, -4/5 y 4,65

Son irracionales: $\pi/2$, $\sqrt{15}$, 1,01001000100001...

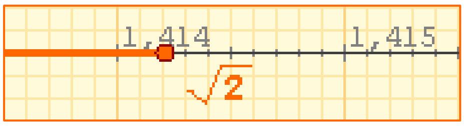
$\sqrt{2} = 1{,}414213562373095\ldots$



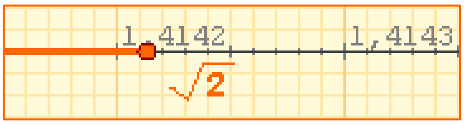
$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$



$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$



$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$



$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$

TRUNCAMIENTO	REDONDEO
1,4	1,4
1,41	1,41
1,414	1,414
1,4142	1,4142
1,41421	1,41421
1,414213	1,414214
1,4142135	1,4142136
1,41421356	1,41421356

$\dfrac{506}{13} = 38{,}923076923076\ldots$

Aproximamos con 4 cifras:

- Por truncamiento: **38,9230**

Error absoluto:
$|38{,}9230-38{,}923076923076\ldots|$
$=0{,}000076923076\ldots$

Error relativo:
$\dfrac{0{,}0000769230\ldots}{38{,}92307692\ldots} = 0{,}00000197$
$= 0{,}000197\%$

- Por redondeo: **38,9231**

Error absoluto:
$|38{,}9231-38{,}9230769230\ldots|$
$=0{,}000023076923\ldots$

Error relativo:
$\dfrac{0{,}000023076923\ldots}{38{,}92307692\ldots} = 0{,}00000059$
$= 0{,}000059\%$

2. Calculando con números reales

Aproximaciones

Como has comprobado, los números reales tienen infinitas cifras decimales, por lo que, en general, no es posible dar su valor exacto. En algunos casos, como los racionales (con la fracción generatriz) y los radicales, sí es posible representarlos de manera exacta. Pero en infinidad de otros casos (como el número π, o el número **e**) esto no es posible.

Cuando en un problema necesitamos usar un número con infinitas cifras decimales, en la práctica usamos un valor aproximado que nos permita obtener un resultado aceptable aunque no sea exacto.

Una aproximación es **por defecto** si es menor que el número exacto y **por exceso** si es mayor.

- ✓ Cuando en un decimal nos quedamos con las n primeras cifras decimales decimos que hemos realizado un **truncamiento** con n cifras significativas.
- ✓ Realizamos un **redondeo** con n cifras significativas, si truncamos con n cifras, dejando igual la cifra n-ésima si la siguiente es menor que 5, y aumentando la última cifra en una unidad en caso contrario.

Observa los ejemplos de la izquierda donde se toman distintas aproximaciones de $\sqrt{2}$.

Medida de errores

Para hacer cálculos con números reales debemos utilizar, en muchos casos, aproximaciones. Surge entonces el problema de saber hasta qué punto es válida la aproximación realizada. Para ello definimos:

- ✓ **Error absoluto**: es la diferencia positiva entre el valor exacto y el valor aproximado.
- ✓ **Error relativo**: es el cociente entre el error absoluto y el valor exacto. Suele medirse en %.

Cuando el valor exacto es desconocido se emplea la llamada **cota de error**, es el valor mayor que puede tomar el valor absoluto. Su magnitud nos permite saber hasta qué cifra decimal podemos tener la certeza de que es correcta.

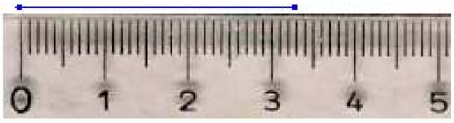
Cálculo con aproximaciones

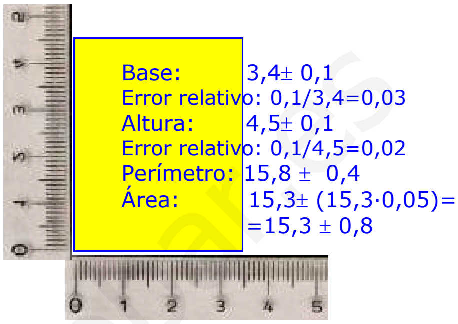
El cálculo con aproximaciones está relacionado con el problema de la medida. Al medir longitudes usando una regla graduada en cm y mm, obtenemos dos aproximaciones, una por defecto y otra por exceso, y daremos como medida el valor más cercano o el que nos parezca mas probable. La cota de error será la diferencia entre estas aproximaciones o la mitad si tomamos el valor más probable.

Si operamos con las medidas así obtenidas:

- ✓ **El error absoluto de la suma** o resta de dos o más aproximaciones es la **suma** de los errores absolutos de todas ellas.
- ✓ **El error relativo del producto** o cociente de dos o más aproximaciones es la **suma** de los errores relativos de cada una de ellas.

Aproximación por defecto: 3,20
Aproximación por exceso: 3,30
Valor más probable: 3,25
Cota de error: 3,25-3,20=0,05



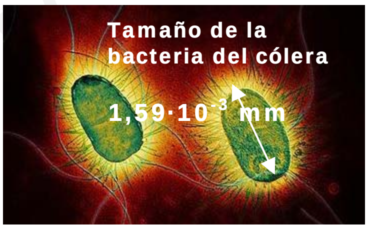


Notación científica

Las aproximaciones tienen un interés especial cuando se trabaja con números muy grandes o muy próximos a 0. En este caso utilizamos una notación especial denominada **notación científica**, llamada así porque es en el ámbito de la ciencia donde más suele utilizarse.

Un número expresado en notación científica tiene la forma: $\mathbf{x \cdot 10^n}$, siendo x un nº decimal mayor que 1 y menor que 10, es decir con una sola cifra distinta de 0, en su parte entera.

Para operar con números en notación científica basta aplicar las propiedades de las potencias.



La galaxia de Andrómeda tiene un diámetro de 100000 años-luz y está situada a unos 2000000 de años-luz, ¿cuál es su diámetro y cuánto dista en km?

Velocidad de la luz:300000 km/sg
En un año:
300000·365·24·60·60=
9.460.800.000.000 km =
$\mathbf{9{,}4608 \cdot 10^{12}}$

Diámetro de la galaxia (km):
$10^5 \cdot 9{,}4608 \cdot 10^{12} = \mathbf{9{,}4608 \cdot 10^{17}}$

Distancia (km):
$2 \cdot 10^6 \cdot 9{,}4608 \cdot 10^{12} = \mathbf{1{,}8922 \cdot 10^{19}}$

¿Cuántos átomos de oxígeno caben a lo largo de una bacteria?

$$\frac{1{,}59 \cdot 10^{-3}}{1{,}2 \cdot 10^{-7}} = 1{,}325 \cdot 10^4$$

¿Cuántos núcleos de oxígeno caben a lo largo de un átomo?

$$\frac{1{,}2 \cdot 10^{-7}}{6{,}55 \cdot 10^{-12}} = 0{,}1832 \cdot 10^5$$

en notación científica
$= 1{,}832 \cdot 10^4$

Con la calculadora

Para introducir en la calculadora números en notación científica como:

- $9{,}0043 \cdot 10^{13}$

 Teclea 9 . 0043 EXP 13

 Aparecerá: 9.0043 ¹³

- $6{,}0743 \cdot 10^{-18}$

 Teclea 6 . 0743 EXP +/- 18

 Aparecerá: 6.0743 ⁻¹⁸

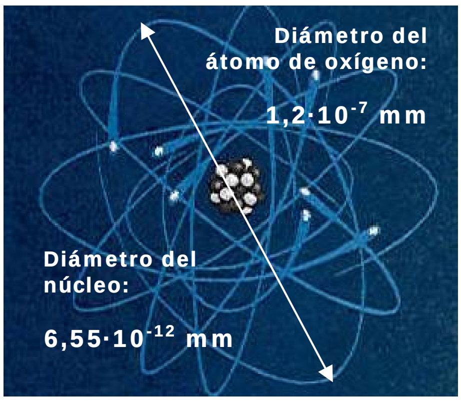
Si introduces:

- $900{,}43 \cdot 10^{13}$

 Teclea 900 . 43 EXP 13

 Aparecerá: 900.43 ¹³

 Y pulsando = sale el nº en notación científica: 9.0043 ¹⁵



EJERCICIOS resueltos

6. El radio de una circunferencia es 3,96 m. Utilizando la calculadora y el valor de π que da, calcula:

a) La longitud de la circunferencia truncando el resultado a cm.

$L = 2\cdot\pi\cdot r = 24{,}88141381...m = 2488$ cm

b) La longitud de la circunferencia redondeando el resultado a cm

$L = 2\cdot\pi\cdot r = 24{,}88141381...m = 2488$ cm

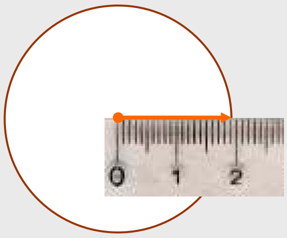
c) El área del círculo truncando a cm^2

$A = \pi\cdot r^2 = 49{,}26519935...\ m^2 = 492651\ cm^2$

d) El área del círculo redondeando a cm^2

$A = \pi\cdot r^2 = 49{,}26519935...\ m^2 = 492652\ cm^2$

7. Calcula la longitud de la circunferencia y el área del círculo de la figura y sus respectivas cotas de error.



Radio: 1,9 cm con un error menor que 0,1 cm
Tomamos como valor de π: 3,1
Error relativo en la medida de π : 0,1/3,1=0,03
Error relativo en la medida del radio: 0,1/1,9
Longitud = 2·3,1·1,9=11,8 con un error relativo=0,08
Longitud =11,8 ± (11,8·0,08)=11,8 ± 0,9
Área =3,1·1,9·1,9 =11,2 con un error relativo 0,14
Área =11,2 ± 0,14·11,2 =11,2 ± 1,6

8. Los radares de tráfico miden la velocidad de los coches en calles y carreteras. La legislación vigente tiene en cuanta que en toda medición se cometen errores por eso concede un margen de error del 10% (o un error relativo de 0,10). Teniendo esto en cuenta calcula la velocidad máxima a que puede ir un coche sin infringir la ley en los casos:

a) Autopista con límite de velocidad de 120 km/h: 120+0,10·120 = 132 km/h

b) Carretera con límite de velocidad de 90 km/h: 90+0,10·90 = 99 km/h

c) Vía urbana con límite de velocidad de 50 km/h: 50+0,10·50 = 55 km/h

9. Escribe en notación científica o en notación decimal respectivamente:

a) 0,000000002145 = $2{,}145\cdot10^{-9}$ b) $3{,}589\cdot10^{9}$ = 3589000000

b) 1523000000000 = $1{,}523\cdot10^{12}$ d) $5{,}267\cdot10^{-5}$= 0,00005267

10. Con los datos del tema y usando la calculadora si es preciso, averigua cuántos sistemas solares como el nuestro cabrían a lo largo del diámetro de la galaxia de Andrómeda:

Diámetro de Andrómeda: $9{,}4608\cdot10^{17}$ Diámetro Sistema Solar: $9{,}0086\cdot10^{9}$

$\frac{9{,}4608\cdot10^{17}}{9{,}0086\cdot10^{9}} = 1{,}0502\cdot10^{8} \cong 105020000$ algo más de 100 millones de sistemas.

11. Con los datos del tema y usando la calculadora si es preciso, calcula en mm^3 el volumen de un átomo de oxígeno considerando que es una esfera.

Radio del átomo de Oxígeno: $6\cdot10^{-6}$ mm

Volumen = $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\cdot6^3\cdot(10^{-6})^3 = 904{,}78\cdot10^{-18} = 9{,}0478\cdot10^{-16}$

4. La recta real

Ordenación de números reales

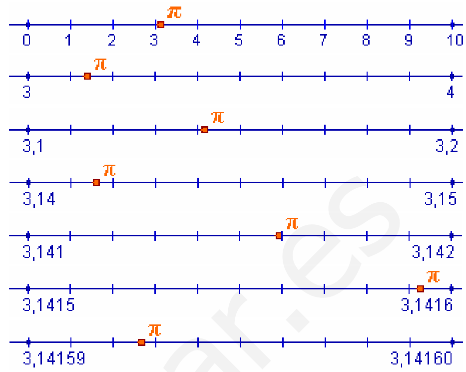
Todo número real queda representado por un punto de la recta y, recíprocamente, a todo punto de la recta le corresponde un número real.

Observa en el gráfico como asignar un punto de la recta a un número irracional como π, mediante una sucesión de intervalos encajados.

Esto permite definir una relación de orden en el conjunto de los números reales:

- ✓ Dados dos números reales, **a** y **b**, diremos que ***a* *es menor que b***, **a < b**, si al representarlos **a** está a la izquierda de **b**.
- ✓ También podemos decir que los números a la derecha del cero son los **positivos** y los de la izquierda son los **negativos**, y ***a* *es menor que b*** si la diferencia **b - a** es positiva.

π = **3,141592353589793…**

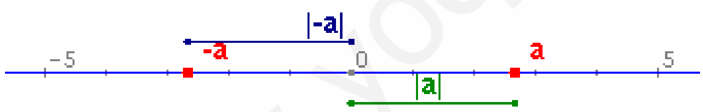


De esta forma podemos acotar π entre dos números racionales, que ya sabemos representar, y que están cada vez más próximos.

Valor absoluto y distancias

La equivalencia entre puntos y números permite aplicar conceptos geométricos al cálculo, en particular la idea de distancia mediante el valor absoluto de un número.

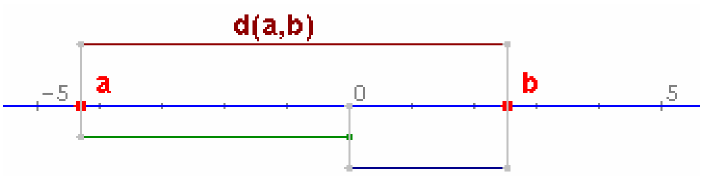
- ✓ Llamamos valor absoluto de un número real, **a**, al mayor de los números **a** y **-a**. El valor absoluto de **a** se representa así: **|a|**.

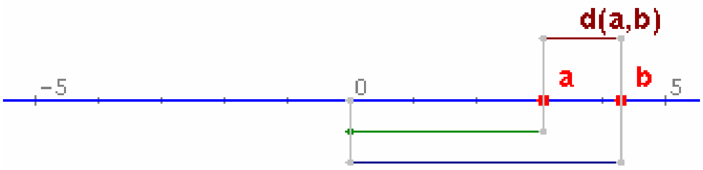


El valor absoluto de un número representa la distancia del mismo al cero. Podemos generalizar esta idea:

- ✓ La **distancia** entre dos números reales, **a** y **b**, es el valor absoluto de su diferencia:

d(a,b)=|b-a|=|a-b|





Propiedades del valor absoluto

1) $|a| \geq 0$

2) $|a|=|-a|$

3) $|a+b|\leq|a|+|b|$

4) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$

5) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

a=2,6828 **|a|=2,6828**

-a=-2,6828 **|-a|=2,6828**

Si a y b tienen el mismo signo la distancia entre a y b es la resta de los valores absolutos, y si el signo es distinto la suma.

a=-4,2946 **|a|=4,2946**

b=2,5447 **|b|=2,5447**

d(a,b)=6,8393

a=3,0054 **|a|=3,0054**

b=4,2861 **|b|=4,2461**

d(a,b)=1,2807

Intervalo cerrado:
Los extremos pertenecen al intervalo.

$[\mathbf{a,b}] = \{x \in R \,/\, a \le x \le b\}$

Intervalo abierto:
Los extremos no pertenecen al intervalo.

$(\mathbf{a,b}) = \{x \in R \,/\, a < x < b\}$

Intervalo semiabierto: Un extremo pertenece al intervalo y otro no.

$(\mathbf{a,b}] = \{x \in R \,/\, a < x \le b\}$

Entorno simétrico de a:

$(\mathbf{a\text{-}r,a+r}) = \{x \in R \,/\, a - r < x < a + r\}$

Semirrecta acotada superiormente

$(\mathbf{-\infty,b}] = \{x \in R \,/\, x \le b\}$

Semirrecta acotada inferiormente

$(\mathbf{a,+\infty}) = \{x \in R \,/\, a < x\}$

Intervalos: segmentos y semirrectas

El concepto de intervalo está ligado a los conceptos geométricos de segmento y semirrecta: un intervalo acotado equivale a un segmento y un intervalo no acotado equivale a una semirrecta.

- ✓ Dados dos números reales **a** y **b**, se llama **intervalo de extremos a y b** al conjunto de números reales comprendidos entre ambos.
- ✓ La longitud del intervalo es la distancia(a,b)=**|b-a|**

En los **intervalos acotados** dependiendo de que los extremos pertenezcan o no al mismo, se distinguen los intervalos cerrados, abiertos y semiabiertos (por la izquierda o por la derecha).

Si se construye un intervalo abierto alrededor de un punto a se obtiene un **entorno simétrico de a y de radio r,** conjunto de números reales cuya distancia a “a” es menor que r.

Un **intervalo no acotado** es el conjunto formado por todos los números mayores (o ≥), o menores (o ≤) que uno dado, a, la cota inferior o superior respectivamente. Se representan mediante una semirrecta y su longitud es infinita.

EJERCICIOS resueltos

1. Ordenar de menor a mayor:

   a) $5{,}97509 \cdot 10^{8}$ b) $6{,}10314 \cdot 10^{-6}$ c) $\frac{-8243924}{5560}$ d) $\frac{5952091}{4605}$ e) $\sqrt{30694}$ f) $-\sqrt{6320}$

   c < f < b < e < d < a

2. El radio de una circunferencia es de 4 m. Calcula su longitud

   2.1. Truncando el resultado primero a cm y luego a m.

   L = 2·π·r =24,88141381...m = 2488 cm = 24 m

   2.2. Redondeando el resultado primero a cm y luego a m

   L = 2·π·r =24,88141381...m = 2488 cm = 25 m

3. Calcula el valor absoluto de los números a=-3 y b=5, y la distancia entre ellos.

   |a|=3, |b|=5, dist(a,b)=|b-a|=|5-(-3)|=|8|=8

4. Calcula |a+b| |a-b| |a·b| y |a/b|

   |a+b|=|-3+5|=|2|=2; |a-b|=|-3-5|=|-8|=8; |a·b|=|-3·5|=|-15|=15;
   |a/b|=|-3/5|=3/5

5. Indica qué puntos pertenecen al intervalo en cada caso:

   5.1. Intervalo (-74,-52]. Puntos: a) –53 b) –74 c) 11 ***Respuesta: ninguno***

   5.2. Intervalo (-∞,75]. Puntos: a) 32 b) 75 c) 76 ***Respuesta: a y b.***

Para practicar

1. Dados los números:

   A=2,7   B=3,292929... C=0,01030303...

   Calcula los valores exactos de A+B,C-A y A·C. (Debes calcular las fracciones generatrices de A, B y C y restar).

2. Considerando 7,4833147735.... como el valor exacto de $\sqrt{56}$, escribe las aproximaciones por defecto, por exceso y redondeos de orden primero y segundo (décimas y centésimas, respectivamente).

3. La cinta métrica que aparece abajo tiene unas divisiones hasta el medio cm. La utilizamos para medir una varilla y obtenemos el valor que se muestra en ella. ¿Entre qué valores exactos se encuentra la longitud real, suponiendo que ese valor es: a)por defecto; b) por exceso; c) redondeo a cm.

Las aproximaciones pueden utilizarse también con números enteros. Para generalizar esta idea usaremos el concepto de cifras significativas: "*Si un número N es un valor aproximado de otro número P, diremos que N tiene n cifras significativas si las primeras n cifras de N coinciden con las n primeras cifras de P. (No se consideran cifras significativas los ceros cuya única finalidad es situar la coma decimal)*". La definición anterior es bastante intuitiva pero no siempre es correcta del todo., por ello precisamos un poco más: "*Diremos que N tiene n cifras significativas si el número formado con las n primeras cifras de N difiere del número formado con las n primeras cifras de P (eliminando las comas decimales si las hubiera) en menos de 0,5*".

4. Nos dicen que la población de una ciudad es de 1579000 habitantes y que las 4 primeras cifras de esta cantidad son significativas. ¿Entre qué valores se halla realmente su población?

5. Los valores X=6,235 e Y=92,88 son sendas aproximaciones por defecto de dos números reales desconocidos A y B. Averigua entre qué valores exactos se hallan A+B y A·B y con qué precisión pueden darse los resultados.

6. Debido a unas obras se quiere rodear la fuente de la imagen con una tela metálica protectora. Utilizando un flexómetro graduado en mm, se obtiene la longitud del diámetro que se indica. Calcula la longitud de la tela metálica usando el número pi con la cantidad de decimales adecuada.

7. La distancia media de Júpiter al Sol es de $7,7833 \cdot 10^8$ km. Todas las cifras son significativas y suponemos que la órbita del planeta alrededor del Sol es circular. Calcula: a) La cota de error en km; b)El área del círculo que describe el planeta.

Dados dos subconjuntos, A y B, de un cierto conjunto de referencia, E, su intersección, A ∩ B, es el conjunto de elementos comunes a ambos; su unión, AUB, es el conjuntos formado por todos los elementos de A y todos los de B; su diferencia, A-B, es el conjunto formado por todos los elementos de A que no pertenecen a B. El complementario de A, -A, es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto de referencia que no pertenecen a A.

8. Determina los conjuntos A∩B, AUB, A-B y -A en los casos siguientes:
   1. A = [-11,-9] B = (-1,6)
   2. A = [-5,5] B = (3,4)
   3. A = [-2,7] B = (-2,6)

Para saber más

Cuestiones sobre pi

En la presentación del tema se mencionaba que el valor de pi era 3'14, 3'1416, ... y se planteaban una serie de preguntas al respecto:

¿Cuál de las cantidades anteriores es el auténtico número pi?

Según has visto a lo largo del tema, en realidad ninguna de las anteriores cantidades son el valor exacto de pi, se trata de aproximaciones al número y el poner más o menos decimales depende de la precisión que necesitemos en la medida.

¿Cómo es posible que llamemos pi a todas ellas si es obvio que son diferentes?

El hecho de que llamemos pi a cualquiera de las anteriores cantidades se debe a que es imposible utilizar el valor exacto de la mayoría de los números irracionales, por lo que nos tenemos que contentar con dar aproximaciones a ese valor. Como ya dijimos antes el número de cifras decimales con que se da este número dependerá de la precisión de medida deseada y el hecho de que, por ejemplo, la cuarta cifra decimal sea un 6 en 3'1416 y un 5 en 3'14159 se debe a que la aproximación se hace en cada caso por redondeo y, con cuatro cifras decimales, 3'1416 está más próximo del valor exacto que 3'1415.

Algunos números irracionales como la raíz cuadrada de 2 sí pueden representarse en forma exacta, pero si esa cantidad la queremos medir en la práctica, no nos quedará más remedio que dar un valor aproximado con la precisión que deseemos.

¿Cómo es posible que se estén descubriendo todavía cifras de pi si lo estamos usando desde hace un montón de años?

Los números irracionales tienen infinitas cifras decimales que no se repiten de forma periódica. Para hallar estas cifras existen distintos procedimientos o algoritmos. Algunos de estos algoritmos son relativamente sencillos, como el que se utiliza para obtener las cifras decimales de la raíz cuadrada de 2 (que antiguamente se enseñaba en la escuela primaria); otros, en cambio, son tremendamente largos y complejos. El número pi está en este segundo grupo. Actualmente los algoritmos para el cálculo de cifras decimales de pi se ejecutan con potentes ordenadores.

¿Cuál es o cuál podría ser la última cifra del número pi?

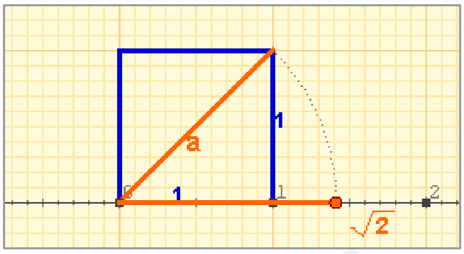
Como hemos dicho antes, los números irracionales tienen infinitas cifras decimales, por lo tanto no existe la última cifra del número pi. Como además sus cifras no se repiten de forma periódica no se puede predecir de antemano qué cifra será la que ocupe un determinado lugar hasta que se consiga calcular.

Recuerda lo más importante

Los números reales

El conjunto de números reales está formado por los números **racionales** y los números **irracionales.**

- Un **número racional** es una fracción y todas sus equivalentes. Todo nº racional se puede expresar como un **decimal periódico** y viceversa.
- Un número **irracional** es un número decimal ilimitado **no periódico**.



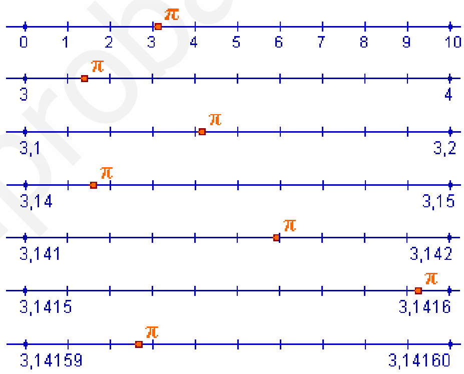
Todos los números reales, tanto los racionales como los irracionales, se pueden representar mediante un punto de la recta y recíprocamente, a cada punto de la recta le corresponde un número real.

Aproximaciones de un número real

En la práctica es necesario usar aproximaciones, cuando trabajamos con números con infinitas cifras decimales. Usamos aproximaciones **por defecto** y **por exceso**, **truncamientos** y **redondeos**.

Todos los números reales pueden expresarse como dos secuencias de números decimales que son aproximaciones por defecto y por exceso

- El **error absoluto** es la diferencia positiva entre el valor exacto y el valor aproximado.
- El **error relativo** es el cociente entre el valor aproximado y el valor exacto, suele expresarse en %.
- La **cota de error** de una aproximación es el error absoluto máximo posible.



Notación científica

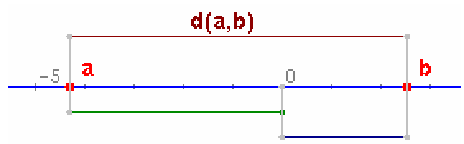
Los números muy grandes o muy pequeños se expresan en notación científica: $\mathbf{x \cdot 10^n}$

Para operar con números en notación científica aplicamos las propiedades de las potencias.

La recta real

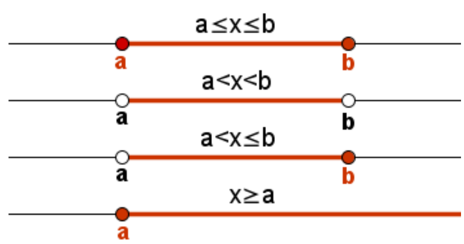
El **valor absoluto** de un nº a, **|a|** es el nº prescindiendo del signo.

La **distancia** entre dos puntos **a** y **b** es el valor absoluto de su diferencia **|a-b|=|b-a|**



Intervalos: segmentos y semirrectas

- Intervalo cerrado **[a,b]**
- Intervalo abierto **(a,b)**
- Intervalo semiabierto **(a,b]** ó **[a,b)**
- Intervalo no acotado como **[a,+∞)** ó **(-∞,a)**



Autoevaluación

1. Escribe la fracción generatriz del número: 4,2323.

2. Una milla inglesa son 1609,34 m. Redondea a km 27 millas.

3. Expresa en notación científica con 3 cifras significativas, la distancia en metros a una situada a 27 años-luz.

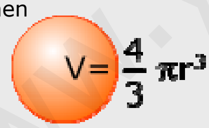
4. Calcula el error absoluto y el relativo que se comete al aproximar 22/7 por 3,14.

5. Con la calculadora, escribe un truncamiento y un redondeo a las milésimas de $\sqrt{21}$

6. El número 0,330 es una aproximación de x con una cota de error de $0,5\cdot10^{-3}$. ¿Entre qué valores está el nº exacto x?

7. Considerando el nº de Avogadro, calcula con tres cifras significativas, el número de moléculas de un gas que, en condiciones normales, caben en una pelota de 7 cm de radio.

El nº de Avogadro
En condiciones normales 22,4 litros de gas contienen **$6{,}023\cdot10^{23}$** moléculas.



8. Escribe el intervalo $[-3, 5] \cap (3, 8)$.

9. Escribe el intervalo formado por los números reales x que cumplen $|x-8|\leq3$.

10. Halla dos números que disten 6 unidades de 3, y otros dos que disten 3,5 unidades de -2, calcula después la diferencia entre el mayor y el menor de todos estos números.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. A+B=5,9929292...

   C-A=-2,68969696....

   A·C=0,027818181....

2. a) De primer orden:

   Por defecto: 7,4

   Por exceso: 7,5

   Redondeo: 7,5

   b) De segundo orden:

   Por defecto: 7,48

   Por exceso: 7,49

   Redondeo: 7,48

3. a) Entre 1,100 y 1,105 m

   b) Entre 1,095 y 1,100 m

   c) Entre 1,095 y 1,105 m

4. Entre 1578500 y 1579500 con una cota de error de 500 habitantes.

5. A+B = 99,1 $\pm$ 0,1

   A·B = 579 $\pm$ 1

6. 5,67 $\pm$ 0,01 m

7. Cota de error: $0{,}0001\cdot10^8$ = 10000 km

   Área = $1{,}90 \cdot 10^{18}$ km^2

8. Caso 1

   1) $A \cap B$ = vacío
   2) $A \cup B = [-11,-9] \cup (-1,6)$
   3) $A - B = A = [-11,-9]$
   4) $-A = (-\infty,-11) \cup (-9,+\infty)$

   Caso 2

   1) $A \cap B = (3,4)$
   2) $A \cup B = [-5,5]$
   3) $A - B = [-5,3] \cup [4,5]$
   4) $-A = (-\infty,-5) \cup (5,+\infty)$

   Caso 3

   1) $A \cap B = [-2,6)$
   2) $A \cup B = [-2,7]$
   3) $A - B = [6,7]$
   4) $-A = (-\infty,-2) \cup (7,+\infty)$

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 419/99
2. 43 km
3. $2{,}55\cdot10^{17}$
4. Error absoluto: 0,00285714...
   Error relativo: 0,0009 $\approx$ 0,1%
5. red.: 4,583 trun.: 4,582
6. entre 0,3295 y 0,3305
7. $3{,}86\cdot10^{22}$
8. (3, 5]
9. [5, 11]
10. -3 y 9; -5,5 y 1,5
    9 – (-5,5) =14,5

No olvides enviar las actividades al tutor ►

cidead
Centro para la Innovación y Desarrollo
de la Educación a Distancia

ACTIVIDADES DE ESO

Nombre y apellidos del alumno:		Curso: **4º**
Quincena nº: **1**	**Asignatura:** **Matemáticas B**	
Fecha:	**Profesor de la asignatura:**	

1. Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales:

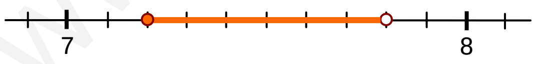
$$-\frac{5}{2},\quad \sqrt{8},\quad \sqrt[3]{8},\quad 0{,}3\widehat{4},\quad \frac{\pi}{2}$$

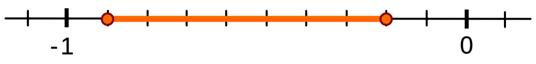
2. Indica el error absoluto y el relativo cometidos al aproximar 1/3 por 0,3.

3. Efectúa con la calculadora dando el resultado en notación científica con tres cifras significativas:

$$\frac{2{,}427\cdot 10^{10}+4{,}53\cdot 10^{9}}{4{,}32\cdot 10^{-2}-3{,}7\cdot 10^{-3}}$$

4. Escribe los siguientes intervalos:





cidead@mec.es

http://cidead.cnice.mec.es

C/ TORRELAGUNA, 58
28027 MADRID
TEL: 91 3778300
FAX: 91 3778314

2 Potencias y radicales

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Calcular y operar con potencias de exponente entero.
- Reconocer las partes de un radical y su significado.
- Obtener radicales equivalentes a uno dado.
- Expresar un radical como potencia de exponente fraccionario y viceversa.
- Operar con radicales.
- Racionalizar expresiones con radicales en el denominador.
- Utilizar la calculadora para operar con potencias y radicales.

Antes de empezar

Conviene que recuerdes las propiedades de las potencias que has estudiado en cursos anteriores

Propiedades de las potencias de exponente entero

- El producto de potencias de la misma base es otra potencia de la misma base y de exponente la suma de los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$x^2 \cdot x^7 = x^{2+7} = x^9$$

- El cociente de potencias de la misma base es otra potencia de la misma base y de exponente la resta de los exponentes.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\frac{2^8}{2^5} = 2^{8-5} = 2^3$$

- La potencia de otra potencia es una potencia de la misma base y de exponente el producto de los exponentes.

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$$

$$\left(x^7\right)^3 = x^{7 \cdot 3} = x^{21}$$

- Una potencia de exponente cero es igual a ls unidad.

$$a^0 = 1$$

$$7^0 = 1$$

- El producto de potencias del mismo exponente es otra potencia del mismo exponente y de base el producto de las bases.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5 = 6^5$$

- El cociente de potencias del mismo exponente es otra potencia del mismo exponente y de base el cociente de las bases.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\frac{8^6}{4^6} = \left(\frac{8}{4}\right)^6 = 2^6$$

1. Radicales

Definición

Llamamos **raíz n-ésima** de un número dado a al número b que elevado a n nos da a.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Un **radical** es equivalente a una **potencia de exponente fraccionario** en la que el **denominador** de la fracción es el **índice** del radical y el **numerador** de la fracción es el **exponente** el radicando.

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ por ser } 2^3 = 8$$

$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$$

Radicales equivalentes

Dos o más radicales se dicen **equivalentes** si las fracciones de los exponentes de las potencias asociadas son equivalentes.

Dado un radical se pueden obtener infinitos radicales semejantes, **multiplicando** o **dividiendo** el exponente del radicando y el índice de la raíz por un mismo número. Si se multiplica se llama **amplificar** y si se divide se llama **simplificar** el radical.

Radical **irreducible**, cuando la fracción de la potencia asociada es irreducible.

$$\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[6]{x^4}$$

son equivalentes por ser: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

Amplificar: $\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3\cdot2]{x^{2\cdot2}} = \sqrt[6]{x^4}$

Simplificar: $\sqrt[6]{x^4} = \sqrt[6:2]{x^{4:2}} = \sqrt[3]{x^2}$

$$\sqrt[3]{x^2}$$

Irreducible por ser m.c.d.(3,2)=1

Introducción y Extracción de factores

Para **introducir** un factor dentro de un radical se eleva el factor a la potencia que indica el índice y se escribe dentro.

Si algún factor del radicando tiene por exponente un número mayor que el índice, se puede **extraer** fuera del radical dividiendo el exponente del radicando entre el índice. El cociente es el exponente del factor que sale fuera y el resto es el exponente del factor que queda dentro.

Introducir

$$x\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^3\cdot x} = \sqrt[3]{x^4}$$

$$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3\cdot3} = \sqrt[3]{8\cdot3} = \sqrt[3]{24}$$

Extraer:

$$\sqrt[5]{x^{13}} = x^2\sqrt[5]{x^3} \qquad \begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \hline 3 & 2 \end{array}$$

1728	2
864	2
432	2
216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$$\sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3} =$$
$$= 2^2 \cdot 3 = 12$$

Cálculo de raíces

Para calcular la raíz n-ésima de un número primero se factoriza y se escribe el número como producto de potencias, luego se extraen todos los factores.

Si todos los exponentes del radicando son múltiplos del índice, la raíz es exacta.

Reducir a índice común

$\sqrt[6]{2}$; $\sqrt[10]{3}$

m.c.m(6,10)=30

$\sqrt[6]{2} = \sqrt[30]{2^5} = \sqrt[30]{32}$

$\sqrt[10]{3} = \sqrt[30]{3^3} = \sqrt[30]{27}$

Reducción a índice común

Reducir a **índice común** dos o más radicales es encontrar radicales equivalentes a los dados que tengan el mismo índice.

El índice común es cualquier múltiplo del m.c.m. de los índices.

El mínimo índice común es el m.c.m. de los índices.

Los siguientes radicales son semejantes:

$2\sqrt[3]{4}$; $7\sqrt[3]{4}$; $5\sqrt[3]{4}$

Los siguientes radicales no son semejantes:

$2\sqrt[3]{4}$; $2\sqrt[5]{4}$ El índice es distinto

Radicales semejantes

Radicales semejantes son aquellos que tienen el mismo índice y el mismo radicando. Pueden diferir únicamente en el coeficiente que los multiplica.

EJERCICIOS resueltos

1. Escribe los siguientes radicales como potencia de exponente fraccionario:

a) $\sqrt[5]{3}$ $\qquad$ $\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$

b) $\sqrt[5]{x^3}$ $\qquad$ $\sqrt[5]{x^3}$

2. Escribe las siguientes potencias como radicales:

a) $7^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

b) $5^{\frac{2}{3}}$ $\qquad$ $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

3. Escribe un radical equivalente, amplificando el dado:

a) $\sqrt[3]{5}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3\cdot 2]{5^{1\cdot 2}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$

b) $\sqrt[5]{x^4}$ $\qquad$ $\sqrt[5]{x^4} = \sqrt[5\cdot 3]{x^{4\cdot 3}} = \sqrt[15]{x^{12}}$

4. Escribe un radical equivalente, simplificando el dado.

a) $\sqrt[6]{49}$ $\qquad$ $\sqrt[6]{49} = \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[6:2]{7^{2:2}} = \sqrt[3]{7}$

b) $\sqrt[35]{x^{28}}$ $\qquad$ $\sqrt[35]{x^{28}} = \sqrt[35:7]{x^{28:7}} = \sqrt[5]{x^4}$

5. Introduce los factores dentro del radical:

a) $2\cdot\sqrt[4]{3}$ $\qquad$ $2\cdot\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4\cdot 3} = \sqrt[4]{16\cdot 3} = \sqrt[4]{48}$

b) $x^2\sqrt[7]{x^3}$ $\qquad$ $x^2\sqrt[7]{x^3} = \sqrt[7]{(x^2)^7\cdot x^3} = \sqrt[7]{x^{14}\cdot x^3} = \sqrt[7]{x^{17}}$

6. Extrae los factores del radical:

a) $\sqrt[4]{128}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{128} = \sqrt[4]{2^7} = 2\sqrt[4]{2^3} = 2\sqrt[4]{8}$

b) $\sqrt[7]{x^{30}}$ $\qquad$ $\sqrt[7]{x^{30}} = \sqrt[7]{x^{28+2}} = \sqrt[7]{x^{28}\cdot x^2} = x^4\sqrt[7]{x^2}$

7. Calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt[5]{1024}$ $\qquad$ $\sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2 = 4$

b) $\sqrt[7]{x^{84}}$ $\qquad$ $\sqrt[7]{x^{84}} = \sqrt[7]{x^{12\cdot 7}} = \sqrt[7]{(x^{12})^7} = x^7$

8. Reduce a índice común

a) $\sqrt{3}; \sqrt[3]{5}$ $\qquad$ $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$; $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$

b) $\sqrt[4]{x^3}; \sqrt[6]{x^5}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{x^9}$; $\sqrt[6]{x^5} = \sqrt[12]{x^{10}}$

9. Indica que radicales son semejantes

a) $\sqrt[4]{3}; 5\sqrt[4]{3}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{3}$ y $5\sqrt[4]{3}$ Son semajentes

b) $\sqrt[4]{x}; \sqrt[3]{x}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{x}$ y $\sqrt[3]{x}$ No son semajentes,tienen distinto indice

2. Propiedades

$\sqrt[3]{2\cdot 5} = \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}$

$\sqrt[7]{a^2\cdot b^4} = \sqrt[7]{a^2}\cdot\sqrt[7]{b^4}$

Raíz de un producto

La raíz n-ésima de un producto es igual al producto de las raíces n-ésimas de los factores.

$$\boxed{\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}}$$

Demostración: $\sqrt[n]{a\cdot b} = (a\cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

$\sqrt[5]{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3}}$

$\sqrt[5]{\frac{a^4}{b^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{b^3}}$

Raíz de un cociente

La raíz n-ésima de un cociente es igual al cociente de las raíces n-ésimas del dividendo y del divisor.

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Demostración: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{2^3} = \left(\sqrt[5]{2}\right)^3$

$\sqrt[3]{x^7} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^7$

Raíz de una potencia

Para hallar la raíz de una potencia, se calcula la raíz de la base y luego se eleva el resultado a la potencia dada.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p}$$

Demostración: $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$

$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[15]{2}$

Raíz de una raíz

La **raíz n-ésima** de la **raíz m-ésima** de un número es igual a la raíz **nm-ésima** de dicho número.

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}}$$

Demostración: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n\cdot m}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$

3. Simplificación

Racionalización

Racionalizar una expresión con un radical en el denominador, consiste en encontrar una expresión equivalente que no tenga raíces en el denominador.

Para ello se multiplica numerador y denominador por la expresión adecuada para que, al operar, la raíz desaparezca.

Cuando el denominador es un radical

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{1\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{25}}{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt[7]{x^4}} = \frac{1\cdot\sqrt[7]{x^3}}{\sqrt[7]{x^4}\cdot\sqrt[7]{x^3}} = \frac{\sqrt[7]{x^3}}{\sqrt[7]{x^7}} = \frac{\sqrt[7]{x^3}}{x}$$

Si el denominador es un binomio se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado* del denominador.

Cuando el denominador es un binomio

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

* **El conjugado de** $\boxed{a+b}$ **es** $\boxed{a-b}$

Simplificar un radical

Simplificar un radical es escribirlo en la forma más sencilla, de forma que:

- El índice y el exponente sean primos entre sí.
- No se pueda extraer ningún factor del radicando.
- El radicando no tenga ninguna fracción.

$$\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[7]{a^{30}} = a^4\sqrt[7]{a^2}$$

EJERCICIOS resueltos

10. Escribe con una sóla raíz:

a) $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$ $\qquad \sqrt[5]{\sqrt{3}} = \sqrt[10]{3}$

b) $\sqrt[7]{x^4\sqrt{x}}$ $\qquad \sqrt[7]{x^4\sqrt{x}} = \sqrt[7]{\sqrt{x^8\cdot x}} = \sqrt[14]{x^9}$

11. Escribe con una sóla raíz:

a) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}$ $\qquad \sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

b) $\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^2}$ $\qquad \sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^2} = \sqrt[5]{x^3}$

12. Escribe con una sóla raíz:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^3}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^3}} = \sqrt[5]{\dfrac{x^4}{x^3}} = \sqrt[5]{x}$

13. Racionaliza.

a) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{9}}$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt[5]{9}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{3^2}} = \dfrac{1\cdot\sqrt[5]{3^2}}{\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{3^2}}{\sqrt[5]{3^5}} = \dfrac{\sqrt[5]{9}}{3}$

b) $\dfrac{2}{5\cdot\sqrt[3]{4}}$ $\qquad \dfrac{2}{5\cdot\sqrt[3]{4}} = \dfrac{2}{5\cdot\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{2\cdot\sqrt[3]{2}}{5\cdot\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[3]{2}} = \dfrac{2\cdot\sqrt[3]{2}}{5\cdot\sqrt[3]{2^3}} = \dfrac{2\cdot\sqrt[3]{2}}{5\cdot 2} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{5}$

14. Racionaliza:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[7]{x^4}}$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt[7]{x^4}} = \dfrac{1\cdot\sqrt[7]{x^3}}{\sqrt[7]{x^4}\cdot\sqrt[7]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[7]{x^3}}{\sqrt[7]{x^7}} = \dfrac{\sqrt[7]{x^3}}{x}$

b) $\dfrac{1}{x^2\sqrt[7]{x^3}}$ $\qquad \dfrac{1}{x^2\sqrt[7]{x^3}} = \dfrac{1\cdot\sqrt[7]{x^4}}{x^2\sqrt[7]{x^3}\cdot\sqrt[7]{x^4}} = \dfrac{\sqrt[7]{x^4}}{x^2\sqrt[7]{x^7}} = \dfrac{\sqrt[7]{x^4}}{x^2\cdot x} = \dfrac{\sqrt[7]{x^4}}{x^3}$

15. Racionaliza:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{1\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{3-2} = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+2}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+2} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)}{\left(\sqrt{5}+2\right)\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)} = \dfrac{\sqrt{10}-2\sqrt{2}}{5-4} = \sqrt{10}-2\sqrt{2}$

c) $\dfrac{1}{3-\sqrt{x}}$ $\qquad \dfrac{1}{3-\sqrt{x}} = \dfrac{1\cdot\left(3+\sqrt{x}\right)}{\left(3-\sqrt{x}\right)\cdot\left(3+\sqrt{x}\right)} = \dfrac{3+\sqrt{x}}{9-x}$

4. Operaciones con radicales

Suma y Resta de Radicales

Para sumar o restar radicales se necesita que sean semejantes (que tengan el mismo índice y el mismo radicando), cuando esto ocurre se suman ó restan los coeficientes de fuera y se deja el radical.

$$\sqrt{8}+\sqrt{2}=\sqrt{2^3}+\sqrt{2}=$$
$$=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x}+\sqrt[6]{x^3}=\sqrt{x}+\sqrt{x}=2\sqrt{x}$$

Producto de Radicales

Para multiplicar radicales se necesita que tengan el mismo índice, cuando esto ocurre el resultado es un radical del mismo índice y de radicando el producto de los radicandos.

Si tienen distinto índice, primero se reduce a índice común.

$$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt[6]{3^2}\cdot\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{9\cdot 8}=\sqrt[6]{72}$$

$$\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt{x}=\sqrt[10]{x^2}\cdot\sqrt[10]{x^5}=\sqrt[10]{x^7}$$

Cociente de Radicales

Para dividir radicales se necesita que tengan el mismo índice, cuando esto ocurre el resultado es un radical del mismo índice y de radicando el cociente de los radicandos.

Si tienen distinto índice, primero se reduce a índice común.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2^2}}=\sqrt[6]{2}$$

$$\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[8]{x}}=\frac{\sqrt[8]{x^2}}{\sqrt[8]{x}}=\sqrt[8]{x}$$

EJERCICIOS resueltos

16. Calcular la suma:

a) $\sqrt{40}+\sqrt{90}$ $\qquad$ $\sqrt{40}+\sqrt{90}=\sqrt{4\cdot 10}+\sqrt{9\cdot 10}=2\sqrt{10}+3\sqrt{10}=5\sqrt{10}$

b) $2\sqrt{32}-\sqrt{8}$ $\qquad$ $2\sqrt{32}-\sqrt{8}=2\sqrt{2^5}-\sqrt{2^3}=2\cdot 2^2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=8\sqrt{2}-2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[6]{16}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{4}+\sqrt[6]{16}=\sqrt[3]{4}+\sqrt[6]{4^2}=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}=2\sqrt[3]{4}$

d) $2\sqrt{\dfrac{1}{2}}+5\sqrt{8}$ $\qquad$ $2\sqrt{\dfrac{1}{2}}+5\sqrt{8}=\sqrt{\dfrac{4\cdot 1}{2}}+5\sqrt{2^3}=\sqrt{2}+10\sqrt{2}=12\sqrt{2}$

17. Calcular y simplificar:

a) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[5]{27}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

b) $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[9]{x^2}$ $\qquad$ $\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^2}=\sqrt[5]{x^3}$

c) $\sqrt[5]{x^3\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}$ $\qquad$ $\sqrt[5]{x^3\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}=\sqrt[5]{\sqrt{x\cdot x^3}}\cdot\sqrt{x}=\sqrt[10]{x^4}\cdot\sqrt{x}=\sqrt[10]{x^4}\cdot\sqrt[10]{x^5}=\sqrt[10]{x^9}$

d) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[12]{2^4}\cdot\sqrt[12]{2^6}\cdot\sqrt[12]{2^9}=\sqrt[12]{2^{19}}=2\sqrt[12]{2^7}$

18. Calcular y simplificar:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[5]{2}}$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[5]{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{2^4}}{\sqrt[5]{2}}=\dfrac{\sqrt[15]{2^{20}}}{\sqrt[15]{2^3}}=\sqrt[15]{2^{17}}=2\sqrt[15]{2^2}=2\sqrt[15]{4}$

b) $\dfrac{\sqrt[7]{x^4}}{\sqrt[14]{x^3}}$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt[7]{x^4}}{\sqrt[14]{x^3}}=\dfrac{\sqrt[14]{x^8}}{\sqrt[14]{x^3}}=\sqrt[14]{x^5}$

a) $\dfrac{\sqrt[6]{8^4}}{\sqrt[8]{4^3}}$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt[6]{8^4}}{\sqrt[8]{4^3}}=\dfrac{\sqrt[6]{\left(2^3\right)^4}}{\sqrt[8]{\left(2^2\right)^3}}=\dfrac{\sqrt[6]{2^{12}}}{\sqrt[8]{2^6}}=\dfrac{\sqrt[24]{\left(2^{12}\right)^4}}{\sqrt[24]{\left(2^6\right)^3}}=\dfrac{\sqrt[24]{2^{48}}}{\sqrt[24]{2^{18}}}=\sqrt[24]{2^{30}}=\sqrt[4]{2^5}=2\sqrt[4]{2}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{x^4\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}}$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt[3]{x^4\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}}=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{x\cdot x^8}}}{\sqrt[4]{x}}=\dfrac{\sqrt[6]{x^9}}{\sqrt[4]{x}}=\dfrac{\sqrt[12]{x^{18}}}{\sqrt[12]{x^3}}=\sqrt[12]{x^{15}}=x\sqrt[12]{x^3}$

19. Calcular y simplificar

a) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}}$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[4]{2^3}}=\dfrac{\sqrt[12]{2^6}\cdot\sqrt[12]{2^8}}{\sqrt[12]{2^9}}=\dfrac{\sqrt[12]{2^{24}}}{\sqrt[12]{2^9}}=\sqrt[12]{2^{15}}=\sqrt[4]{2^5}=2\sqrt[4]{2}$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt{8}}$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt[5]{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt[5]{\sqrt{2\cdot 2^2}}\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt{2^3}}=\dfrac{\sqrt[10]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt{2^3}}=\dfrac{\sqrt[30]{2^9}\cdot\sqrt[30]{2^{20}}}{\sqrt[30]{2^{45}}}=\dfrac{\sqrt[30]{2^{29}}}{\sqrt[30]{2^{45}}}=$

$$=\frac{1}{\sqrt[30]{2^{16}}}=\frac{\sqrt[30]{2^{14}}}{\sqrt[30]{2^{16}}\cdot\sqrt[30]{2^{14}}}=\frac{\sqrt[30]{2^{14}}}{\sqrt[30]{2^{30}}}=\frac{\sqrt[30]{2^{14}}}{2}=\frac{\sqrt[15]{2^7}}{2}$$

Para practicar

1. Escribe como potencia de exponente fraccionario:

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt{a^3}$ d) $\sqrt[5]{a^3}$

2. Escribe como un radical:

a) $3^{\frac{1}{2}}$ b) $5^{\frac{3}{2}}$

c) $x^{\frac{1}{5}}$ d) $x^{\frac{5}{3}}$

3. Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[4]{25}$ b) $\sqrt[8]{8^2}$

c) $\sqrt[14]{x^6}$ d) $\sqrt[30]{16\cdot x^8}$

4. Extraer todos los factores posibles de los siguientes radicales

a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{9a^3}$ d) $\sqrt{98a^3b^5c^7}$

5. Introducir dentro del radical todos los factores posibles que se encuentren fuera de él.

a) $3\cdot\sqrt{5}$ b) $2\cdot\sqrt{a}$

c) $3a\cdot\sqrt{2a^2}$ d) $ab^2\sqrt[3]{a^2b}$

6. Reduce al mínimo común índice los siguientes radicales.

a) $\sqrt{5};\sqrt[4]{3}$ b) $\sqrt[3]{4};\sqrt[4]{3};\sqrt{2}$

c) $\sqrt[4]{3};\sqrt[8]{7};\sqrt{2}$ d) $\sqrt{3};\sqrt[6]{32};\sqrt[3]{5}$

7. Suma los siguientes radicales indicados.

a) $\sqrt{45}-\sqrt{125}-\sqrt{20}$

b) $\sqrt{75}-\sqrt{147}+\sqrt{675}-\sqrt{12}$

c) $\sqrt{175}+\sqrt{63}-2\sqrt{28}$

d) $\sqrt{20}+\frac{1}{3}\sqrt{45}+2\sqrt{125}$

8. Multiplica los siguientes radicales

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$ b) $5\cdot\sqrt{2}\cdot 3\cdot\sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{9}$ d) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{2x^2}$

e) $\sqrt{2ab}\cdot\sqrt[4]{8a^3}$ f) $\sqrt[4]{2x^2y^3}\cdot\sqrt[6]{5x^2}$

9. Multiplica los siguientes radicales

a) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{2}$

b) $(7\sqrt{5}+5\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3}$

c) $(2\sqrt{3}+\sqrt{5}-5\sqrt{2})\cdot 4\sqrt{2}$

d) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

10. Divide los siguientes radicales

a) $\dfrac{\sqrt{6x}}{\sqrt{3x}}$ b) $\dfrac{\sqrt{75x^2y^3}}{5\sqrt{3xy}}$

c) $\dfrac{\sqrt{9x}}{\sqrt[3]{3x}}$ d) $\dfrac{\sqrt[3]{8a^3b}}{\sqrt[4]{4a^2}}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[9]{3}}$ f) $\dfrac{\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[8]{x^3}}$

11. Calcula:

a) $\sqrt[5]{2\sqrt[4]{2}}$ b) $\sqrt[5]{x^2\sqrt[4]{x^3}}$

c) $\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}$ d) $\sqrt[6]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$

12. Racionaliza.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{2a}{\sqrt{2ax}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$

13. Racionaliza.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ b) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$

c) $\dfrac{5}{4-\sqrt{11}}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

Para saber más

$$\sqrt{n} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\dots}}}}$$

Aproximación de una raíz cuadrada mediante fracciones

Cualquier número irracional se puede aproximar mediante una fracción, que se obtiene a partir de su desarrollo en fracción continua.

Mediante las fracciones continuas se puede aproximar cualquier raíz a una fracción.

Desarrollo de: $\boxed{\sqrt{2} = 1'4142}$

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1'5$$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5} = 1'4$$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{17}{12} = 1'4166$$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{41}{29} = 1'4167$$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}} = \frac{99}{70} = 1'4142$$

Otros desarrollos

$$\sqrt{3} = \left[1, \overline{12}\right] \qquad \sqrt{7} = \left[2, \overline{1114}\right]$$

$$\sqrt{5} = \left[2, \overline{4}\right] \qquad \sqrt{8} = \left[2, \overline{14}\right]$$

$$\sqrt{6} = \left[2, \overline{24}\right] \qquad \sqrt{10} = \left[3, \overline{6}\right]$$

Algoritmo

La primera cifra $\mathbf{a_1}$ es la parte entera de la raíz

$$x_1 = \sqrt{2}$$

$$a_1 = [x_1] = \left[\sqrt{2}\right] = 1$$

La segunda cifra $\mathbf{a_2}$ es la parte entera de x_2

$$x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

$$a_2 = [x_2] = \left[\sqrt{2} + 1\right] = 2$$

La tercera cifra $\mathbf{a_3}$ es la parte entera de x_3

$$x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}$$

$$\sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{x_3} \Rightarrow \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{x_3} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

$$a_3 = [x_3] = \left[\sqrt{2} + 1\right] = 2$$

No es necesario hacer más cálculos por repetirse periódicamente los cocientes.

$$\sqrt{2} = \left[1, \overline{2}\right] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$$

Recuerda lo más importante

Radicales

Llamamos **raíz n-ésima** de un número dado al número que elevado a **n** nos da al primero.

La expresión es $\sqrt[n]{a}$ un **radical** de **índice n** y **radicando a**.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$$

Potencia de exponente fraccionario

Un radical es equivalente a una potencia de exponente **fraccionario** donde el numerador de la fracción es el exponente del radicando y el denominador es el índice de la raíz.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Propiedad fundamental

El valor de un radical no varía si se multiplican ó se dividen por el mismo número el índice y el exponente del radicando.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$$

Reducir a índice común

Reducir a índice común dos radicales dados es encontrar dos radicales equivalentes a los dados que tengan el mismo índice.

Radicales semejantes

Son aquellos que tienen el mismo índice y el mismo radicando, pudiendo diferir en el coeficiente que los multiplica.

Operaciones con radicales

Para **multiplicar(o dividir)** radicales del mismo índice se deja el índice y se multiplican(o dividen) los radicandos. Si tienen índice distinto, primero se reduce a índice común.

Para hallar la **raíz de un radical** se deja el radicando y se multiplican los índices.

Para **sumar (o restar)** radicales semejantes se suman (o restan) los coeficientes y se deja el radical

Racionalizar

Racionalizar una fracción con radicales en el denominador, es encontrar una fracción equivalente que no tenga raíces en el denominador.

Autoevaluación

1. Calcula la siguiente raíz: $\sqrt[7]{78125}$

2. Escribe en forma de exponente fraccionario: $\sqrt[10]{x^3}$

3. Calcular: $\sqrt{18} - \sqrt{98}$

4. Introduce el factor en el radical: $6\sqrt[4]{5}$

5. Calcula, simplifica y escribe con un solo radical: $\sqrt[7]{7\sqrt[3]{3}}$

6. Extrae los factores del radical: $\sqrt[4]{243}$

7. Racionaliza: $\dfrac{45}{\sqrt[3]{25}}$

8. Calcular y simplificar: $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[5]{4}$

9. Calcular y simplificar: $\dfrac{\sqrt[7]{125}}{\sqrt[3]{5}}$

10. Cuánto mide la arista de un cubo si su volumen es $1331 m^3$

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $x^{\frac{2}{3}}$
c) $a^{\frac{3}{2}}$ d) $a^{\frac{3}{5}}$

2. a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5^3}$
c) $\sqrt[5]{x}$ d) $\sqrt[3]{x^5}$

3. a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[4]{8}$
c) $\sqrt[7]{x^3}$ d) $\sqrt[15]{4x^2}$

4. a) $3\sqrt{2}$ b) $2\sqrt[3]{2}$
c) $3a\sqrt{a}$ d) $7ab^2c^3\sqrt[3]{2abc}$

5. a) $\sqrt{45}$ b) $\sqrt{4a}$
c) $\sqrt{18a^4}$ d) $\sqrt[3]{a^5b^7}$

6. a) $\sqrt[4]{25}; \sqrt[4]{3}$
b) $\sqrt[12]{256}; \sqrt[12]{27}; \sqrt[12]{4}$
c) $\sqrt[18]{9}; \sqrt[8]{7}; \sqrt[8]{216}$
d) $\sqrt[6]{27}; \sqrt[6]{32}; \sqrt[6]{25}$

7. a) $-4\sqrt{5}$ b) $11\sqrt{3}$
c) $4\sqrt{7}$ d) $15\sqrt{5}$

8. a) $\sqrt{18}$ b) $15\sqrt{10}$
c) $\sqrt[3]{108}$ d) $\sqrt[6]{4x^7}$
e) $\sqrt[4]{32a^5b}$ f) $\sqrt[12]{200x^{10}y^9}$

9. a) $2-\sqrt{6}$
b) $14\sqrt{5}+30$
c) $8\sqrt{6}+4\sqrt{10}-20$
d) 2

10. a) $\sqrt{2}$ b) $y\sqrt{x}$
c) $\sqrt[6]{81x}$ d) $\sqrt[6]{8a^3b^2}$
e) $\sqrt[6]{243}$ f) $\sqrt[24]{x^{11}}$

11. a) $\sqrt[4]{2}$ b) $\sqrt[20]{x^{11}}$
c) $\sqrt[24]{x^{23}}$ d) $\sqrt[3]{x^2}$

12. a) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
c) $\frac{\sqrt{2ax}}{x}$ d) $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{x}$

13. a) $\sqrt{3}+1$ b) $-7-3\sqrt{5}$
c) $4+\sqrt{11}$ d) $2-\sqrt{2}$

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 5
2. $x^{\frac{3}{10}}$
3. $-4\sqrt{2}$
4. $\sqrt[4]{6480}$
5. $\sqrt[21]{1029}$
6. $3\sqrt[4]{3}$
7. $9\sqrt[3]{5}$
8. $\sqrt[20]{8192}$
9. $\sqrt[21]{25}$
10. 11 cm

No olvides enviar las actividades al tutor ►

Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia

ACTIVIDADES DE ESO

Nombre y apellidos del alumno:		Curso: 4º
Quincena nº: 2	Asignatura: Matemáticas B	
Fecha:	Profesor de la asignatura:	

1. Escribe las potencias como radicales y los radicales como potencias:

a) $\sqrt{2^5} =$

b) $2^{\frac{3}{5}} =$

c) $\sqrt[5]{2} =$

d) $5^{\frac{1}{3}} =$

2. Calcula: $4\sqrt{2} - 9\sqrt{18} + 15\sqrt{50}$

3. Calcula expresando el resultado como una potencia de exponente fraccionario lo más simplificado posible:

$$\frac{\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{12}}{\sqrt{6}} =$$

4. Racionaliza y simplifica:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}} =$

b) $\dfrac{4}{\sqrt{5} - 1}$

cidead@mec.es

http://cidead.cnice.mec.es

C/ TORRELAGUNA, 58
28027 MADRID
TEL: 91 3778300
FAX: 91 3778314

3

Polinomios

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Hallar la expresión en coeficientes de un polinomio y operar con ellos.
- Calcular el valor numérico de un polinomio.
- Reconocer algunas identidades notables, el cuadrado y el cubo de un binomio.
- Aplicar la Regla de Ruffini y el Teorema del Resto.
- Hallar la descomposición factorial de algunos polinomios.

Antes de empezar

Utilidad de los polinomios

Los polinomios no solo están en la base de la informática, en economía los cálculos de intereses y duración de las hipotecas se realizan con expresiones polinómicas, así, el capital C a un porcentaje x en 3 años se convierte en $C\cdot(1+x)^3$ que es el cubo de un binomio.

La medicina y otras ramas de la ciencia avanzan ayudadas de esta herramienta algebraica. Investiga en la web las utilidades de los polinomios.

1. Polinomios

Grado y coeficientes

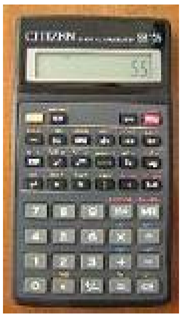
El polinomio $\mathbf{x^3+4x+2}$ está formado por la suma de tres monomios: x^3, $4x$ y 2; su grado, o máximo exponente de x, es 3 y **los coeficientes de este polinomio son 1 0 4 2**.

1 es el coeficiente de grado 3
0 es el coeficiente de grado 2
4 es el coeficiente de grado 1
2 es el coeficiente de grado 0

Se pretende que se identifique
x^3+4x+2
con su expresión en coeficientes
1 0 4 2

Valor numérico

Al sustituir la variable x de un polinomio por un número se obtiene el valor numérico del polinomio.
Así **el valor numérico en 3** del polinomio



$P(x)=2x^3-x+4$

es P(3) = $2\cdot3^3-3+4=55$

Puedes utilizar la calculadora para hallar el valor numérico de un polinomio. Recuerda que para realizar la potencia 7^4 se utiliza la tecla $\boxed{x^y}$,
7 $\boxed{x^y}$ 4 $\boxed{=}$ → 2041

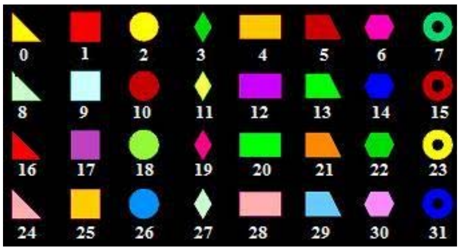
El valor numérico en 10 del polinomio de coeficientes 2 4 6 es 246 esta coincidencia del valor en 10 con los coeficientes se debe a que nuestro sistema es de base 10 y **246** es igual a $\mathbf{2}\cdot10^2+\mathbf{4}\cdot10+\mathbf{6}$.

Si el número **347** está expresado **en base 8**, su expresión en nuestro sistema usual, el decimal, es $\mathbf{3}\cdot8^2+\mathbf{4}\cdot8+\mathbf{7}=231$ que es el valor en 8 del polinomio de coeficientes **3 4 7**.

En el sistema binario las cifras empleadas son 0 y 1 aquí el valor decimal de **1**000**11**0 en binario es

$$\mathbf{1}\cdot2^6+\mathbf{1}\cdot2^2+\mathbf{1}\cdot2=70$$

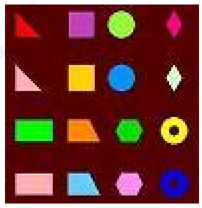
La cantidad de color se suele expresar en sistema hexadecimal o de base 16, este sistema tiene 16 cifras
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9, a=10, b=11, c=12, d=13, e=14, f=15 y en este sistema la cantidad **38** de color azul equivale a $\mathbf{3}\cdot16+\mathbf{8}=56$ en decimal.



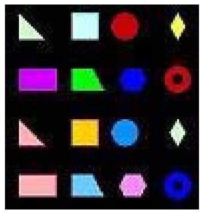
Pide a un compañero que memorice una de estas figuras pero que no diga cuál. Tu por telepatía la adivinarás.

Pregúntale si la figura escogida está en cada una de las siguientes tarjetas

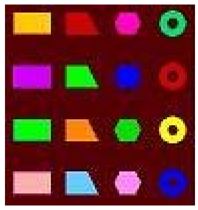
SI =1



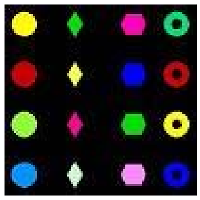
NO =0



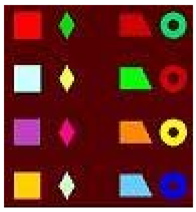
NO =0



SI =1



NO =0



Con cada respuesta afirmativa escribe 1, con la negativa un 0, para el resultado **1**00**1**0, la figura es la $\mathbf{1}\cdot2^4+\mathbf{1}\cdot2=18$, el círculo verde. Solo hay que calcular el valor en 2 del polinomio cuyos coeficientes se obtienen con 1 o 0, con Sí o No.

EJERCICIOS resueltos

1. Halla la expresión en coeficientes de los polinomios $P(x)=5x^2+2x+1$; $Q(x)=x^3-3x$; $R(x)=0,5x^2-4$

Las respectivas expresiones en coeficientes son

$P(x) \rightarrow 5 \ \ 2 \ \ 1$; $Q(x) \rightarrow 1 \ \ 0 \ \ -3 \ \ 0$; $R(x) \rightarrow 0,5 \ \ 0 \ \ -4$

2. Escribe las expresiones polinómicas de los polinomios cuya expresión en coeficientes es:

$P(x) \rightarrow 2 \ \ 1 \ \ 3 \ \ -1$; $Q(x) \rightarrow 1 \ \ 3 \ \ 0 \ \ 0$; $R(x) \rightarrow 3/4 \ \ -1 \ \ 0 \ \ 2$

$P(x)=2x^3+x^2+3x-1$; $Q(x)=x^3+3x^2$; $R(x)=3/4\, x^3-x^2+2$

3. Completa la tabla:

EXPRESIÓN POLINÓMICA	EXPRESIÓN EN COEFICIENTES	GRADO
$-2x^3+x^5-3x^2$		
$x^2/3-1$		
	$-2 \ \ \pi \ \ 0 \ \ 0$	
	$-2 \ \ 1,3 \ \ 0 \ \ -1/7$	
$3-\sqrt{2}\,x^2$		

Estos polinomios son polinomios en una variable, x, con coeficientes en el cuerpo de los números reales. El conjunto de estos polinomios se designa por IR[x].

POLINÓMICA	COEFICIENTES	GRADO
$-2x^3+x^5-3x^2$	$1 \ \ 0 \ \ -2 \ \ -3 \ \ 0 \ \ 0$	5
$x^2/3-1$	$1/3 \ \ 0 \ \ -1$	2
$\pi x^2 - 2x^3$	$-2 \ \ \pi \ \ 0 \ \ 0$	3
$-2x^3+1,3x^2-1/7$	$-2 \ \ 1,3 \ \ 0 \ \ -1/7$	3
$3-\sqrt{2}\,x^2$	$-\sqrt{2} \ \ 0 \ \ 3$	2

4. Halla el valor numérico en 1, 0 y –2 de los polinomios del ejercicio anterior

POLINOMIO	Valor en 1	Valor en 0	Valor en -2
$x^5-2x^3-3x^2$	-4	0	-28
$x^2/3-1$	-2/3	-1	1/3
$-2x^3+\pi x^2$	$-2+\pi$	0	$16+4\pi$
$-2x^3+1,3x^2-1/7$	-59/70	-1/7	737/35
$-\sqrt{2}\,x^2+3$	$-\sqrt{2}+3$	3	$-4\sqrt{2}+3$

2. Operaciones

Para operar con polinomios puede resultar cómodo pasar a sus expresiones en coeficientes, operar con estas y dar el resultado en forma polinómica.

Suma

$P(x)=8x^4+x^2-5x-4$
$Q(x)=3x^3+x^2-3x-2$

Se suman los coeficientes de igual grado:

P(x)→	8	0	1	-5	-4
Q(x)→		3	1	-3	-2
P(x)+Q(x)→	8	3	2	-8	-6

$P(x)+Q(x)=8x^4+3x^3+2x^2-8x-6$

Multiplicación

$P(x)=3x^3+5x-4$
$Q(x)=x^2-x+2$

Se multiplican coeficiente a coeficiente:

P(x)→			3	0	5	-4
Q(x)→				1	-1	2
			6	0	10	-8
		-3	0	-5	4	
	3	0	5	-4		
P(x)·Q(x)→	3	-3	11	-9	14	-8

$P(x)\cdot Q(x)=3x^5-3x^4+11x^3-9x^2+14x-8$

División

$P(x)=3x^3-x^2+5x-4$
$Q(x)=x^2-3x+2$

3	-1	5	-4	|	1	-3	2
-3	9	-6			3	8	
	8	-1	-4				
	-8	24	-16				
		23	-20				

Cociente=3x+8 Resto=23x-20

$P(x)=12x^3+6x-5$
$Q(x)=4x^2+3$

12	0	6	-5	|	4	0	3
-12	0	-9			3	0	
	0	-3	-5				
		0	0				
		-3	-5				

Cociente=3x Resto=-3x-5

Diferencia

$P(x)=3x^3+x^2+5x+4$
$Q(x)=3x^3+3x+2$

Se restan los coeficientes de igual grado:

P(x)→	3	1	5	4
Q(x)→	3	0	3	2
P(x)-Q(x)→		1	2	2

$P(x)-Q(x)=x^2+2x+2$

Observa el grado del resultado:
$gr(P\pm Q)\leq max(gr(P), gr(Q))$

$gr(P\cdot Q)=gr(P)+gr(Q)$

Dividir dos polinomios D(x), dividendo, entre d(x), divisor, es encontrar un cociente c(x) y un resto r(x) que cumplan

- Dividendo=divisor·cociente +resto
- grado de r(x)<grado de d(x)

$gr(c)=gr(D)-gr(d)$

Un ejemplo operando con la variable, comenzamos dividiendo las potencias de mayor grado

$x^3+2x^2-3x+5 \quad | \; 3x^2+x$

$\frac{x^3}{3x^2}=\frac{1}{3}x$

continuamos

$x^3+2x^2-3x+5 \quad | \; 3x^2+x$

$x^3+\frac{1}{3}x^2 \qquad \frac{1}{3}x+\frac{5}{9}$ cociente

$\frac{5}{3}x^2-3x+5$

$\frac{5}{3}x^2+\frac{5}{9}x$

$-\frac{32}{9}x+5$
resto

EJERCICIOS resueltos

5. Halla P(x)+Q(x) y 2·P(x)-Q(x)

$P(x)=x^4+x^3+3x$ $\quad\quad$ $Q(x)=2x^3+x^2-4x+5$

P(x)→	1	1	0	3	0
Q(x)→		2	1	-4	5
P(x)+Q(x)→	1	3	1	-1	5

2·P(x)→	2	2	0	6	0
Q(x)→		2	1	-4	5
2·P(x)-Q(x) →	2	0	-1	10	-5

$$P(x)+Q(x)=x^4+3x^3+x^2-x+5 \qquad 2\cdot P(x)-Q(x)=2x^4-x^2+10x-5$$

6. ¿Cuál es el grado del cociente al dividir un polinomio de grado 5 entre otro de grado 2?
El grado del cociente es el grado del dividendo, 5, menos el del divisor, 2, luego 3.

7. Multiplica $P(x)=x^3+6x^2+4x-6$ por $Q(x)= x^3+3x^2+5x-2$

P(x)→				1	6	4	-6
Q(x)→				1	3	5	-2
				-2	-12	-8	12
			5	30	20	-30	
		3	18	12	-18		
	1	6	4	-6			
P(x)·Q(x)→	1	9	27	34	-10	-38	12

$$P(x)\cdot(Q(x)=x^6+9x^5+27x^4+34x^3-10x^2-38x+12$$

8. Haz en cada caso la división de P(x) entre Q(x)

$P(x)= 2x^3+4x^2+7x+3$

$Q(x)= 2x^2+x+3$

P(x) Dividendo				Q(x) divisor		
2	4	7	3	2	1	3
2	1	3		1	1,5	
	3	4	3	cociente		
	3	1,5	4,5	x+1,5		
		2,5	-1,5			
		resto				
		2,5x-1,5				

$P(x)= 7x^2-2x+5$

$Q(x)=8x+7$

P(x) Dividendo			Q(x) divisor	
7	-2	5	8	7
7	$\frac{49}{8}$		$\frac{7}{8}$	$\frac{65}{-64}$
	$\frac{65}{-8}$	5	cociente	
	$\frac{65}{-8}$	$\frac{455}{-64}$	$\frac{7}{8}x-\frac{65}{64}$	
		$\frac{775}{64}$		
		resto		

3. Identidades notables

Suma al cuadrado

$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$

Demostración

$$\begin{array}{rrr} & a & b \\ \times & a & b \\ \hline & ab & b^2 \\ a^2 & ab & \\ \hline a^2 & +2ab & +b^2 \end{array}$$

La suma al cuadrado es igual a
cuadrado del 1º
+doble del 1º por el 2º
+cuadrado del 2º

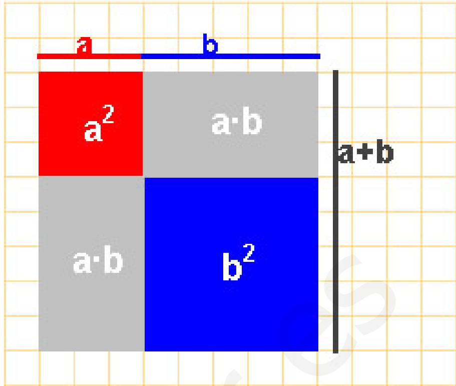
Diferencia al cuadrado

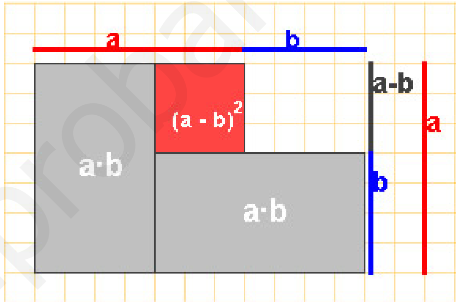
$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$

Demostración

$$\begin{array}{rrr} & a & -b \\ \times & a & -b \\ \hline & -ab & b^2 \\ a^2 & -ab & \\ \hline a^2 & -2ab & +b^2 \end{array}$$

La diferencia al cuadrado es igual a
cuadrado del 1º
+doble del 1º por el 2º
+cuadrado del 2º





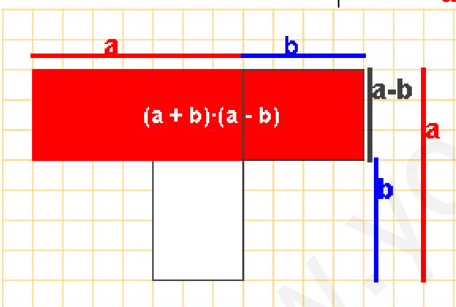
Suma por diferencia

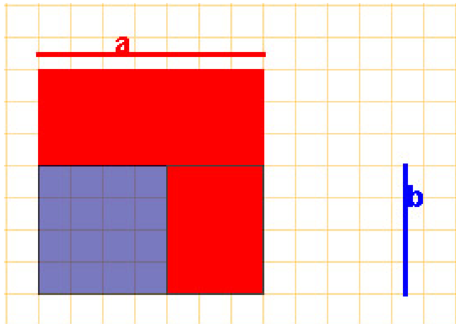
$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

La suma por diferencia es igual a la diferencia de cuadrados.

Demostración

$$\begin{array}{rrr} & a & b \\ \times & a & -b \\ \hline & -ab & -b^2 \\ a^2 & ab & \\ \hline a^2 & & -b^2 \end{array}$$

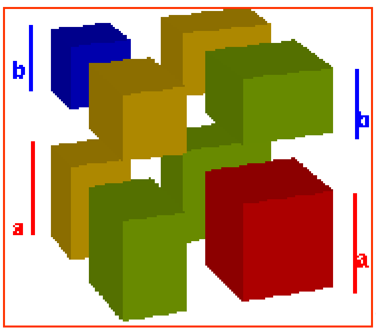




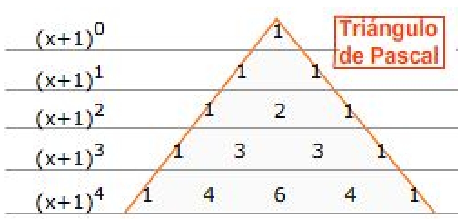
El cubo de un binomio

$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$

Esta igualdad se deduce fácilmente al observar en la figura las 8 piezas en que descompone el cubo de lado (a+b)



r



Cada término de este triángulo se obtiene sumando los dos superiores.
Las filas de este triángulo son los coeficientes de las potencias de (x+1)
Así la tercera fila 1 3 3 1 son los coeficientes de $(x+1)^3$

EJERCICIOS resueltos

9. Observa cómo se aplican las identidades notables

Para desarrollar $(x+3)^2$
Cuadrado del 1º$\rightarrow x^2$ Doble del 1º por el 2º$\rightarrow 2\cdot x\cdot 3=6x$ Cuadrado del 2º$\rightarrow 3^2=9$
por tanto $(x+3)^2=x^2+6x+9$

Para descomponer el polinomio $x^2-10x+25$,
se intenta ver uno de los miembros de una identidad notable,
al ser los signos de los coeficientes alternativos, + - +, se compara con la diferencia al cuadrado.
$25=5^2$ y $10x$=doble de x por 5$\rightarrow$ $x^2-10x+25=(x-5)^2$

Para descomponer el polinomio $4x^2-25$
se intenta ver si es una identidad notable, al ser 0 el coeficiente de grado uno se compara con la diferencia de cuadrados
$4x^2=(2x)^2$; $25=5^2 \rightarrow 4x^2-25=(2x+5)\cdot(2x-5)$

10. Desarrolla las siguientes expresiones

Expresión	Solución	Expresión	Solución
$(x+4)^2$	$x^2+8x+16$	$(x-2)^2$	x^2-4x+4
$(4x+3)^2$	$16x^2+24x+9$	$(3-2x)^2$	$4x^2-12x+9$
$(2x/3+5)^2$	$4x^2/9+20x/3+25$	$(x/2-3)^2$	$x^2/4-3x+9$
$(\sqrt{2}\,x+1)^2$	$2x^2+2\sqrt{2}\,x+1$	$(x-\sqrt{3})^2$	$x^2-2\sqrt{3}\,x+3$

11. Halla la expresión en coeficientes de los siguientes productos

Productos	Solución	Productos	Solución
$(x+4)\cdot(x-4)$	x^2-16; 1 0 -16	$(x-1/2)\cdot(x+1/2)$	1 0 -1/4
$(2x+5)\cdot(2x-5)$	4 0 -25	$(3+\sqrt{2}\,x)\cdot(3-\sqrt{2}\,x)$	-2 0 9

12. Resuelve aplicando las identidades notables la ecuación $x^2+10x+16=0$

Se compara la primera parte, $\mathbf{x^2+10x}$, con una identidad notable, con $(x+5)^2$
Pues $(x+5)^2=\mathbf{x^2+10x}+25$, por tanto, $x^2+10x=(x+5)^2-25$
y el primer miembro de la ecuación es $\mathbf{x^2+10x}+16\mathbf{=(x+5)^2-25}+16$,

$(x+5)^2-9=0\rightarrow$ $(x+5)^2-3^2=0\rightarrow$ $(x+5+3)\cdot(x+5-3)=0 \rightarrow$ Soluciones $x=-8$ y $x=-2$

13. Calcula el cubo de un binomio

Binomio al cubo	Solución	Binomio al cubo	Solución
$(x+2)^3$	$x^3+6x^2+12x+8$	$(x-1)^3$	x^3-3x^2+3x-1
$(2x-3)^3$	$8x^3-36x^2+18x-27$	$(3+x/3)^3$	$x^3/27+x^2+9x+27$

14. Halla la fila 5 del triángulo de Pascal, y calcula $(x+1)^5$

La fila 5 del triángulo es 1 5 10 10 5 1, que son los coeficientes de $(x+1)^5$, por tanto, $(x+1)^5=x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$

4. División por x-a

Regla de Ruffini

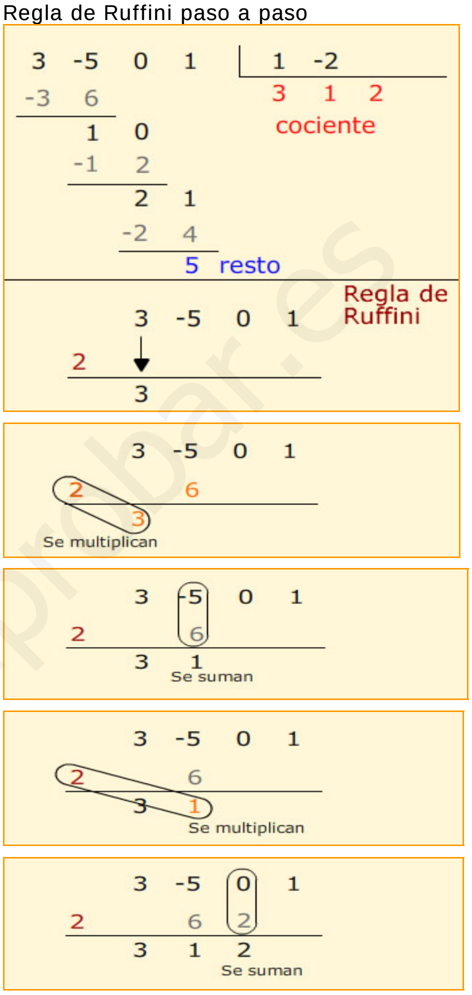
La regla de Ruffini es útil para dividir polinomios entre x-a.

En el ejemplo de la derecha se divide $3x^3-5x^2+1$ entre x-2, obteniendo de cociente $3x^2+x+2$ y de resto 5.
La regla explicada para **a=2**, vale también cuando **a** es un número racional o real, en el siguiente ejemplo se toma **a=-3/2** y representa la división de $4x^2+5x+2$ entre x+3/2

	4	5	2
-3/2		-6	3/2
	4	**-1**	**7/2 resto**

cociente
4x-1

Observa la división y como se realiza la Regla de Ruffini paso a paso



Se vuelve a multiplicar y a sumar obteniendo

Teorema del resto

Ejemplo
Dividendo=$\mathbf{x^4-2}$; divisor=**x-4**
Haz la división en tu cuaderno

Resulta, cociente=$\mathbf{x^3+4x^2+16x+64}$ y resto=**254**
Escribe la igualdad Dividendo = divisor·cociente+resto

$\mathbf{x^4-2=(x-4)\cdot(x^3+4x^2+16x+64)+254}$
Sustituye la x por 4

$\mathbf{4^4-2=(4-4)\cdot(4^3+4\cdot4^2+16\cdot4+64)+254}$
$4^4-2=0\cdot(4^3+4\cdot4^2+16\cdot4+64)+254$
$4^4-2=0\cdot($_________________$)+254$
$4^4-2=0+254$

Conclusión, **al sustituir la x por 4 en el dividendo nos da el resto de la división entre x-4**

Teorema del resto. Para calcular el resto de la división de un polinomio P(x) entre x-a basta sustituir en P(x) la x por a.

Recuerda

P(x) es divisible entre x-a <=> P(a)=0

A menudo, para hallar el resto de una división entre x-a, resulta más cómodo aplicar la regla de Ruffini que sustituir la x. El teorema del resto nos sirve para resolver problemas como el siguiente, hallar m para que el polinomio

$$P(x)=x^3+mx-4$$

sea divisible por x-2, que se resuelve sustituyendo la x por 2, igualando a 0 y despejando m, así m=-2.

Con la calculadora

Para calcular el valor numérico de un polinomio con la calculadora, valor de
$P(x)=3x^3-5x^2+1$ en x=2
Podemos aplicar la regla de Ruffini, para ello teclea la siguiente secuencia:
2 M in x 3 → 3
-5 = → 1
x MR + 0 = → 2
x MR + 1 =5
Obtenemos: 5 que es el resto de dividir P(x) para x-2 y el valor numérico en x=2.
De paso han ido saliendo los coeficientes del cociente cada vez que se pulsaba =.

EJERCICIOS resueltos

15. Aplica la regla de Ruffini para dividir $P(x)=x^3+5x^2-2x+1$, $Q(x)=2x^4-5$ y $R(x)=x^3-4x+3x^2$ entre x-3

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & -2 & 1 \\ 3) & & 3 & 24 & 66 \\ \hline & 1 & 8 & 22 & 67 \end{array}$$

Cociente $x^2+8x+22$

Resto 67

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 3) & & 6 & 18 & 54 & 162 \\ \hline & 2 & 6 & 18 & 54 & 157 \end{array}$$

Cociente $2x^3+6x^2+18x+54$

Resto 157

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 3) & & 3 & 18 & 42 \\ \hline & 1 & 6 & 14 & 42 \end{array}$$

Cociente $x^2+6x+14$

Resto 42

16. Aplica la regla de Ruffini para dividir $P(x)=x^3+3x^2-2x+1$, $Q(x)=x^4-2$ y $R(x)=x^3-4x^2-x$ entre x+1

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -2 & 1 \\ -1) & & -1 & -2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & -4 & 5 \end{array}$$

Cociente x^2+2x-4

Resto 5

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ -1) & & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}$$

Cociente x^3-x^2+x-1

Resto -1

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -1 & 0 \\ -1) & & -1 & 5 & -4 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & -4 \end{array}$$

Cociente x^2-5x+4

Resto -4

17. Aplica la regla de Ruffini para dividir $P(x)=3x^3+5x^2-2x+1$ y $Q(x)=6x^4-2$ y entre x+2/3

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 5 & -2 & 1 \\ -2/3) & & -2 & -2 & 8/3 \\ \hline & 3 & 3 & -4 & 11/3 \end{array}$$

Cociente $3x^2+3x-4$

Resto 11/3

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ -2/3) & & -4 & 8/3 & -16/9 & 32/27 \\ \hline & 6 & -4 & 8/3 & -16/9 & -22/27 \end{array}$$

Cociente $6x^3-4x^2+\frac{8}{3}x-\frac{16}{9}$

Resto $-22/27$

18. Si el valor numérico de un polinomio en 2 es igual a 3 y el cociente de su división de entre x-2 es x ¿Sabes de que polinomio se trata?

Dividendo = divisor·cociente +resto, el divisor es x-2, el cociente x y el resto 3, por tanto el polinomio es x^2-2x+3

19. Halla m para que mx^2+2x-3 sea divisible entre x+1

El polinomio será divisible entre x+1 si su valor en -1 es 0, luego ha de ser

m-2-3=0, es decir, m=5

20. ¿Existe algún valor de m para que el polinomio $x^3+mx^2-2mx+5$ sea divisible por x-2?

Por el teorema del resto basta resolver la ecuación $2^3+m\cdot2^2-2m\cdot2+5=0$, lo que da una igualdad imposible 13=0, por tanto no hay ningún valor de m para el cual el polinomio sea divisible por x-2

5. Descomposición factorial

Sacar factor común una potencia de x

Se llaman divisores impropios de un polinomio P(x), con coeficientes en IR, a los números reales y a los polinomios obtenidos al multiplicar P(x) por un número real.

> Los primos de IR[x] son los polinomios de grado uno y los polinomios de grado dos, $\mathbf{ax^2+bx+c}$, con $\mathbf{b^2-4ac<0}$

Un polinomio es **primo** si no tiene divisores propios y su grado es mayor que cero (los polinomios de grado cero se llaman unidades o invertibles porque tienen inverso).

El primer paso para descomponer un polinomio en factores primos es sacar factor común una potencia de x, cuando sea posible, esto se explica en la animación de la derecha.

$$2x^9+x^6-3x^4=$$
$$=2\cdot\boxed{x^4}\cdot x^5+\boxed{x^4}\cdot x^2-3\cdot x^4$$

x^4 está en todos los sumandos.

$$2x^9+x^6-3x^4=$$
$$=\ x^4\cdot(2x^5+x^2-3)$$

Se ha sacado factor común una potencia de x.

Ejemplos de descomposición factorial

$\mathbf{x^5-5x^4+6x^3}=x^3\cdot(x^2-5x+6)=\mathbf{x^3\cdot(x-2)\cdot(x-3)}$
Se ha sacado factor común x^3 de todos los sumandos o monomios, para el segundo paso se ha resuelto la ecuación de segundo grado $x^2-5x+6=0$, pues según el teorema del resto, x^2-5x+6 es divisible por (x-a) si a^2-5a+6 vale cero, luego a es solución de la ecuación $x^2-5x+6=0$

$\mathbf{x^2-6x+9}=\mathbf{(x-3)^2}$ Se ha aplicado una identidad notable para descomponerlo.

$\mathbf{x^3-1=(x-1)\cdot(x^2+x+1)}$ La ecuación $x^2+x+1=0$ no tiene solución real, luego el polinomio es primo.

$\mathbf{2x^2+3x+1=2\cdot(x+1)\cdot(x+1/2)}$ Las soluciones de la ecuación $2x^2+3x+1=0$ son -1 y -1/2. **Hay que tener cuidado**, en factorizaciones de este tipo, **de no olvidar el factor de** $\mathbf{x^2}$.

Raíz	Raíz
2	-2
Divisor	Divisor
x-2	x+2

Raíces de un polinomio

Si x-a es un divisor del polinomio P(x), se dice que **a es raíz** de P(x), por el teorema del resto sabemos que esto equivale a decir que P(a)=0.

$P(x)=p_n\mathbf{x}^n+p_{n-1}\mathbf{x}^{n-1}+\ldots+p_1\mathbf{x}+p_0$ y **a raíz** de P(x),

$$p_n\mathbf{a}^n+p_{n-1}\mathbf{a}^{n-1}+\ldots+p_1\mathbf{a}+p_0=0,$$

y despejando p_0

$$p_0=-p_n\mathbf{a}^n-p_{n-1}\mathbf{a}^{n-1}-\ldots-p_1\mathbf{a}$$

Por tanto, si los coeficientes de P(x) son números enteros y **a** también, p_0 es múltiplo de **a**.

> Las **raíces** no nulas de un polinomio con coeficientes enteros, son **divisores del coeficiente de menor grado** del polinomio.

La descomposición de un polinomio de tercer grado con raíces 4, 1 y -2 será a·(x-4)·(x-1)·(x+2).

Se llama **multiplicidad** de una raíz al número de veces que aparece en la descomposición.

Descomposición factorial de $\mathbf{x^4-15x^2+10x+24}$

Las posibles raíces racionales de este polinomio son los divisores de 24

±1 ±2 ±3 ±4 ±6 ±8 ±12 ±24

Con la regla de Ruffini vamos viendo qué divisores son raíces

	1	0	-15	10	24
-1)		-1	1	14	-24
	1	**-1**	**-14**	**24**	**0**
2)		2	2	-24	
	1	1	-12	**0**	
3)		3	12		
	1	4	**0**		

$\mathbf{x^4-15x^2+10x+24}=$
$(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x+4)$

EJERCICIOS resueltos

21. Saca factor común una potencia de x en cada uno de los siguientes polinomios:
$P(x)=2x^3+3x$ $\quad Q(x)= x^4+2x^6-3x^5$ $\quad R(x)=2x^6+6x^5+8x^3$

Solución: $P(x)=x\cdot(2x^2+3)$ $\quad Q(x)=x^4\cdot(2x^2-3x+1)$ $\quad R(x)=2x^3\cdot(x^3+3x^2+4)$, en este último caso se ha podido sacar factor común también un número.

22. Halla la descomposición factorial de $\mathbf{x^7-x^6-4x^4}$

$\mathbf{x^7-x^6-4x^4}=x^4\cdot(x^3-x^2-4)$. Se ha sacado factor común x^4.
Las posibles raíces enteras de x^3-x^2**-4** son los **divisores de -4**:

$\boxed{1,-1,\ 2,-2,\ 4,-4}$

Veamos por la Regla de Ruffini si 1 es raíz de P

	1	-1	0	-4
1)		1	0	0
	1	0	0	**-4 ≠ 0,**

1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si -1 es raíz de P

	1	-1	0	-4
-1)		-1	2	-2
	1	-2	2	**-6 ≠ 0**

-1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si **2** es raíz de P

	1	-1	0	-4
2)		2	2	4
	1	1	2	**0**

2 es raíz de P

1 1 2 = x^2+x+2 La ecuación $x^2+x+2=0$ no tiene soluciones reales, por tanto es primo

$\boxed{\mathbf{x^7-x^6-4x^4}=x^4\cdot(x-\mathbf{2})\cdot(x^2+x+2)}$

23. Halla la descomposición factorial de $\mathbf{x^4+x^3-x^2-2x-2}$

Las posibles raíces enteras de $x^4+x^3-x^2-2x$**-2** son los **divisores de -2**:

$\boxed{1,-1,\ 2,-2}$

Veamos por la Regla de Ruffini si 1 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
1)		1	0	-1	-3
	1	0	-1	-3	**-5 distinto de 0,**

1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si -1 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
-1)		-1	2	-1	3
	1	-2	1	-3	**1 distinto de 0,**

-1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si 2 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
2)		2	2	2	0
	1	1	1	0	**-2 distinto de 0,**

2 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si 1 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
-2)		-2	6	-10	24
	1	-3	5	-12	**22 distinto de 0,**

-2 no es raíz de P

$\boxed{\mathbf{x^4+x^3-x^2-2x-2}\text{ No tiene raíces enteras}}$

No podemos hallar la descomposición factorial de este polinomio.

EJERCICIOS resueltos

25. Si los coeficientes de $P(x)=p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+\ldots+p_1x+p_0$ son números enteros, las posibles raíces racionales de P(x) son de la forma

$$\frac{\text{divisor de } p_0}{\text{divisor de } p_n}$$

Halla la descomposición factorial de $\mathbf{12x^3+4x^2-17x+6}$

Las posibles raíces en Q de $\mathbf{12x^3+4x^2-17x+6}$ son los cocientes de los divisores de 6 entre los divisores de 12,

$$\frac{\text{divisores de } 6}{\text{divisores de } 12};\qquad \frac{\pm1\quad\pm2\quad\pm3\quad\pm6}{\pm1\quad\pm2\quad\pm3\quad\pm4\quad\pm6\quad\pm12}$$

$$\pm1\quad\pm\frac{1}{2}\quad\pm\frac{1}{3}\quad\pm\frac{1}{4}\quad\pm\frac{1}{6}\quad\pm\frac{1}{12}\quad\pm2\quad\pm\frac{2}{3}\quad\pm3\quad\pm\frac{3}{2}\quad\pm\frac{3}{4}\quad\pm6$$

Es fácil ver con la regla de Ruffini que ni 1, ni-1 son raíces de P.

Veamos por la Regla de Ruffini si 1/2 es raíz de P

	12	4	-17	6
1/2)		6	5	-6
	12	10	-12	**0**

1/2 es raíz de P.

Al resolver la ecuación $12x^2+10x-12=0$, se obtiene que -3/2 y 2/3 son raíces de P.

$$\boxed{\mathbf{12x^3+4x^2-17x+6}=12\cdot(x-1/2)\cdot(x+3/2)\cdot(x-2/3)}$$

26. Halla la descomposición factorial de $\mathbf{x^4-4}$

Busquemos las raíces racionales de $\mathbf{x^4-4}$. Las posibles raíces en Q son los cocientes de los divisores de -4 (coeficiente de menor grado) entre los divisores de 1 (coeficiente de mayor grado),

$$\frac{\text{divisores de } -4}{\text{divisores de } 1};\qquad \frac{\pm1\quad\pm2\quad\pm4}{\pm1}$$

$$\pm1\quad\pm2\quad\pm4$$

Es fácil ver con la regla de Ruffini que ninguno de los posibles valores son raíces de x^4-4. El polinomio no tiene raíces racionales.

Si se reconoce x^4-4 como una diferencia de cuadrados, $(\mathbf{x^2})^2-\mathbf{2}^2$ resultará fácil la descomposición factorial:
$x^4-4=(x^2+2)\cdot(x^2-2)$
El primer factor es primo, pero el segundo vuelve a ser una diferencia de cuadrados $x^2-2=(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})$

$$\boxed{\mathbf{x^4-4}=(x^2+2)\cdot\ (x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})}$$

EJERCICIOS resueltos

27. Halla la descomposición factorial de $\mathbf{x^3-7x^2+4x+12}$

Las posibles raíces racionales de este polinomio son los divisores de 12

$\pm1 \quad \pm2 \quad \pm3 \quad \pm4 \quad \pm6 \quad \pm12$

Con la regla de Ruffini miramos que divisores son raíces del polinomio

	1	-7	4	12
-1)		-1	8	-12
	1	**-8**	**12**	**0**
2)		2	-12	
	1	-6	**0**	

$$\mathbf{x^3-7x^2+4x+12} = (x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-6)$$

28. Halla la descomposición factorial de $\mathbf{(2x^3+x+3/2)^2-(x^3+5x-3/2)^2}$

Se aplican las **identidades notables**:

diferencia de cuadrados=suma por diferencia

$$(2x^3+x+3/2)^2-(x^3+5x-3/2)^2=(3x^3+6x)\cdot(x^3-4x+3)$$

El primer factor $(3x^3+6x)$ descompone sacando **factor común** 3x, $(3x^3+6x)=3x\cdot(x^2+2)$; x^2+2 es primo pues la ecuación de segundo grado $x^2+2=0$ no tiene raíces reales.

Para (x^3-4x+3) **se buscan sus raíces racionales**

$1 \quad -1 \quad 3 \quad -3$

Vemos que 1 es raíz

	1	0	-4	3
1)		1	1	-3
	1	1	-3	**0**

$(x^3-4x+3)=(x-1)\cdot(x^2+x-3)$

Para descomponer x^2+x-3 se resuelve la **ecuación de segundo grado** $x^2+x-3=0$ que tiene por soluciones

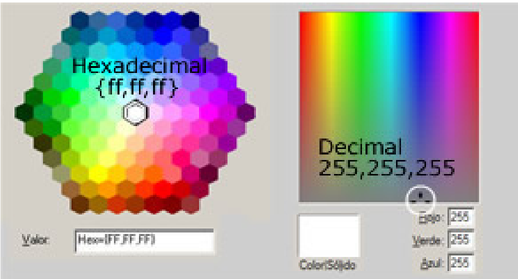
$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ y $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

$$\mathbf{(2x^3+x+\tfrac{3}{2})^2-(x^3+5x-\tfrac{3}{2})^2} = 3x\cdot(x^2+2)\cdot(x-1)\cdot\left(x-\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$$

Para practicar

1. El número 5352 está en base 7 ¿Cuál es su valor en el sistema decimal? Se debe hallar el valor numérico en 7 del polinomio de coeficientes 5 3 5 2.

2. La cantidad de color se suele expresar en sistema hexadecimal o de base 16, este sistema tiene 16 cifras:0 1 2 3 4 5 6 7 8 9, a=10, b=11, c=12, d=13, e=14, f=15 y en este sistema la cantidad **38** de color azul equivale a **3**·16+**8**=56 en decimal



Estas imágenes se pueden ver al esoger color en word. La cantidad de rojo, verde y azul define cualquier color.

Expresa en decimal las cantidades hexadecimales 62 y 5d de color azul.

3. Halla P(x)-5·Q(x) siendo $P(x)=4x^2+4x$ y $Q(x)=6x^2+2x$.

4. Multiplica los polinomios $P(x)=4x^2-7x+3$ y $Q(x)=-x^2+5$.

5. Halla el cociente y el resto de la división de $-4x^3+7x^2-x-5$ entre $-2x^2-5x-2$.

6. Haz la división de $3x^3+x-4$ entre $x+2$ con la regla de Ruffini.

7. Aplica el teorema del resto para calcular el resto de la división de $3x^3-5x^2+7$ entre x-5.

8. a) Halla m para que $x^3+mx^2-3mx+3$ sea divisible por x+5

b) Halla m para que $x^3+mx^2-5mx+6$ sea divisible por x-5.

9. Efectúa las potencias
a) $(2x+3)^2$
b) $(2x-1)^3$
c) $(x-3)^2$
d) $(x+2)^3$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando las identidades notables:
a) $x^2+4x-21=0$
b) $x^2-10x+9=0$

11. Halla la fila 4ª del triángulo de Pascal ¿Cuál es el coeficiente de grado 2 de $(x+1)^4$?

12. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas

a) $\dfrac{x^2+8x+16}{3x+12}$

b) $\dfrac{3x^2-12}{x^2-4x+4}$

c) $\dfrac{4x^2+4x+1}{12x^2-3}$

13. Halla la descomposición en factores primos de los siguientes polinomios
a) $4x^7+12x^6-4x^5-12x^4$
b) $3x^8+9x^7-12x^5$
c) $12x^3-16x^2-7x+6$
d) $8x^3-20x^2+22x-7$
e) $2x^3-9x^2+5x+5$

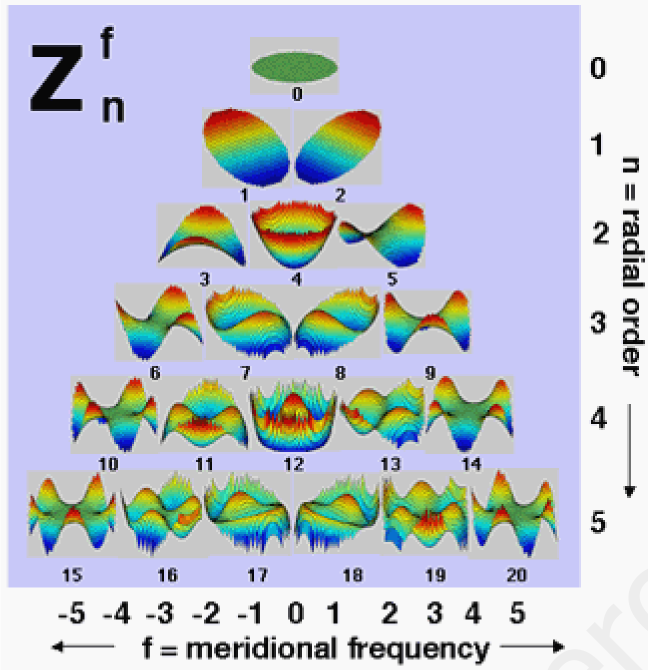
14. Aplica las identidades notables para descomponer los siguientes polinomios
a) x^4-6^4
b) $x^4-x^2-24x-12^2$
c) $x^4-98x^2+49^2$

15. Un polinomio de grado 3 tiene por raíces –1, 4 y 1. Halla su descomposición factorial sabiendo que su valor en 2 es -24.

Para saber más

Los polinomios en otras ciencias

Si investigaste en la web, es probable que encontraras muchos polinomios con nombre propio: Polinomios de Lagrange, Hermite, Newton, Chevichev... copiamos aquí un extracto de un blog que habla de los polinomios de Zernike y su aplicación en óptica para corregir defectos visuales.



...Las matemáticas, con los polinomios de Zernike, nos ofrecen un método para descomponer superfices complejas en sus componentes más simples. **Así, con este procedimiento matemático podemos jerarquizar y definir todas las aberraciones visuales**. Un esquema que está presente con mucha frecuencia en las consultas de cirugía refractiva es el de las diferentes aberraciones agrupadas y jerarquizadas:

Lo de la jerarquía es fundamental, porque según cuál sea el grupo de la aberración, tendrá más o menos importancia, será más o menos fácil de corregir, etc. Por ejemplo, el número 4 corresponde a la miopía (y su inverso, la hipermetropía), y el 3 y 5 corresponden al astigmatismo...

Extracto de la página
http://ocularis.es/blog/?p=29

Algoritmo de Euclides

La descomposición factorial de números o de polinomios sirve para simplificar fracciones.

Numéricas	Polinómicas
$\frac{18}{30}=\frac{2\cdot 3^2}{2\cdot 3\cdot 5}=\frac{3}{5}$	$\frac{x^2-x}{x^2+x-2}=\frac{x\cdot(x-1)}{(x+2)\cdot(x-1)}=\frac{x}{x+2}$

Pero no resulta fácil con este método simplificar cualquier fracción, ya que la descomposición factorial puede resultar difícil de calcular. El algoritmo de Euclides, es un método seguro para hallar el m.c.d. y poder así simplificar cualquier fracción, se basa en que el m.c.d. del Dividendo y del divisor es el m.c.d. del divisor y del resto.

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & c \end{array}$$

Dividendo =divisor·cociente+resto
Por tanto
m.c.d.(D,d)=m.c.d.(d,r)
Así se reducen los elementos de los que calcular el m.c.d.
Recuerda esta igualdad

Hallar el **m.c.d. de 1219 y 299**

$$\begin{array}{r|l} 1219 & 299 \\ \hline 23 & 4 \end{array}$$

Aplicamos que **m.c.d.(D,d)=m.c.d.(d,r)**
luego basta calcular el **m.c.d.(299,23)**

$$\begin{array}{r|l} 299 & 23 \\ \hline 69 & 13 \\ 0 & \end{array}$$

m.c.d.(299,23)=m.c.d.(13,0)=13

Hallar el **m.c.d. de $x^4+2x^3+7x^2+6x+9$ y $x^4+2x^3+6x^2+5x+6$**

Hacemos la división

$$\begin{array}{r|l} 1\ 2\ 7\ 6\ 9 & 1\ 2\ 6\ 5\ 6 \\ \hline 0\ 1\ 1\ 3 & 1 \end{array}$$

Aplicamos que **m.c.d.(D,d)=m.c.d.(d,r)**
y volvemos a dividir

$$\begin{array}{r|l} 1\ 2\ 6\ 5\ 6 & 1\ 1\ 3 \\ \hline 1\ 3\ 5 & 1\ 1\ 2 \\ 2\ 2\ 6 & \\ 0\ 0 & \end{array}$$

El m.c.d. pedido es **1 1 3 = x^2+x+3**

Recuerda lo más importante

Operaciones con polinomios
Regla de Ruffini y Teorema del resto

El resto de la división por x-a es el valor numérico del dividendo en a

```
 3  -5   0   1  | 1  -2
-3   6          |-------
--------          3   1   2
     1   0        cociente
    -1   2
    -------                  T. del resto
         2   1
        -2   4               5=3·2³-5·2²+1
        -------
             5  resto
```

Regla de Ruffini

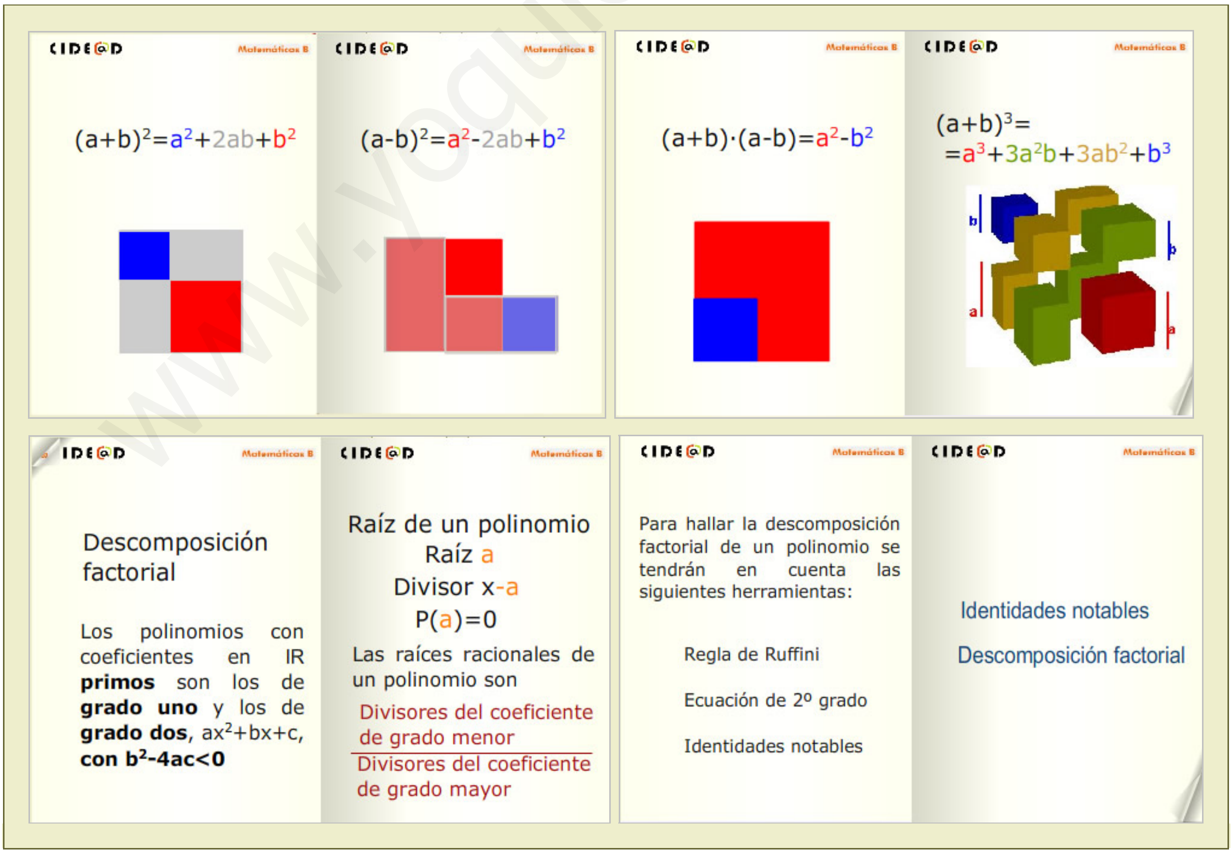
```
      3  -5   0   1
 2        6   2   4
 ------------------
      3   1   2   5  resto
      cociente
```

Triángulo de Pascal

$(x+1)^0$					1				
$(x+1)^1$				1		1			
$(x+1)^2$			1		2		1		
$(x+1)^3$		1		3		3		1	
$(x+1)^4$	1		4		6		4		1

Raíces de un polinomio

Raíz 2	Raíz -2
Divisor x-2	Divisor x+2
P(2)=0	P(-2)=0



Autoevaluación

1. Halla los coeficientes de $P(x)\cdot Q(x)+P(x)\cdot R(x)$ siendo $P(x)=2x+1$, $Q(x)=5x^2-5$ y $R(x)=x^2+11x$.

2. Calcula el cociente y el resto de la división de $6x^3-5x^2+4$ entre x^2+3.

3. ¿Cuáles son los coeficientes de $(x+4)^3$?

4. ¿Es cierta la igualdad $4x^2+10x+25=(2x+5)^2$?

5. Calcula m para que el resto de la división de $8x^2+mx+3$ entre $x+2$ sea 3.

6. Si $P(x)=ax^2+bx+5$ y $a\cdot 6^2+b\cdot 6=4$, ¿cuál es el resto de la división de P(x) entre x-6?

7. Halla una raíz entera del polinomio x^3+5x^2+6x+8

8. Halla una raíz racional de $4x^3+5x^2+25x+6$

9. El polinomio $5x^3+7x^2-28x-12$ tiene por raíces 2 y –3 ¿Cuál es la otra raíz?

10. Las raíces de un polinomio de grado 3 son –5, 0 y 6. Calcula el valor numérico del polinomio en 7 sabiendo que su coeficiente de mayor grado es 3.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. 1899
2. 98, 93
3. $-26x^2-6x$
4. $-4x^5+7x^4-17x^2-35x+15$
5. Cociente$=2x-17/2$,
   resto$=\frac{-79}{2}x-22$
6. Cociente 3 -6 13 **resto -30**
7. $3\cdot5^3-5\cdot5^2+7=257$
8. a) $m=61/20$,
   b) No puede ser divisible entre x-5
9. a) $4x^2+12x+9$
   b) $8x^3-12x^2+6x-1$
   c) x^2-6x+9
   d) $x^3+6x^2+12x+8$
10. a) $(x+2)^2-5^2=(x+2+5)\cdot(x+2-5)$;
    -7 y 3
    b) $(x-5)^2-4^2=(x-5+4)\cdot(x-5-4)$; 1 y 9
11. 1 4 **6** 4 1
12. a) $\frac{x+4}{3}$
    b) $\frac{3x+6}{x-2}$
    c) $\frac{2x+1}{6x-3}$
13. a) $4x^4\cdot(x+3)\cdot(x+1)\cdot(x-1)$
    b) $3x^5\cdot(x+2)^2\cdot(x-1)$
    c) $12\cdot(x+2/3)\cdot(x-3/2)\cdot(x-1/2)$
    d) $(x-1/2)\cdot(8x^2-16x+14)$
    e) $(x+\frac{1}{2})\cdot 2\cdot(x-\frac{5-\sqrt{5}}{2})\cdot(x-\frac{5+\sqrt{5}}{2})$
14. a) $(x^2+36)\cdot(x+6)\cdot(x-6)$
    b) $(x^2+x+12)\cdot(x-4)\cdot(x+3)$
    c) $(x+7)^2\cdot(x-7)^2$
15. $4\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-4)$

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 12 28 1 -5
2. Cociente 6x-5, resto $-18x+19$
3. 1 12 48 64
4. No, $(2x+5)^2=4x^2+20x+25$
5. $m=16$
6. 9
7. -4
8. $-1/4$
9. $-2/5$
10. 252

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

cidead
Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia

ACTIVIDADES DE ESO

Nombre y apellidos del alumno:		Curso: 4º
Quincena nº: 3	Asignatura: Matemáticas B	
Fecha:	Profesor de la asignatura:	

1. La ecuación $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, tiene tres raíces enteras, utiliza la regla de Ruffini para calcularlas.

2. Calcula el valor de **m** para que el polinomio $x^4 + x^3 + \mathbf{m}x + 2$ sea divisible por $x+2$.

3. Efectúa la división $(4x^3 - 8x^2 - 9x + 7):(x-3)$

4. Factoriza el numerador y el denominador y simplifica la fracción: $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 4x}$

cidead@mec.es

http://cidead.cnice.mec.es

C/ TORRELAGUNA, 58
28027 MADRID
TEL: 91 3778300
FAX: 91 3778314

4

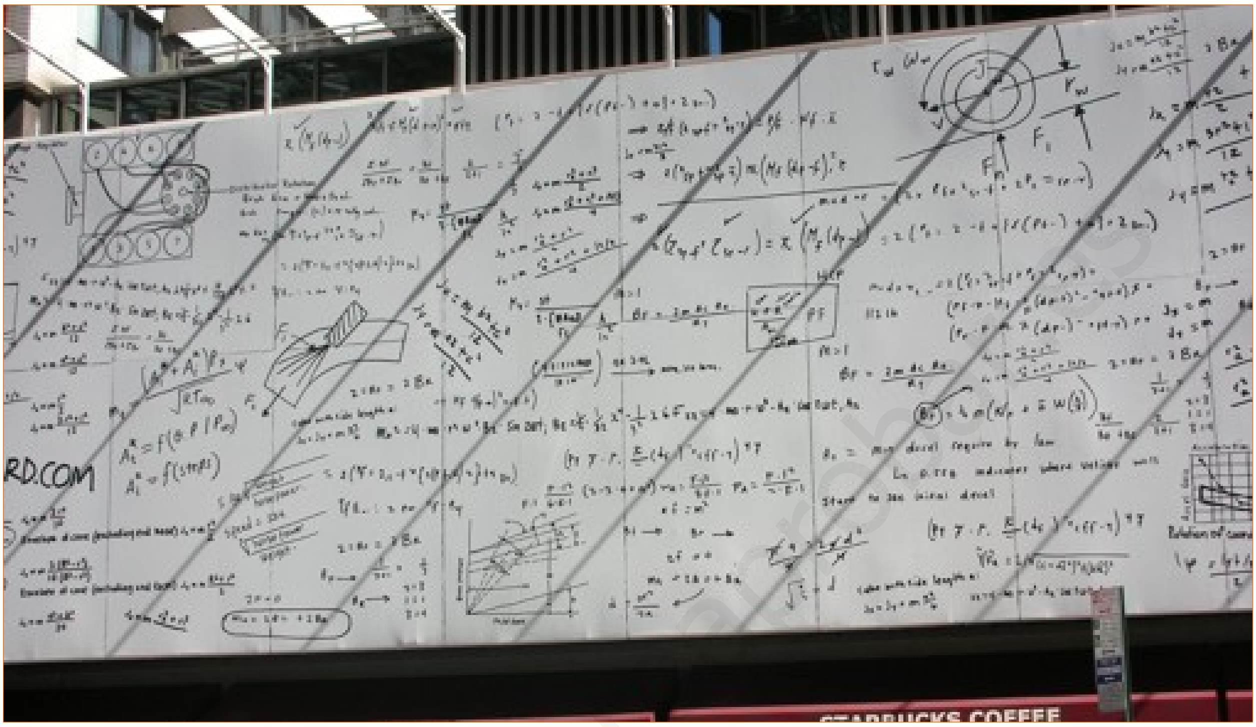
Ecuaciones y sistemas

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Resolver ecuaciones de segundo grado completas e incompletas.
- Resolver ecuaciones bicuadradas y otras que se pueden reducir a una de segundo grado.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando los diferentes métodos.
- Resolver sistemas de ecuaciones de segundo grado.
- Aplicar el lenguaje del álgebra a la resolución de problemas.

Antes de empezar

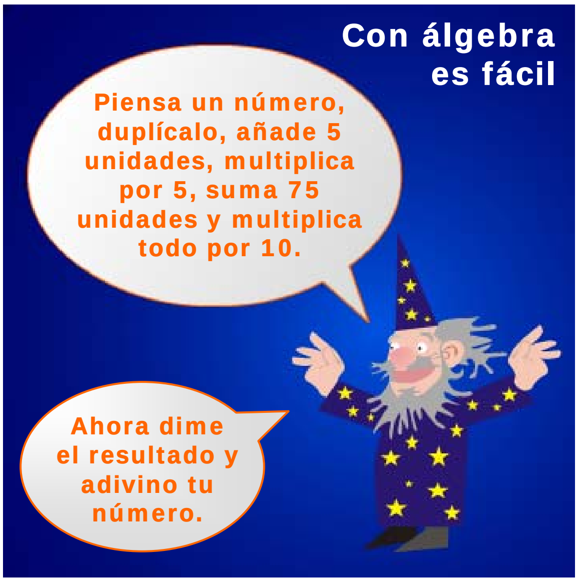


Gran cantidad de problemas prácticos en la vida real conducen a la resolución de una ecuación o de un sistema de ecuaciones. Traducir al "lenguaje del álgebra" resulta imprescindible en estas ocasiones, el lenguaje algebraico nos sirve para expresar con precisión relaciones difíciles de transmitir con el lenguaje habitual.

Prueba a hacer a algún amigo el juego de que propone el mago, para adivinar el número pensado basta restar 1000 al resultado que te de y dividir por 100, como puedes comprobar si planteas una ecuación:

Piensa un número	$\mathbf{x}$
Duplícalo	$\mathbf{2x}$
Añade 5 unidades	$\mathbf{2x+5}$
Multiplica por 5	$\mathbf{5\cdot(2x+5)}$
Suma 75 unidades	$\mathbf{5\cdot(2x+5)+75}$
Multiplica todo por 10	$\mathbf{10\cdot[5\cdot(2x+5)+75]}$

$$10\cdot[5\cdot(2x+5)+75]=\text{resultado}$$
$$10\cdot(10x+25+75)=\text{ resultado}$$
$$10\cdot(10x+100)=\text{ resultado}$$
$$100x+1000=\text{resultado}$$
$$x=(\text{resultado}-1000)/100$$



1. Ecuaciones de segundo grado

Las **ecuaciones de segundo grado** son de la forma:

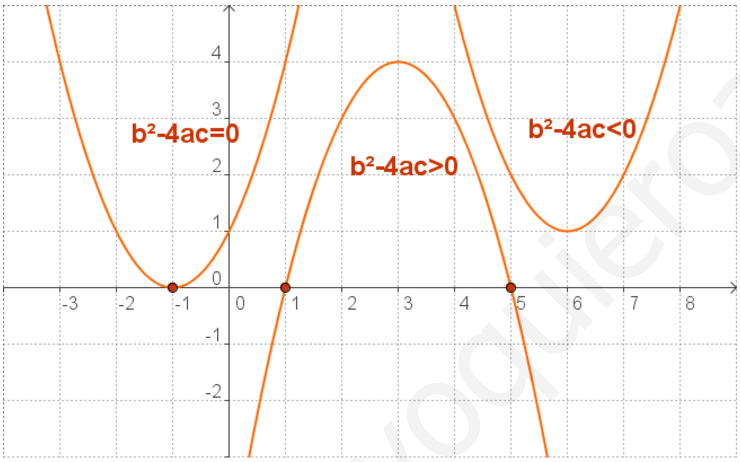
$$ax^2 + bx + c = 0$$

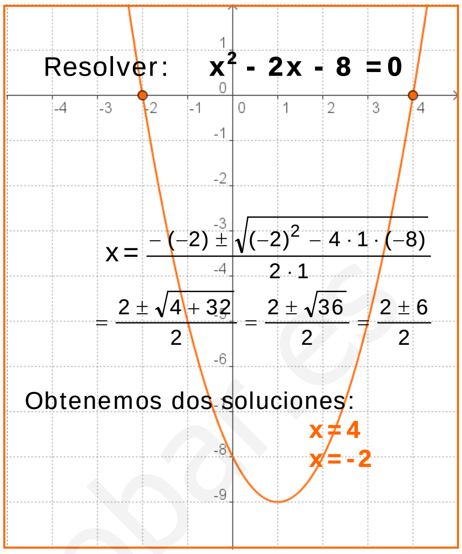
Para resolverlas empleamos la fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Estas ecuaciones pueden tener dos soluciones, una o ninguna solución, según sea b^2**-4ac**, el llamado discriminante.

- $b^2-4ac > 0$ Hay dos soluciones.
- $b^2-4ac = 0$ Hay una solución doble: $x=-b/2a$
- $b^2-4ac < 0$ No hay solución.





Resolver: $x^2 - 2x - 8 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-8)}}{2\cdot 1}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2}$$

Obtenemos dos soluciones:

$x=4$

$x=-2$

¿Cómo se obtiene la fórmula?

$$ax^2+bx+c=0$$

Pasamos c al otro miembro:

$$ax^2+bx=-c$$

Multiplicamos por 4a:

$$4a^2x^2+4abx=-4ac$$

Sumamos b^2:

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$$

Tenemos un cuadrado perfecto:

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac$$

Extraemos la raíz:

$$2ax+b = \pm\sqrt{b^2-4ac}$$

Despejamos x:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ecuaciones incompletas

Cuando b, c ó los dos son 0 estamos ante una ecuación de segundo grado incompleta.

En estos casos no es necesario aplicar la fórmula sino que resulta más sencillo proceder de la siguiente manera:

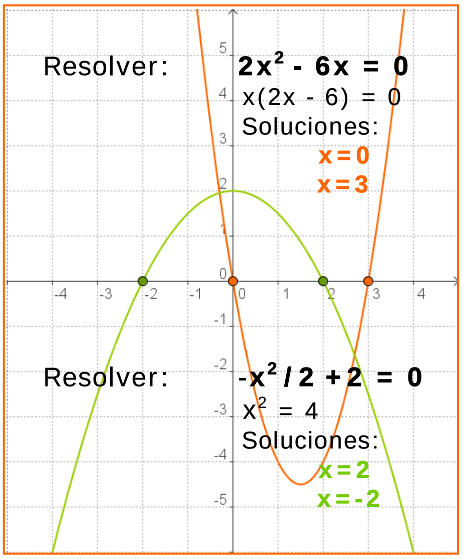
- Si b=0 $\quad ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2=-c \Rightarrow x^2=-c/a$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

  - Si $-c/a>0$ hay dos soluciones
  - Si $-c/a<0$ no hay solución

- Si c=0 $\quad ax^2 + bx = 0$

  sacando x factor común : $x(ax+b)=0$
  $\Rightarrow x=0$, $x=-b/a$ son las dos soluciones.



Resolver: $2x^2 - 6x = 0$

$x(2x - 6) = 0$

Soluciones:

$x=0$

$x=3$

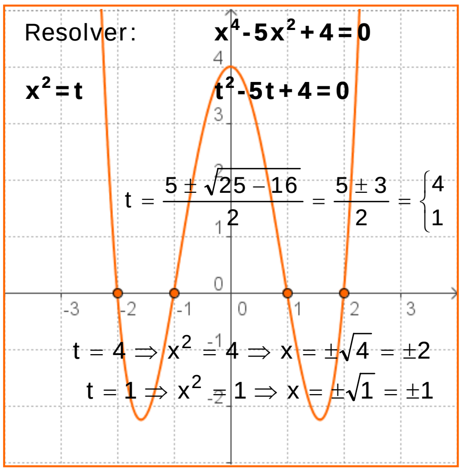
Resolver: $-x^2/2 + 2 = 0$

$x^2 = 4$

Soluciones:

$x=2$

$x=-2$



Ecuaciones bicuadradas

A las ecuaciones del tipo $\mathbf{ax^4+bx^2+c=0}$ se les llama bicuadradas.

Para resolverlas basta hacer $\mathbf{x^2=t}$, obteniendo una ecuación de segundo grado: $\mathbf{at^2+bt+c=0}$, en la que

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}x=\pm\sqrt{t_1}\\ x=\pm\sqrt{t_2}\end{matrix}$$

A continuación vemos algunas ecuaciones que se transforman en una de segundo grado. En los ejercicios resueltos puedes ver más ejemplos.

Resolver: $\mathbf{x-\frac{2}{1-x}=4}$

Quitamos denominadores :

$x(1-x)-2=4(1-x)$

Operamos :

$x-x^2-2=4-4x$

Resolvemos :

$\mathbf{x^2-5x+6=0}$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases}3\\2\end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

$\mathbf{x=3}$

$\mathbf{x=2}$

Son válidas ambas.

Racionales

Son ecuaciones en las que la incógnita aparece en el denominador.

El proceso que se ha de seguir para su resolución consiste en quitar en primer lugar los denominadores, operamos y resolvemos la ecuación resultante.

Conviene comprobar que ninguna de las soluciones obtenidas anula el denominador, ya que en ese caso no sería válida.

Resolver: $\mathbf{\sqrt{x-1}+x=7}$

Dejamos a un lado la raíz:

$\sqrt{x-1}=7-x$

Elevamos al cuadrado:

$(\sqrt{x-1})^2=(7-x)^2$

$x-1=49-14x+x^2$

Resolvemos: $\mathbf{x^2-15x+50=0}$

$$x=\frac{15\pm\sqrt{225-200}}{2}=\frac{15\pm 5}{2}=\begin{cases}10\\5\end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

$x=10$ no es válida

$\mathbf{x=5}$ es la solución

Ecuaciones irracionales

Son ecuaciones en las que la incógnita aparece bajo el signo radical.

Para resolverlas se deja a un lado la raíz exclusivamente y se elevan al cuadrado los dos miembros. Operando se llega a una ecuación de segundo grado que resolvemos.

Al elevar al cuadrado suelen introducirse soluciones “extrañas” por lo que es preciso comprobarlas en la ecuación de partida.

EJERCICIOS resueltos

1. Resuelve las ecuaciones:

a) $x^2 + 12x + 32 = 0$ $\qquad x = \frac{-12 \pm \sqrt{144-128}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-12 \pm 4}{2} = \begin{cases} -8 \\ -4 \end{cases}$

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ $\qquad x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{18} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{18} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$

2. Resuelve las ecuaciones:

a) $2x^2 + 5x = 0$ $\qquad x(2x+5)=0 \Rightarrow x=0,\ x=-5/2$

b) $2x^2 - 32 = 0$ $\qquad x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$

3. Calcula el valor de m para que la ecuación $x^2+mx+9=0$ tenga una solución doble.

El discriminante $\Delta=b^2-4ac$ debe ser 0, $m^2 - 4\cdot 9=0 \Rightarrow m^2=36$ y $m=\pm 6$
Si $m=6$, $x^2+6x+9=0$ y la solución $x=-3$; si $m=-6$, $x^2-6x+9=0$ y la solución $x=3$

4. Resuelve las ecuaciones:

a) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ $\qquad t^2 - 25t + 144 = 0$

$x^2=t$ $\qquad t = \frac{25 \pm \sqrt{625-576}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} = \begin{cases} 16 \Rightarrow x = \pm 4 \\ 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$

b) $x^4 + 9x^2 - 162 = 0$ $\qquad t^2 + 9t - 162 = 0$

$x^2=t$ $\qquad t = \frac{-9 \pm \sqrt{81+648}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{729}}{2} = \frac{-9 \pm 27}{2} = \begin{cases} -18 \Rightarrow \text{Sin sol.} \\ 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$

5. Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{9-x}{1+3x} + \frac{3}{1-x} = -2$ $\qquad (9-x)(1-x)+3(1+3x)=-2(1+3x)(1-x)$

$9-9x-x+x^2+3+9x=-2+2x-6x+6x^2$

$5x^2 - 3x - 14 = 0$ $\qquad x = \frac{3 \pm \sqrt{9+280}}{10} = \frac{3 \pm \sqrt{289}}{10} = \frac{3 \pm 17}{10} = \begin{cases} 2 \\ -7/5 \end{cases}$

Sustituyendo en la ecuación valen las dos soluciones

b) $\frac{1-x}{5(x+1)} - \frac{8}{x-2} = 1$ $\qquad (x-2)(1-x)-8\cdot 5(x+1)=5(x+1)(x-2)$

$x-2-x^2+2x-40x-40=5x^2+5x-10x-10$

$6x^2 + 32x + 32 = 0$ $\qquad x = \frac{-32 \pm \sqrt{1024-768}}{12} = \frac{-32 \pm \sqrt{256}}{12} = \frac{-32 \pm 16}{12} = \begin{cases} -4 \\ -4/3 \end{cases}$

Sustituyendo en la ecuación valen las dos soluciones

6. Resuelve las ecuaciones:

a) $x+1-\sqrt{5x+1} = 0$ $\qquad x+1 = \sqrt{5x+1}$

$(x+1)^2 = (\sqrt{5x+1})^2 \Rightarrow x^2+2x+1=5x+1$

$x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow x=0,\ x=3$

Sustituyendo en la ecuación valen las dos soluciones

b) $\sqrt{3x+4} + 2x = 4$ $\qquad \sqrt{3x+4} = 4-2x$

$(\sqrt{3x+4})^2 = (4-2x)^2 \Rightarrow 3x+4=16-16x+4x^2$

$4x^2-19x+12=0$

$x = \frac{19 \pm \sqrt{361-192}}{8} = \frac{19 \pm \sqrt{169}}{8} = \frac{19 \pm 13}{8} = \begin{cases} 4 \\ 3/4 \end{cases}$

Sólo vale la solución $x=3/4$

2. Sistemas de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones de primer grado que deben satisfacerse simultáneamente.

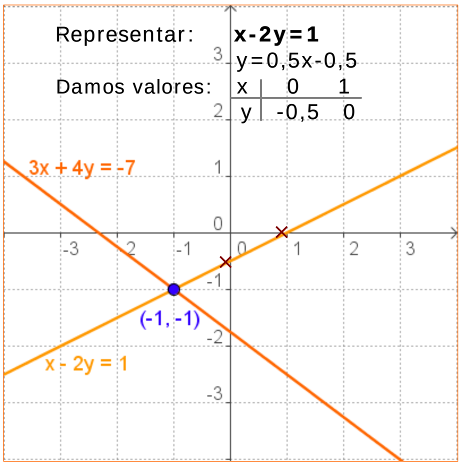
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, c_2 son números reales

Una **solución** del sistema es un par de números **(x,y)** que verifica ambas ecuaciones del sistema.

Dos sistemas con la misma solución se dicen **equivalentes**.

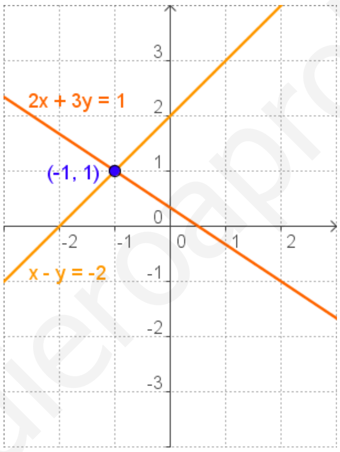
Los sistemas que tienen solución se llaman **compatibles** y los que no tienen **incompatibles**.

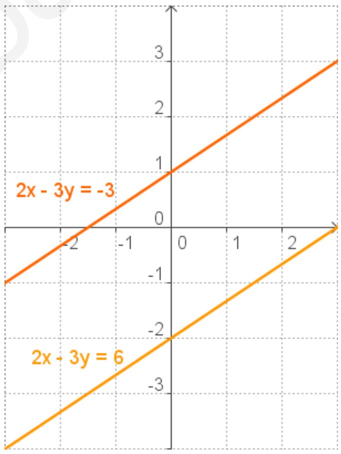


En un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada ecuación representa una recta en el plano.

Discutir un sistema es estudiar la situación de estas rectas en el plano, que pueden ser:

- Secantes, el sistema tiene solución única, se llama **Compatible Determinado**.
- Coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones, es **Compatible Indeterminado**
- Paralelas, el sistema no tiene solución, se llama **Incompatible.**





Resolver: $\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

Por **SUSTITUCIÓN**

Despejamos x en la 2ª ecuación y sustituimos en la 1ª: $x=1+2y$

$3(1+2y)+4y=-7$

$3+6y+4y=-7 \Rightarrow 10y=-10$

$y=-1$

$x=1+2\cdot(-1)=-1$

Por **IGUALACIÓN**

Despejamos x en ambas ecuaciones e igualamos: $\dfrac{-4y-7}{3} = 1+2y$

$-4y-7=3(1+2y)$

$-4y-6y=3+7 \Rightarrow -10y=10$

$y=-1$

$x=-1$

Por **REDUCCIÓN**

$3x+4y=-7$

Multiplicamos por 2 → $2x-4y=2$

Sumando: $5x \quad =-5$

Luego: $x=-1$

Y sustituyendo: $y=-1$

Para resolver un sistema de ecuaciones utilizamos cualquiera de los tres métodos siguientes:

Método de sustitución

Consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación, se llega así a una ecuación de primer grado con una sola incógnita; hallada ésta se calcula la otra.

Método de igualación

Consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar las expresiones obtenidas. De nuevo obtenemos una ecuación de primer grado con una sola incógnita.

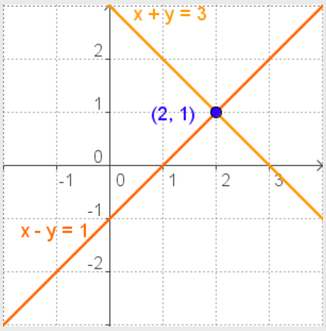
Método de reducción

Consiste en eliminar una de las incógnitas sumando las dos ecuaciones. Para ello se multiplica una de las ecuaciones o ambas por un número de modo que los coeficientes de x o de y sean iguales y de signo contrario.

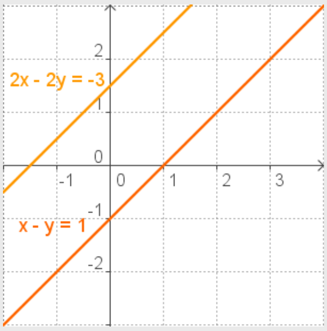
EJERCICIOS resueltos

7. Representa las rectas correspondientes y discute los siguientes sistemas:

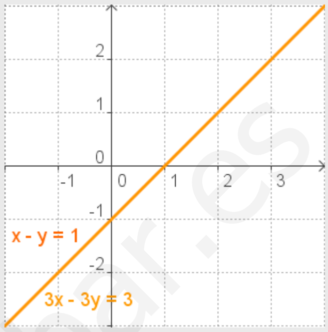
a) $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-2y=-3 \\ x-y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-3y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$



Compatible determinado



Incompatible



Compatible indeterminado

8. Resuelve por sustitución:

a) $\begin{cases} x+4y=-25 \\ -10x-5y=5 \end{cases}$

Despejamos x en la 1ª ecuación

x=-25-4y sustituimos en la 2ª

-10(-25-4y)-5y=5 $\Rightarrow$ 250+40y-5y=5

35y=-245 $\Rightarrow$ y=-7

x=-25-4·(-7)=3

b) $\begin{cases} 3x+5y=45 \\ -4x-y=-43 \end{cases}$

Despejamos y en la 2ª ecuación

y=-4x+43 sustituimos en la 1ª

3x+5(-4x+43)=45 $\Rightarrow$ 3x-20x+215=45

-17x=-170 $\Rightarrow$ x=10

y=-4·10+43=3

9. Resuelve por igualación:

a) $\begin{cases} -4x+y=20 \\ 6x-9y=0 \end{cases}$ $\quad y=20+4x$, $\quad y=6x/9$

$20+4x=\dfrac{6x}{9}$ $\Rightarrow$ 180+36x=6x

30x=-180 $\Rightarrow$ x=-6

y=-36/9=-4

b) $\begin{cases} -3x-4y=31 \\ 5x-9y=11 \end{cases}$ $\quad x=(31+4y)/-3$, $\quad x=(11+9y)/5$

$\dfrac{31+4y}{-3}=\dfrac{11+9y}{5}$ $\Rightarrow$ 5(31+4y)=-3(11+9y)

155+20y=-33-27y $\Rightarrow$ 47y=-188 $\Rightarrow$ y=-4

x=(11-36)/5=-5

10. Resuelve por reducción:

a) $\begin{cases} 5x-10y=25 \\ 8x+2y=4 \end{cases}$

5x −10y=25

Se multiplica por 5 → 40x+10y=20

Sumando: 45x =45

x=1 y=-2

b) $\begin{cases} 5x+3y=21 \\ 7x+8y=37 \end{cases}$

Se multiplica por -7 → -35x-21y=-147

Se multiplica por 5 → 35x+40y= 185

Sumando: 19y= 38

y=2 x=3

11. Resuelve:

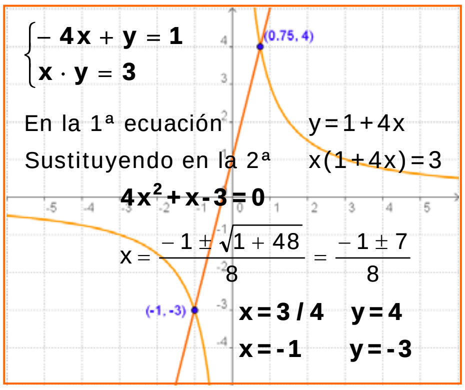
$\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{5}=\dfrac{22}{15} \\ 7x-7y=28 \end{cases}$

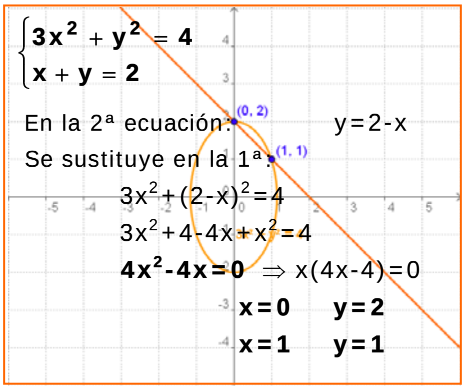
quitando denominadores y simplificando la 2ª ecuación, el sistema se convierte en uno equivalente. $\begin{cases} 5x-3y=22 \\ x-y=4 \end{cases}$

Por REDUCCIÓN:

$$\begin{array}{rcl} 5x-3y &=& 22 \\ -3x+3y &=& -12 \\ \hline 2x &=& 10 \end{array} \Rightarrow x=5 \quad y=1$$

3. Sistemas de segundo grado





Son sistemas en los que una o las dos ecuaciones no son lineales. Para resolverlos aplicamos los métodos ya conocidos para ecuaciones de 2º grado y sistemas lineales. Veamos algunos ejemplos.

- Tipo: $\begin{cases} ax + by = c_1 \\ x \cdot y = c_2 \end{cases}$

.

- Tipo: $\begin{cases} a_1x^2 + b_1y^2 = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

Para resolver sistemas de estos tipos se despeja la **x** o la **y** en una ecuación y se sustituye en la otra. Se reduce y se resuelve la ecuación que queda.

Por último se sustituyen en la ecuación despejada los valores hallados para calcular la otra incógnita

EJERCICIOS resueltos

12. Resuelve:

a) $\begin{cases} x - y = -1 \\ x \cdot y = 20 \end{cases}$

En la 1ª ecuación: x=y-1

En la 2ª ecuación: (y-1)y=20

$y^2-y-20=0$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 & x = 4 \\ -4 & x = -5 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 30 \\ x \cdot y = 24 \end{cases}$

En la 2ª ecuación: x=24/y

En la 1ª ecuación: 48/y+3y=30

$3y^2-30y+48=0 \Rightarrow y^2-10y+16=0$

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} = \begin{cases} 8 & x = 3 \\ 2 & x = 12 \end{cases}$$

13. Resuelve:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x + y = -1 \end{cases}$

En la 2ª ecuación: x=-y-1

En la 1ª ecuación: $(-y-1)^2+y^2=41$

$y^2+2y+1+y^2=41$

$2y^2+2y-40=0$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4+320}}{4} = \frac{-2 \pm 18}{4} = \begin{cases} 4 & x = -5 \\ -5 & x = 4 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 7 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$

En la 2ª ecuación: x=(-1-3y)/2

En la 1ª ecuación: $\frac{(-1-3y)^2}{4} - 2y^2 = 7$

$1+9y^2+6y-8y^2=28$ $\quad y^2+6y-27=0$

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36+108}}{2} = \frac{-6 \pm 12}{2} = \begin{cases} 3 & x = -5 \\ -9 & x = 13 \end{cases}$$

4. Resolución de problemas

Para resolver un problema mediante una ecuación o un sistema de ecuaciones, hay que traducir al lenguaje algebraico las condiciones del enunciado y después resolver la ecuación o el sistema planteado.

Para resolver problemas

1º) Comprender el enunciado.

2º) Identificar las incógnitas.

3º) Traducir al lenguaje algebraico.

4º) Resolver la ecuación o sistema.

5º) Comprobar las soluciones.

A continuación puedes ver algunos ejemplos:

✓ *En una reunión cada asistente saluda a todos los demás, si el número de saludos que se intercambian es 28, ¿cuántas personas asisten a la reunión?*

x= nº asistentes

$$\frac{x(x-1)}{2} = 28 \Rightarrow x^2-x=56$$

$$\Rightarrow x^2-x-56=0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{1+224}}{2} = \frac{1\pm 15}{2}$$

Obtenemos x=-14/2=-7 y x=16/2=8

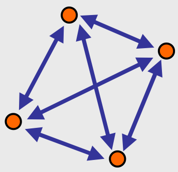
La solución negativa no es válida ya que se trata de nº de personas, luego asisten 8 personas.

Número de asistentes: **x**

Cada uno saluda a todos los demás que son: **x-1**

El saludo A → B es el mismo que el saludo B → A, luego el número total de saludos:

x·(x-1)/2



Comprobación:

8 personas, cada una saluda a las otras 7; 8·7=56 y la mitad 28.

✓ *Dos personas se encuentran teniendo cada una de ellas un capital. Dice una de ellas a la otra: "Si me das de lo que tienes 3 unidades las añado a lo que tengo y tendremos las dos igual"; a lo que la otra replica: "Si tú me das de lo que tienes 6 unidades las añado a lo que tengo y tendré el doble de lo que te queda". ¿Cuánto tiene cada una?*

A tiene **x**

B tiene **y**

$$\begin{cases} x+3=y-3 \\ 2(x-6)=y+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-6 \\ 2x-y=18 \end{cases}$$

Resolvemos por reducción:

$$\begin{array}{r} -x + y = 6 \\ \underline{2x - y = 18} \\ x \quad = 24 \end{array}$$

y=6+x=30

La persona A tiene: **x**

La persona B tiene: **y**

	B da 3 a A	A da 6 a B
A tiene x	**x+3**	**x–6**
B tiene y	**y–3**	**y+6**
	Las dos igual	B doble A

Habla A: **x+3 = y–3**

Habla B: **y+6 =2(x-6)**

Comprobación:

	B da 3 a A	A da 6 a B
A: x=24	24+3=27	24–6=18
B: y=30	30–3=27	30+6=36
	Las dos igual	B doble A

✓ *Se desea vallar una finca rectangular uno de cuyos lados linda con un río. Si el área de la finca es de 2000 m² y los tres lados a vallar miden 140 m, ¿cuáles son las dimensiones de la finca?.*

Dimensiones: **x** (ancho), **y** (largo)

$$\begin{cases} 2x+y=140 \\ x\cdot y=2000 \end{cases}$$

En la 1ª ecuación: y=140-2x

Sustituyendo en la 2ª: x·(140-2x)=2000

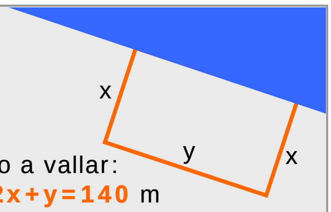
Resolvemos la ecuación: $2x^2 - 140x + 2000=0$

x=50 y=40

x=20 y=100

x: ancho

y: largo



Perímetro a vallar:

2x+y=140 m

Superficie (base×altura):

x·y=2000 m²

Comprobación:

x=50 y=40 x·y=50·40=2000

x=20 y=100 x·y=20·100=2000

Para practicar

1. Resuelve las ecuaciones:

a) $-6x^2 - 7x + 155 = -8x$

b) $3x^2 + 8x + 14 = -5x$

c) $(x-6)(x-10)=60$

d) $(x+10)(x-9)=-78$

2. Resuelve las ecuaciones:

a) $x^4 - 24x^2 + 144 = 0$

b) $x^4 + 14x^2 - 72 = 0$

c) $x^4 - 81 = 0$

d) $(x^2 - 8)(x^2 - 1) = 8$

3. Resuelve las ecuaciones:

a) $\dfrac{9}{2-x} + \dfrac{4}{2-3x} = 5$

b) $\dfrac{5+x}{2+2x} - \dfrac{2}{4-3x} = 2$

c) $3 - x - \dfrac{6x+6}{7x+5} = 1$

d) $\dfrac{3+x}{3x+1} + \dfrac{x+2}{x+1} = 5$

4. Resuelve las ecuaciones:

a) $2\sqrt{9x} - x = 9$

b) $\sqrt{3+6x} - 2 = 4x$

c) $2x - \sqrt{x-2} = 5$

5. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} - \dfrac{y}{4} = -\dfrac{3}{5} \\ 4x - 2y = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{8} = \dfrac{-3}{8} \\ 8x + 5y = 33 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{8}{3} \\ 7x + 3y = 34 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x}{9} - \dfrac{y}{2} = \dfrac{4}{9} \\ 5x - 7y = 20 \end{cases}$

6. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} x - 6y = -15 \\ x \cdot y = -9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = -18 \\ x \cdot y = 40 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = -2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ x + y = 3 \end{cases}$

7. El producto de dos números enteros es 192 y su diferencia 4. ¿Qué números son?.

8. La suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 342, ¿cuáles son?.

9. Al sumar una fracción de denominador 3 con su inversa se obtiene 109/30, ¿cuál es la fracción?.

10. El cuadrado de un nº más 6 es igual a 5 veces el propio nº, ¿qué número es?.

11. Busca un número positivo tal que 6 veces su cuarta potencia más 7 veces su cuadrado sea igual a 124.

12. La edad de Juan era hace 9 años la raíz cuadrada de la que tendrá dentro de 11. Determinar la edad actual.

13. El numerador de una fracción positiva es 4. Si añadimos 9 unidades al denominador el valor de la fracción disminuye en una unidad. ¿Cuál es el denominador original?

14. Dos grifos manando juntos tardan en llenar un depósito 2 horas, ¿cuánto tardarán por separado si uno de ellos tarda 3 horas más que el otro?

PISTA: Si un grifo tarda x horas en llenar el depósito en una hora llena 1/x del depósito.

15. Encuentra m para que $x^2-mx+121=0$ tenga una solución doble.

16. Dos números suman 400 y el mayor es igual a 4 veces el menor, ¿qué números son?.

17. Paloma pagó 272 € por 4 entradas para un concierto y 8 para el teatro, Luisa pagó 247 € por 9 entradas para el concierto y 3 para el teatro. ¿Cuánto cuesta la entrada a cada espectáculo?

18. Dos números suman 241 y su diferencia es 99. ¿Qué números son?

19. Dos números suman 400 y el mayor es igual a 4 veces el menor, ¿qué números son?.

20. Pedro tiene 335 € en billetes de 5€ y de 10€; si en total tiene 52 billetes, ¿cuántos tiene de cada clase?.

21. En un hotel hay 67 habitaciones entre dobles y sencillas. Si el número total de camas es 92, ¿cuántas habitaciones hay de cada tipo?.

22. Se desea mezclar vino de 1 €/litro con vino de 3 €/litro para obtener una mezcla de 1,2 €/litro. ¿Cuántos litros deberemos poner de cada precio para obtener 2000 litros de mezcla?.

23. En un almacén hay dos tipos de lámparas, las de tipo A que utilizan 2 bombillas y las de tipo B que utilizan 7 bombillas. Si en total en el almacén hay 25 lámparas y 160 bombillas, ¿cuántas lámparas hay de cada tipo?.

24. En un parque de atracciones subir a la noria cuesta 1 € y subir a la montaña rusa 4 €. Ana sube un total de 13 veces y gasta 16 €., ¿cuántas veces subió a cada atracción?.

25. En un corral hay ovejas y gallinas en número de 77 y si contamos las patas obtenemos 274 en total. ¿Cuántas ovejas y cuántas gallinas hay?

26. Encuentra un número de dos cifras sabiendo que la suma de éstas es 7 y la diferencia entre el número y el que resulta al intercambiarlas es 27.

PISTA: Si x es la cifra de las decenas e y la cifra de las unidades el número es 10x+y, y el que resulta al intercambiar las cifras es 10y+x

27. La suma de dos números naturales es 24 y su producto 135, ¿qué números son?.

28. Calcula las longitudes de los lados de un rectángulo sabiendo que la diagonal mide 58 cm y el lado mayor excede en 2 cm al menor.

29. La suma de dos números naturales es 13 y la de sus cuadrados 109, halla los números.

30. La diferencia entre dos números enteros es 6 y su producto 247. ¿Qué números son?.

31. La suma de las edades de dos personas es 18 años y el producto 77. ¿Qué edad tiene cada una?.

32. Calcula las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo de perímetro 48 cm, si la suma de los catetos es 28 cm.

33. El producto de las dos cifras de un número es 14 y la suma de la cifra de las unidades con el doble de la de las decenas es 16. Halla el número.

34. La suma de las áreas de dos cuadrados es 100 cm^2 y la suma de sus perímetros es 56, ¿cuánto miden los lados?.

35. En un triángulo isósceles los lados iguales miden 13 cm y la altura es 2 cm más larga que la base. Calcula el área.

"Para resolver un problema referente a números o relaciones abstractas de cantidades, no hay nada como traducir este problema del inglés u otra lengua al lenguaje del álgebra"

Newton (Aritmetica Universalis)

Para saber más

El "inventor" del álgebra

Mohamed ibn-Musa al-Jwuarizmi, que vivió aproximadamente entre los años 780-850 y trabajó en la Casa de la Sabiduría en Bagdag.

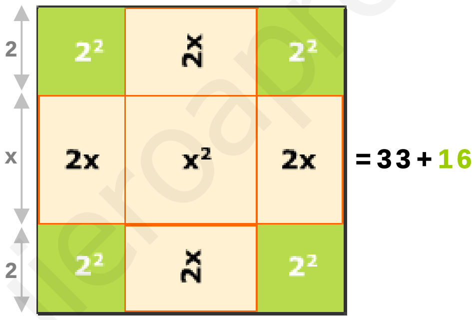
Cinco de sus obras han llegado hasta nosotros, entre ellas *"al-Mujtasar fi hisab al-jabr wa'l muqabala"*, el primer tratado de álgebra conocido.

Al-Jwarizmi clasifica las ecuaciones en seis tipos distintos y resuelve cada caso por separado utilizando métodos geométricos, como el que puedes ver en el gráfico.

Clasificación de las ecuaciones según Al-Jwarizmi

cuadrado de la cosa = cosa
$ax^2=bx$
cuadrado de la cosa = nº
$ax^2=c$
cosa = nº
$ax=b$
cuadrado de la cosa+cosa = nº
$ax^2+bx=c$
cuadrado de la cosa+nº = cosa
$ax^2+c=bx$
cuadrado de la cosa = cosa+nº
$ax^2=bx+c$

$x^2+8x=33$



$(x+4)^2=49$

$x^2+8x=33$
$x^2+4\cdot2\cdot x=33$
$x^2+2\cdot4x+16=33+16$
$(x+4)^2=49$
$x+4=7 \qquad x+4=-7$
$x=3 \qquad x=-11$

¿Por qué la x?

Los árabes llamaban a la incógnita "shay" (cosa). La primera traducción al latín fue hecha en España (Roberto de Chester, Toledo, 1145), y como la palabra árabe la cosa suena algo parecido a la x medieval la llamaron x y ahí sigue. En Italia se tradujo como "*cosa*", abreviándola como *co* y a los que resolvían ecuaciones se les llamaba *cosistas*.

Recuerda lo más importante

Ecuaciones de segundo grado

- Completas: $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$

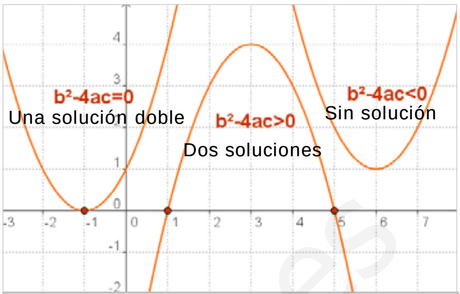
  Se resuelven con la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- Incompletas: $\mathbf{ax^2+c=0}$

  Se despeja $x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

- Incompletas: $\mathbf{ax^2+bx=0}$

  Dos soluciones: x=0, x=-b/a



Según sea el signo del discriminante:

$$\Delta = \mathbf{b^2\text{-}4ac}$$

la ecuación tendrá dos soluciones, una o ninguna solución real.

Sistemas de ecuaciones lineales

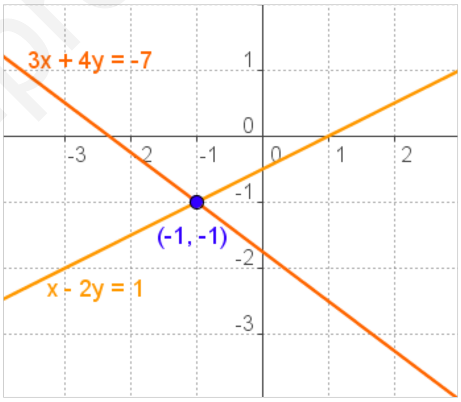
$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ En un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cada ecuación se representa con una recta en el plano. El punto de corte **(x,y)** si existe es la **solución** del sistema.

Para resolver un sistema empleamos los métodos de:

Sustitución: Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones y se sustituye en la otra.

Igualación: Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualan las expresiones obtenidas.

Reducción: Se multiplica una de las ecuaciones o las dos por los números adecuados de manera que al sumarlas se elimine una de las incógnitas.



- Sistemas **equivalentes** son los que tienen la misma solución.
- Un sistema es **compatible** si tiene solución, e **incompatible** si no la tiene.

Sistemas de ecuaciones de 2º grado

Son sistemas en los que una de las ecuaciones o las dos son de segundo grado en una de las incógnitas o en las dos.

Habitualmente se resuelven despejando una de las incógnitas en la ecuación de primer grado y sustituyendo en la otra lo que da lugar a una ecuación de 2º grado.

Para resolver problemas

- ✓ Comprender el enunciado.
- ✓ Identificar las incógnitas.
- ✓ Traducir al lenguaje algebraico.
- ✓ Resolver la ecuación o sistema.
- ✓ Comprobar las soluciones.

Autoevaluación

1. Resuelve la ecuación: $3x^2 + 15x = 0$

2. Resuelve la ecuación: $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$.

3. Resuelve la ecuación: $(x - 3)^2 = 21 - 6(8 - x)$.

4. Resuelve la ecuación: $\dfrac{x+4}{x-4} + \dfrac{x-4}{x+4} = \dfrac{10}{3}$

5. Resuelve el sistema: $\begin{cases} \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{2} = 9 \\ 6x - 2y = 164 \end{cases}$

6. Resuelve el sistema: $\begin{cases} \dfrac{4}{x} - \dfrac{x}{y} = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

7. Encuentra dos números naturales consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 1105.

8. Tenemos 13 € en monedas de 2 € y de 50 céntimos, si en total hay 14 monedas, ¿cuántas hay de cada tipo?

9. Para vallar una finca rectangular de 720 m^2 se han utilizado 112 m de cerca. Calcula las dimensiones de la finca.

10. Encuentra una ecuación de 2º grado tal que la suma de sus raíces sea 7 y el producto 12.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) x=5, x=-31/6 b) x=-2, x=-7/3
   c) x=16, x=0 d) x=21, x=1
2. a) $x=\pm\sqrt{12}$ b) x=±2
   c) x=±3 d) x=0, x=±3
3. a) x=5, x=-2 b) x=19/9, x=0
   c) x=1, x=-4/7 d) x=0, x=-9/11
4. a) x=9 b) x=-1/8, x=-1/2
   c) x=3, x=9/4 No es válida
5. a) x=7 y=8 b) x=1 y=5
   c) x=4 y=2 d) x=4 y=0
6. a) x=-3 y=3; x=-9/2 y=2
   b) x=-5 y=-8; x=-4 y=-10
   c) x=-5 y=3; x=-1 y=1
   d) x=-4 y=7; x=7 y=-4
7. 12 y 16 ó -16 y -12
8. 18 y 19
9. 3/10
10. 3 y 2
11. El denominador es 3
12. 14 años
13. 24 (La solución negativa no vale)
14. Un grifo 3 h y el otro 2 h
15. 22 y -22
16. 320 y 80
17. Teatro: 25€, concierto: 18€
18. 170 y 71
19. 80 y 320
20. 15 de 10€ y 37 de 5€
21. 25 dobles y 42 sencillas
22. 1800 litros de 1€ y 200 litros de 3€
23. 3 de tipo A y 22 de tipo B
24. 12 veces a la noria y 1 a la montaña
25. 17 gallinas y 60 ovejas
26. El nº 52
27. 9 y 15
28. 40 y 42
29. 10 y 3
30. 13, 19 y -13,-19
31. 11 y 7
32. Los catetos 12 y 16, la hipotenusa 20
33. 72
34. 1 y 8
35. altura=12, base=10; área 60

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. x=0, x=-5
2. x = ±6 , x = ±1
3. x=8 ; x=15
4. x = ±8
5. x=30 y=8
6. x=6 y=9
   x=2 y=1
7. 23 y 24
8. 4 de 2 € y 10 de 0,50€
9. 36 m x 20 m
10. $x^2 - 7x + 12=0$
    Soluciones 3 y 4

No olvides enviar las actividades al tutor

ACTIVIDADES DE ESO

Nombre y apellidos del alumno:		Curso: 4º
Quincena nº: 4	Asignatura: **Matemáticas B**	
Fecha:	Profesor de la asignatura:	

1. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 1/3 y 2/5.

2. Resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

3. Resuelve la ecuación: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

4. En un examen de 20 preguntas, cada acierto suma 2 puntos y por cada fallo te quitan medio punto. Para aprobar es necesario contestar a todas las preguntas y sacar 20 puntos. ¿Cuántas preguntas, como mínimo, hay que responder bien para aprobar?

5 Inecuaciones

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Resolver inecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita.
- Resolver sistemas de ecuaciones con una incógnita.
- Resolver de forma gráfica inecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
- Resolver de forma gráfica sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
- Plantear y resolver problemas con inecuaciones.

Antes de empezar

Para ponerte en situación

Las inecuaciones se utilizan con frecuencia para resolver problemas de mezclas. Aquí se te plantea un problema para que vayas investigando por tu cuenta. En el capítulo 4 encontrarás la solución si no has conseguido hallarla tú solo.

Un vinatero dispone en su almacén de dos tipos de vino: uno a 4€ el litro y otro a 7€ el litro. Quiere mezclarlos para llenar un tonel de 500 litros de capacidad y quiere que la mezcla no cueste más de 6€ ni menos de 5€ el litro. Averigua entre qué valores debe estar la cantidad de litros del primer tipo de vino para que el precio final esté en el intervalo deseado.

Las imágenes adjuntas te presentan dos situaciones próximas a la solución del problema. Usa la calculadora para intentar aproximar más los resultados al valor real de la solución.

1. Inecuaciones de primer grado con una incógnita

Definiciones

Una **desigualdad** es cualquier expresión en la que se utilice alguno de los siguientes símbolos:

< (menor que), > (mayor que)
≤ (menor o igual que), ≥ (mayor o igual que)

Por ejemplo:

$2<3$ (dos es menor que 3)
$7>\pi$ (siete es mayor que pi)
$x\leq 5$ (x es menor o igual que 5)

Una **inecuación** es una **desigualdad** entre expresiones algebraicas. Aquí estudiamos sólo las de primer grado.

Una **inecuación de primer grado** es una inecuación en la que sus dos miembros son polinomios de grado menor o igual a 1.

Las **soluciones** de una inecuación son todos los números reales que hacen que dicha inecuación sea cierta.

Las desigualdades pueden ser **ciertas** o **falsas**.

Por ejemplo:

$2 < 3$ es una desigualdad cierta

$2 > 3$ es una desigualdad falsa

$x < 5$ es una desigualdad que puede ser cierta para algunos valores de x, y falsa para otros.

Los números o las expresiones que aparecen a ambos lados de los símbolos de la desigualdad reciben el nombre de **miembros** de la desigualdad.

Recuerda que también se usa ese nombre en las igualdades y en las ecuaciones.

Una **inecuación** es una desigualdad cuyos miembros son expresiones algebraicas.

Por ejemplo:

$3x + 7y < 5$, $x^2 - 3x + 5 \geq 0$, $\frac{3-x}{2+x+y} < 5 - xy$

Si los dos miembros de la inecuación son polinomios hablaremos de una inecuación polinómica.

Los dos primeros ejemplos son de este tipo, en cambio el tercero no lo es.

Si ambos polinomios son de grado no superior a 1 hablamos de una inecuación de primer grado.

El primer ejemplo es de este tipo.

El segundo ejemplo tiene una **incógnita**; los otros tienen dos.

Inecuaciones equivalentes

El proceso de resolución de inecuaciones que veremos después se basa (igual que en el caso de las ecuaciones) en la transformación de la inecuación inicial en otra equivalente más sencilla.

Se dice que dos inecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de soluciones.

- ✓ Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o resta la misma cantidad, se obtiene una inecuación equivalente.

- ✓ Si se multiplican o dividen los dos miembros de una inecuación por una misma cantidad, se obtiene una inecuación equivalente con el mismo sentido de la desigualdad, si esa cantidad es positiva, y con el sentido contrario si esa cantidad es negativa.

Resolver una inecuación es encontrar todos los números reales que hacen que sea cierta. A estos números los llamaremos **soluciones** de la inecuación.

A diferencia de las ecuaciones, es frecuente que una inecuación tenga infinitas soluciones, por lo que para representar el conjunto de esas soluciones se suele utilizar la notación de intervalos que usamos en el primer capítulo de estas lecciones.

Por ejemplo, si nos dan la inecuación $2x < 6$, las soluciones se expresan de cualquiera de estas formas:

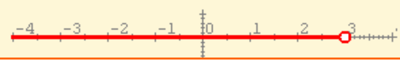
$\{x\in\mathbb{R} \; / \; x<3\}$

Conjunto de todos los números reales menores que 3, ó

$x \in (-\infty,3)$

números que pertenecen al intervalo indicado

o, en forma gráfica:



Resolución

Este proceso consiste en ir transformando la inecuación inicial en otras equivalentes más simples hasta que el resultado final sea de alguno de los siguientes tipos:

$$x<k\,,\,x\leqslant k\,,\,x>k\,,\,x\geqslant k$$

o hasta que el resultado final sea contradictorio, en cuyo caso, la inecuación no tiene soluciones.

EJEMPLO: $\mathbf{x+2\leq 1}$

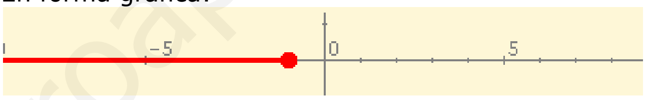
Restamos 2 a los dos miembros y queda: $\mathbf{x\leq -1}$

El conjunto de soluciones se representa de cualquiera de las siguientes maneras:

a) Como conjunto: $\{x\in \mathrm{IR}\ /\ x\leq -1\}$

b) Como intervalo: $(-\infty,-1]$

c) En forma gráfica:



$-2x - 2 \geq -3$

Sumamos 2 a los dos miembros y queda:

$-2x \geq -1$

Dividimos los dos miembros por -2 y queda:

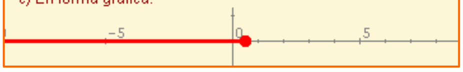
$x \leq \frac{-1}{-2} = 0{,}50$

Soluciones:

a) Como conjunto: $\{x \in \mathbb{R}\ /\ x \leq 0{,}50\}$

b) Como intervalo: $(-\infty, 0{,}50]$ (*intervalo cerrado*)

c) En forma gráfica:



$-1x + (-1) \geq -1x + (-3)$

Restamos -1 y -1 x a los dos miembros y queda:

$0 \geq -2$

Como esto siempre es cierto,

las soluciones son todos los números reales.

Soluciones:

a) Como conjunto: $\{x \in \mathbb{R}\}$

b) Como intervalo: $(-\infty, +\infty)$

Sistemas de inecuaciones

Un **sistema de inecuaciones de primer grado** es un conjunto de dos o más inecuaciones de primer grado.

Para resolver un sistema de inecuaciones con una incógnita se resuelve cada inecuación por separado. Las soluciones del sistema las forman todos los números reales que satisfagan todas y cada una de las inecuaciones del sistema.

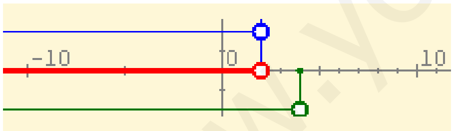
Cada inecuación del sistema debe resolverse de forma independiente hasta que quede en alguna de las formas siguientes:

$$x<k\,,\,x\leqslant k\,,\,x>k\,,\,x\geqslant k$$

En el margen puedes ver algunos ejemplos de resolución de sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita.

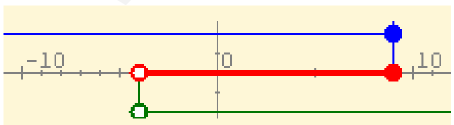
$$\begin{cases} x<2 \\ x<4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x\in(-\infty,2) \\ x\in(-\infty,4) \end{matrix}$$

Soluciones del sistema: $x\in(-\infty,2)$



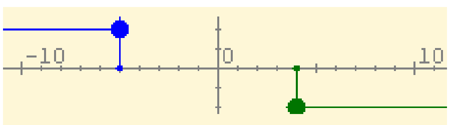
$$\begin{cases} x\leq 9 \\ x>4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x\in(-\infty,9] \\ x\in(4,+\infty) \end{matrix}$$

Soluciones del sistema: $x\in(4,9]$



$$\begin{cases} x\leq -5 \\ x\geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x\in(-\infty,-5] \\ x\in[4,+\infty) \end{matrix}$$

Soluciones del sistema: **No tiene**



EJERCICIOS resueltos

1. En cada caso indica cuál de las inecuaciones, I, II, III, IV es equivalente a la dada:

a) Dada la inecuación $-4x \le -3x - 5$, indica cuál de las siguientes inecuaciones es equivalente a ella: I) $-x \ge -5$ II) $x \le -5$ III) $x \le 5$ IV) $-x \le -5$

b) Dada la inecuación $-9x \le 6$, indica cuál de las siguientes inecuaciones es equivalente a ella: I) $x \ge -\frac{6}{9}$ II) $x \le -\frac{6}{9}$

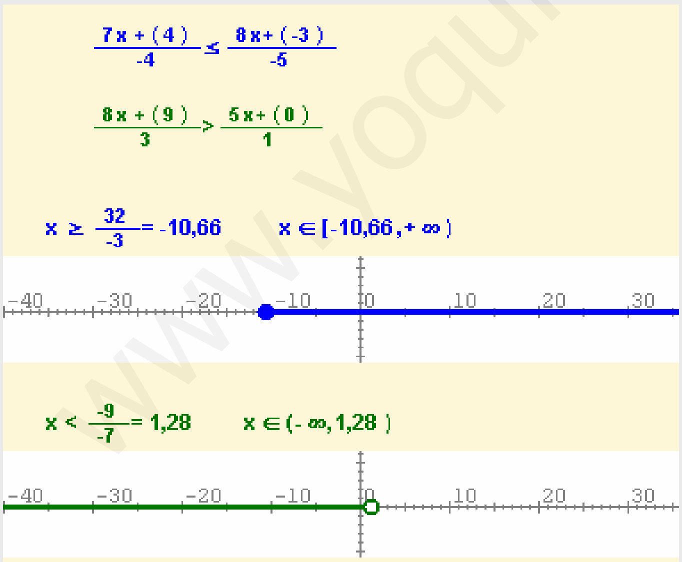
c) Dada la inecuación $\frac{-6x-5}{9} \le 5$, indica cuál de las siguientes inecuaciones es equivalente a ella: I) $x \ge -\frac{50}{6}$ II) $x \le -\frac{50}{6}$

2. Resuelve la inecuación $\frac{-6x+7}{-3} > \frac{8x-4}{2}$

$$\frac{-6x+7}{-3} > \frac{8x-4}{2} \Leftrightarrow -12x + 14 < -24x + 12 \Leftrightarrow 12x < -2 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{6}\right)$$

3. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones mostrando las soluciones en las formas indicadas en la explicación:



Las soluciones comunes son los puntos que son a la vez mayores o iguales que −10'66 y menores estrictamente que 1,28.

Por tanto las soluciones del sistema son los puntos del intervalo

[-10'66,1'28)

2. Inecuaciones de segundo grado con una incógnita.

RECUERDA:

Las soluciones de una ecuación de segundo grado

$ax^2+bx+c=0$

vienen dadas por la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

siempre que el discriminante, b^2-4ac, sea mayor o igual que cero. Y si llamamos r1 y r2 a las posibles soluciones, entonces:

$ax^2+bx+c=a(x-r1)(x-r2)$

Si el discriminante es nulo, sólo hay una solución, r, y

$ax^2+bx+c=a(x-r)^2$

Resolución por descomposición

Una **inecuación de segundo grado** es toda inecuación equivalente a una de las siguientes:

$ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c<=0$

$ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c>=0$

siendo a, b y c números reales.

Si el polinomio que caracteriza la inecuación tiene raíces reales, se puede usar su descomposición en factores para resolverla como un sistema de ecuaciones de primer grado. Se pueden dar los siguientes casos:

CASO 1: a (x-r1) (x-r2) <0

Para que el producto de tres factores sea negativo han de ser negativos uno o tres de ellos.

- Si a es positivo, sólo otro de los factores puede serlo, por lo que la inecuación es equivalente a los sistemas:

$$\left.\begin{matrix} x-r1<0 \\ x-r2>0 \end{matrix}\right\} \quad \text{ó} \quad \left.\begin{matrix} x-r1>0 \\ x-r2<0 \end{matrix}\right\}$$

- Si a es negativo, los otros dos deben ser simultáneamente positivos o negativos, por lo que la inecuación es equivalente a los sistemas

$$\left.\begin{matrix} x-r1<0 \\ x-r2<0 \end{matrix}\right\} \quad \text{ó} \quad \left.\begin{matrix} x-r1>0 \\ x-r2>0 \end{matrix}\right\}$$

CASO 2: a (x-r1) (x-r2) ≤ 0

Sólo se diferencia del caso anterior en que ahora los intervalos son cerrados.

CASO 3: a (x-r1) (x-r2) > 0

Similar al caso 1.

CASO 4: a (x-r1) (x-r2) ≥ 0

Similar al caso 2.

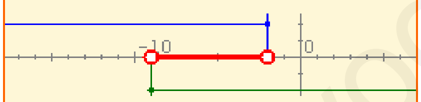
EJEMPLOS CASO 1:

4(x+2)(x+9)<0

equivale a los sistemas:

$$\begin{cases} x<-2 \\ x>-9 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x>-2 \\ x<-9 \end{cases}$$

Solución del primero: (-9 ,-2)



El segundo no tiene solución

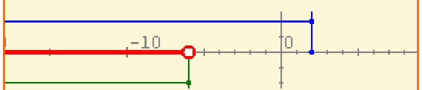
SOLUCIÓN: (-9 , -2)

-8(x-2)(x+6)<0

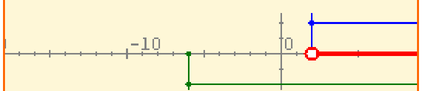
equivale a los sistemas:

$$\begin{cases} x<2 \\ x<-6 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x>2 \\ x>-6 \end{cases}$$

Solución del primero: (- ∞,-6)



Solución del segundo: (2 ,+ ∞)



SOLUCIÓN: (- ∞, -6) ∪ (2 ,+ ∞)

CASO 5: a $(x-r)^2 < 0$

Si $a>0$ nunca es cierto y no tiene soluciones. Si $a<0$ siempre es cierto y las soluciones son todos los números reales.

CASO 6: a $(x-r)^2 \leq 0$

Si $a>0$ sólo es cierto si $x=r$, luego el conjunto solución tiene un único elemento. Si $a<0$ siempre es cierto y las soluciones son todos los números reales.

CASO 7: a $(x-r)^2 > 0$

Es como el caso 5 pero con las situaciones al revés.

CASO 8: a $(x-r)^2 \geq 0$

Es como el caso 6 pero con las situaciones al revés.

El cuadrado de un nº distinto de 0 siempre es positivo, $(x-3)^2 \geq 0$.

- **$-2(x-3)^2<0$** Solución: IR
- **$2(x-3)^2 \leq 0$** Solución: $x=3$
- **$2(x-3)^2>0$** Solución: IR
- **$-2(x-3)^2>0$** No tiene solución

Resolución general

El procedimiento empleado en el apartado anterior es válido si el polinomio de segundo grado resultante tiene raíces reales. En caso contrario no nos sirve.

En este apartado veremos un procedimiento general que es válido para cualquier inecuación de segundo grado, tenga o no raíces reales.

Este procedimiento se basa en saber si la representación gráfica del polinomio (una parábola) está abierta hacia arriba o hacia abajo y si corta al eje de abscisas.

Consideremos el polinomio

$$ax^2+bx+c$$

Ya viste que su gráfica es una parábola abierta hacia arriba si a es positiva y hacia abajo si a es negativa.

El **discriminante** del polinomio es

$$\Delta=b^2-4ac$$

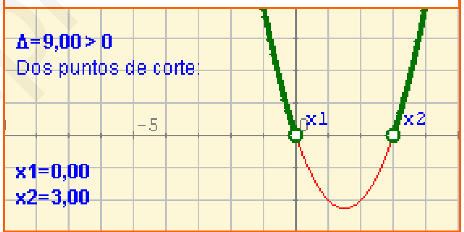
Si $\Delta>0$ la gráfica corta al eje X en dos puntos (x1 y x2 que se obtienen con la fórmula de la ecuación de segundo grado); si $\Delta=0$ la gráfica corta al eje X en un solo punto y si $\Delta<0$ la gráfica no corta al eje X.

A la izquierda puedes ver algunos ejemplos que ilustran este procedimiento de resolución gráfica.

$x^2-3x>0$

$y=x^2-3x$

a>0 la parábola está hacia abajo

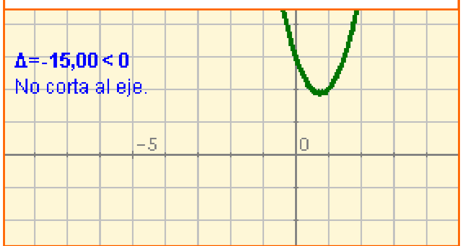


Solución: $(-\infty,0) \cup (3,+\infty)$

$2x^2-3x+3>0$

$y=2x^2-3x+3$

a>0 la parábola está hacia arriba

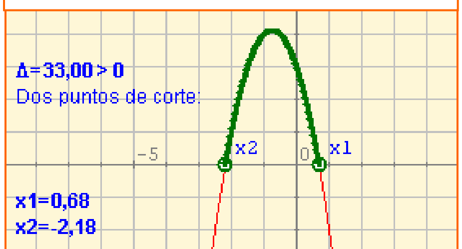


Sin solución

$-2x^2-3x+3>0$

$y=-2x^2-3x+3$

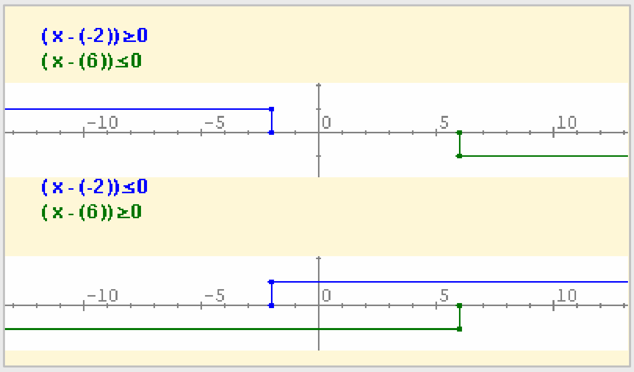
a<0 la parábola está hacia abajo



Solución: $(-2{,}18\ ,\ 0{,}68)$

EJERCICIOS resueltos

4. Resuelve la inecuación siguiente por descomposición: $2x^2-8x-24 \leq 0$



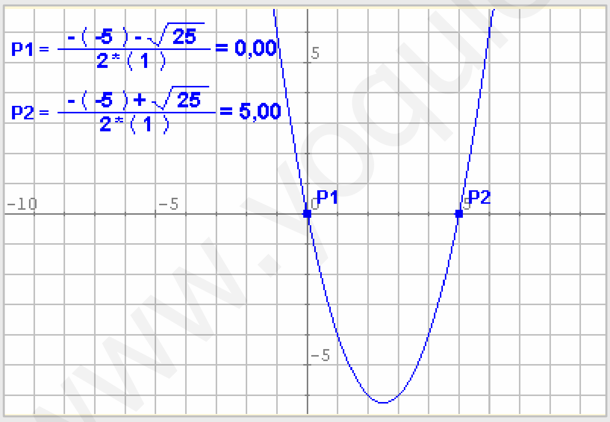
Hallamos las raíces del polinomio:

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64+192}}{4} = \begin{array}{l} 6 \\ -2 \end{array}$$

Descomponemos la inecuación en factores: $2(x-6)(x+2) \leq 0$.

La inecuación es equivalente a los dos sistemas de la izquierda. El primero no tiene soluciones y las soluciones del segundo y de nuestra inecuación son los puntos del intervalo cerrado **[-2,6]**

5. Resuelve la inecuación siguiente en forma gráfica: $x^2-5x>0$



Hallamos las raíces del polinomio:

$$x\,(x-5) = 0$$

Se trata de una parábola abierta hacia arriba (coeficiente principal 1>0) que corta al eje de abscisas en los puntos x=0 y x=5. luego la solución de la inecuación es

$$(-\infty,0) \cup (5,+\infty)$$

3. Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Definiciones

Una **inecuación de primer grado con dos incógnitas** es cualquier inecuación equivalente a alguna de éstas:

$ax+by+c<0$	$ax+by+c \leq 0$
$ax+by+c>0$	$ax+by+c \geq 0$

En este caso, las soluciones no son conjuntos de números, sino conjuntos de parejas de números, por lo que no pueden representarse sobre una línea recta: deben representarse como subconjuntos del plano.

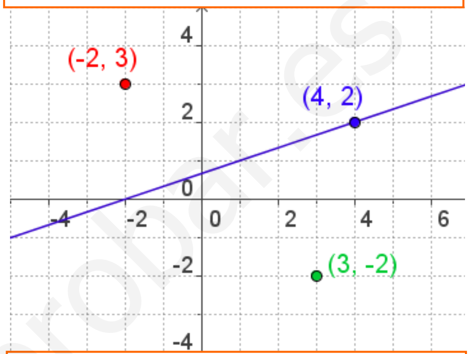
RECUERDA:

$$ax+by+c = 0$$

es la **ecuación general de una recta** en el plano.

Usaremos este hecho para resolver las inecuaciones de primer grado con dos variables.

La recta **x-3y+2=0** divide al plano en dos semiplanos.
Averigua en qué zonas del plano, los valores que se obtienen al sustituir las coordenadas de un punto cualquiera en la ecuación de la recta, son positivos negativos o nulos.



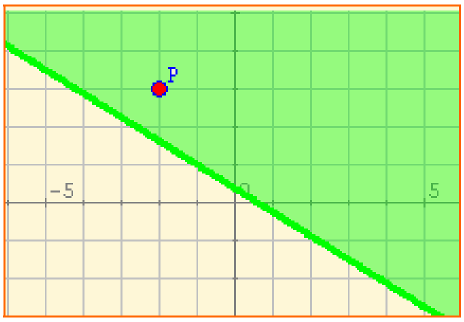
A(4,2) $4-3\cdot 2+2=0$
el punto está en la recta
B(-2,3) $-2-3\cdot 3+2=-7<0$
C(2,-3) $2-3\cdot(-3)+2=13>0$

Resolución gráfica

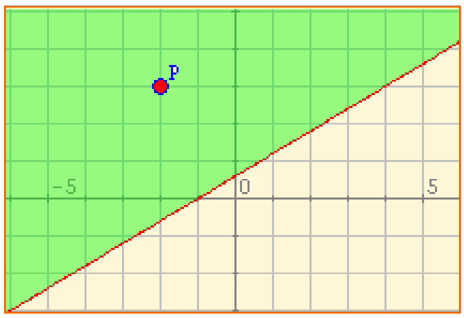
Una solución de una inecuación de dos variables es una pareja de números (x_0,y_0), tales que al sustituir sus valores en las incógnitas de la inecuación, hacen que la desigualdad sea cierta. Cada pareja de números reales se puede representar como un punto del plano.

Por tanto, **resolver la inecuación equivale a obtener todos los puntos del plano cuyas coordenadas hacen que se verifique la desigualdad**.

Para ello se procede de la siguiente forma: se dibuja la recta, se elige un punto que no pertenezca a la misma y se comprueba si las coordenadas del punto cumplen la desigualdad o no, si la cumplen la zona en la que está el punto elegido es la solución de la inecuación, si no la cumplen la solución es la otra zona.



$-5x-8y+3\leq 0$ P(-2,3)
$5\cdot(-2)-8\cdot 3+3=-11<0$
La zona verde es la solución, incluida la recta puesto que la desigualdad es ≤



$3x-5y+3<0$ P(-2,3)
$3\cdot(-2)-5\cdot 3+3=-18<0$
La zona verde es la solución.

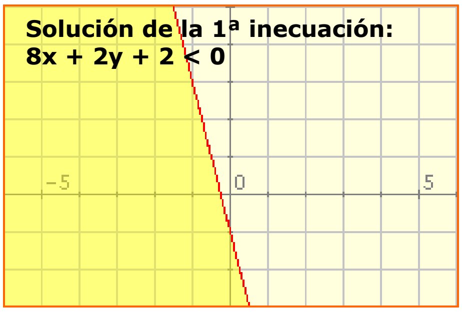
Sistemas de inecuaciones

Un **sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas** es un conjunto formado por dos o más inecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

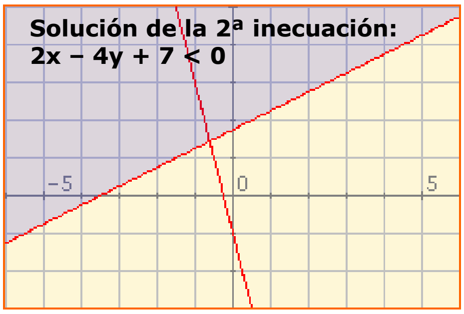
Como en el caso de los sistemas con una incógnita se resuelve cada inecuación por separado, y el conjunto de todas las soluciones comunes a todas las inecuaciones del sistema es el conjunto solución del mismo.

Fíjate en los ejemplos desarrollados y observa que pueden darse situaciones sin solución.

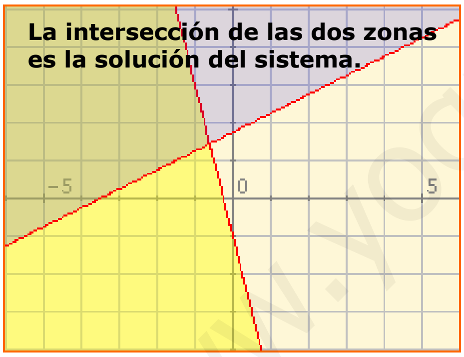
$$8x + 2y + 2 < 0$$
$$2x - 4y + 7 < 0$$



Solución de la 1ª inecuación: $8x + 2y + 2 < 0$



Solución de la 2ª inecuación: $2x - 4y + 7 < 0$

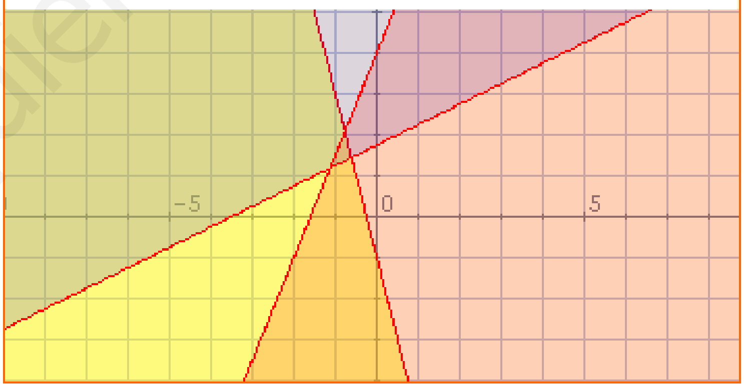


La intersección de las dos zonas es la solución del sistema.

Añadiendo una tercera inecuación:

$$8x + 2y + 2 < 0$$
$$2x - 4y + 7 < 0$$
$$5x - 2y + 8 < 0$$

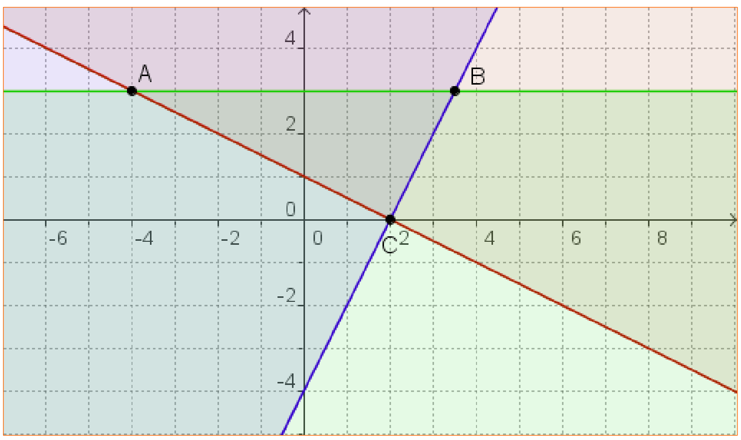
La solución es el triángulo común a las tres zonas



OTRO EJEMPLO

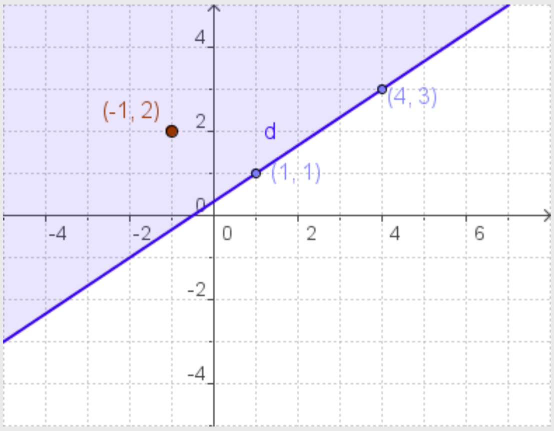
$$x + 2y - 2 \geq 0$$
$$2x - y - 4 \leq 0$$
$$y - 3 \leq 0$$

La solución es el triángulo de vértices ABC, común a las tres zonas



EJERCICIOS resueltos

6. Averigua si el punto P(-1,-2) es una solución de la inecuación $-2x + 3y \leq 1$ y dibuja el semiplano solución, indicando si incluye o no a la recta $-2x + 3y = 1$



Podemos dibujar la recta dando dos valores a x y obteniendo los correspondientes valores de y.

x=1 y=1 x=-2 y=-1

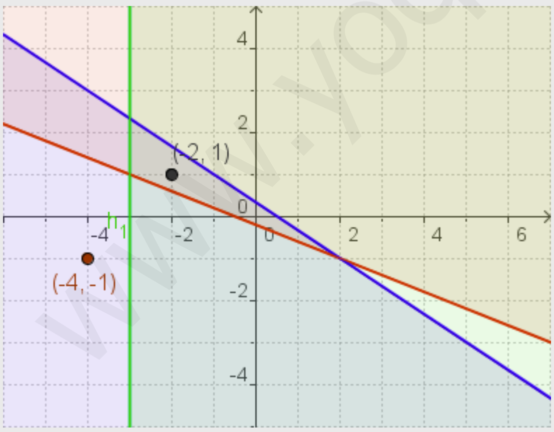
A continuación sustituimos las coordenadas de P en el polinomio y vemos que la desigualdad es cierta.

Por tanto la solución es el semiplano donde está P, incluyendo la recta, porque el símbolo de desigualdad es menor o igual.

7. Averigua si el punto P(-4,-1) es una solución del sistema de inecuaciones:

$$-2x-5y-1<0$$
$$2x+3y-1<0$$
$$-x-3<0$$

Dibuja el conjunto de soluciones y si P no pertenece a este conjunto encuentra algún punto que lo haga.



Observa en el dibujo los valores que se obtienen al sustituir las coordenadas de P en los tres polinomios. Los valores obtenidos cumplen las dos últimas inecuaciones pero no la primera, por lo tanto P no es una solución del sistema.

Las soluciones son los puntos que estén por encima de la recta roja (1ª), por debajo de la recta azul (2ª) y a la derecha de la recta verde (3ª). Es decir, todos los puntos del interior del triángulo que determinan las tres rectas.

Una posible solución es Q (-2,1)

4. Problemas con inecuaciones.

Planteamiento y resolución

Para resolver un problema con inecuaciones debemos seguir los siguientes pasos:

1. **Asignación de variables**: poner nombre a los términos desconocidos.
2. **Planteamiento**: establecer relaciones entre los datos conocidos y los desconocidos, planteando una o varias inecuaciones (de primero o de segundo grado, con una o con varias incógnitas).
3. **Resolución**: de entre los métodos explicados aplicar el que se ajuste a nuestro planteamiento.

Un vinatero dispone en su almacén de dos tipos de vino: uno a 4€ el litro y otro a 7€ el litro. Quiere mezclarlos para llenar un tonel de 500 litros de capacidad y quiere que la mezcla no cueste más de 6€ ni menos de 5€ el litro. Averigua entre qué valores debe estar la cantidad de litros del primer tipo de vino para que el precio final esté en el intervalo deseado.

ASIGNACIÓN DE VARIABLES:
x=nº de litros del primer tipo
500-x=nº de litros del segundo tipo

PLANTEAMIENTO:
$4x+7(500-x)>5\cdot 500$
$4x+7(500-x)<6\cdot 500$

RESOLUCIÓN:
$4x+3500-7x>2500 \rightarrow -3x>-1000$
$\rightarrow x<\frac{1000}{3}=333{,}3...$
$4x+3500-7x<3000 \rightarrow -3x<-500$
$\rightarrow x>\frac{500}{3}=166{,}6...$

SOLUCIÓN:
x puede tomar cualquier valor entre 167 y 333 litros.

EJERCICIOS resueltos

Problema 1

Un fabricante de piensos quiere obtener una tonelada de un determinado pienso, para venderlo a 0'21€/kg. Para obtenerlo va a mezclar dos tipos de pienso de los que ya dispone y que cuestan a 0'24€/kg y 0'16€/kg respectivamente.

1) Calcula la cantidad que debe entrar al menos en la mezcla del pienso más barato para no perder dinero.
2) ¿Cuáles deben ser las cantidades de cada tipo en la mezcla si quiere ganar al menos 0'03€/kg?

Asignación de variables: x=nº kg del tipo barato 1000-x: nº de kg del tipo caro

Planteamiento: Coste de la mezcla: $0{,}16x+0{,}24(1000-x)$
Para no perder dinero debe cumplir: $0{,}16x+0{,}24(1000-x)\leq 0{,}21\cdot 1000$
Para ganar al menos 0,03€/kg dede ser: $0{,}16x+0{,}24(1000-x)\leq 0{,}18\cdot 1000$

Resolución: a) $-0{,}08x\leq -30 \rightarrow x\geq 30/0{,}08 \rightarrow x\geq 375$ kg
b) $-0{,}08x\leq -60 \rightarrow x\geq 60/0{,}08 \rightarrow x\geq 750$ kg

Problema 2

Una biblioteca tiene un presupuesto de 600€ para adquirir ejemplares de dos nuevas novelas que se han editado. Cada ejemplar de la primera cuesta 25€ y cada ejemplar de la segunda 30€. ¿Cuántos ejemplares de cada una puede adquirir? Representa el problema en forma de un sistema de inecuaciones, represéntalo gráficamente e indica varias posibles soluciones.

x=nº ejemplares de la 1ª y: nº de ejemplares de la 2ª

Planteamiento: $25x+30y\leq 600$ $x>0$ $y>0$

Solución: Cualquier punto de la zona sombreada con valores enteros es solución del problema. Si el punto está en la recta se ajusta del todo al presupuesto. Por ejemplo x=10, y=10 ó x=6, y=15.

Para practicar

1. Inecuaciones con valor absoluto.
Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $|x+6| < 1$

b) $|-x-4| \leq 4$

c) $|-2x-1| > 3$

d) $|2x-4| \geq 5$

2. Inecuaciones de segundo grado.
Resuelve las inecuaciones:

a) $2x^2 - x + 2 \leq 0$

b) $-2x^2 + 6x + 1 \leq 0$

c) $-x^2 + 7x - 9 \geq 0$

d) $(x - 8)(x - 1) < 0$

3. Inecuaciones racionales.

Resuelve las inecuaciones:

a) $\dfrac{x+4}{1-x} < 0$

b) $\dfrac{2x+4}{3+x} > 0$

c) $\dfrac{3x-5}{2x+1} \leq 0$

d) $\dfrac{x+4}{1-x} \geq 0$

4. Inecuaciones con dos incógnitas.
Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} -3x < 1 \\ -4x - 3y > 4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x - y < 2 \\ -5x + 4y > 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} -4x - y < 4 \\ -5x - 4y > 4 \end{array}\right\}$

EXPLICACIÓN Y EJEMPLO

En el primer tema vimos que el valor absoluto de la diferencia entre dos números reales, $|x-y|$, equivale a calcular la distancia entre los puntos que representan a dichos números.

Es frecuente encontrar problemas en los que es necesario calcular todos los puntos cuya distancia a un punto fijo sea mayor o menor que cierto valor prefijado. En estos casos el problema equivale a resolver alguna de estas inecuaciones:

$$|x-a|<b,\ |x-a|\leq b,\ |x-a|>b,\ |x-a|\geq b$$

Que la distancia entre x y a sea menor que b significa que x se encuentra *dentro* del intervalo (a-b,a+b), por tanto, x > a-b y, al mismo tiempo, x < a+b, por lo que la inecuación

$|x-a|<b$ es equivalente al sistema $\left\{\begin{array}{l} x-a > -b \\ x-a < b \end{array}\right\}$ y

$|x-a|\leq b$ es equivalente al sistema $\left\{\begin{array}{l} x-a \geq -b \\ x-a \leq b \end{array}\right\}$

Que la distancia entre x y a sea mayor que b significa que x se encuentra *fuera* del intervalo (a-b,a+b), por tanto, x < a-b ó x > a+b, por lo que las soluciones de la inecuación

$$|x-a|>b$$

son todas las soluciones de $x-a<-b$ y todas las de $x-a>b$;
y las soluciones de

$$|x-a|\leq b$$

son todas las soluciones de $x-a\leq -b$ y todas las de $x-a\geq b$.

Observa que en estos casos no se trata de un sistema de inecuaciones sino de todas las soluciones de las dos.

EXPLICACIÓN:

Llamamos **inecuaciones racionales** a las inecuaciones equivalentes a las del tipo:

$$\frac{ax+b}{cx+d}<0 \quad ó \quad \frac{ax+b}{cx+d}\leq 0$$

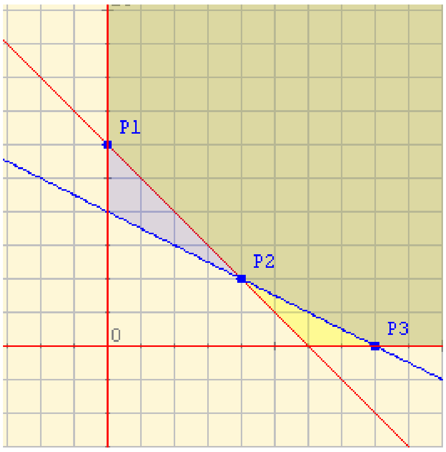
La dificultad de estas inecuaciones estriba en que no sabemos si cx+d es positivo o negativo, por lo que no podemos quitar el denominador sin más. Por ello, para resolver este tipo de inecuaciones debemos transformarlas previamente en dos sistemas de inecuaciones, teniendo en cuenta que, para que el cociente sea negativo, si el denominador es negativo el numerador debe ser positivo y viceversa:

Así la inecuación $\frac{ax+b}{cx+d}<0$ es equivalente a la pareja de sistemas:

$$\left\{\begin{array}{l} ax+b>0 \\ cx+d<0 \end{array}\right\} \quad ó \quad \left\{\begin{array}{l} ax+b<0 \\ cx+d>0 \end{array}\right\}$$

que se resuelven por los procedimientos conocidos y las soluciones de la inecuación inicial son la unión de las soluciones de ambos sistemas.

Para saber más



¿Para qué sirven las inecuaciones?

Una de las principales utilidades de las inecuaciones es su aplicación a los **problemas de decisión**: se trata de programar una situación con el objetivo de decidirse por una alternativa que sea **óptima**. En general, el proceso de **optimizar** consiste en lograr un resultado **máximo** o **mínimo** según convenga al problema planteado. Mira el ejemplo adjunto.

PROGRAMACIÓN DE UNA DIETA PARA CEBAR ANIMALES

Se intenta programar una dieta con dos alimentos A y B.

Una unidad del alimento A contiene 500 calorías; una unidad de B contiene 500 calorías y 20 gramos de proteínas. La dieta requiere como mínimo 3000 calorías y 80 gramos de proteínas diarias. Si el precio de una unidad de A es 8 y de una unidad B es 12. ¿qué cantidad de unidades de A y de B se debe comprar para satisfacer las exigencias de la dieta a un costo mínimo?.

El esquema siguiente muestra las cantidades respectivas en forma ordenada.

	A	B	mínimo
Calorías	500	500	3000
Proteínas	10	20	80
Precio	8	12	**?**

Sean: **x** el número de unidades del alimento A. **y** el número de unidades del alimento B. De acuerdo a esto, la inecuación $500x + 500y >= 3000$ representa la restricción o condición relativa a las calorías. Igualmente, $10x + 20y >= 80$ corresponde a la restricción referida a la cantidad de proteínas. Además, se debe cumplir que $x >= 0$ e $y >= 0$, ya que en ningún caso la cantidad de alimentos A o B puede ser negativa.

La región en color verde es la intersección de los conjuntos solución de las inecuaciones planteadas y se llama **región de soluciones factibles**, ya que las coordenadas de cualquiera de sus puntos satisfacen las restricciones impuestas.

Pero no se ha considerado aún el precio posible de los alimentos. Si x e y son las cantidades de los alimentos A y B, respectivamente, y los precios son 8 y 12, entonces la **función costo** es: $\mathbf{F = 8x + 12y}$. Se puede probar que esta función se optimiza, en este caso tomando un valor mínimo, para aquellos valores de x e y que corresponden a un vértice en el gráfico.

Vértices	**Valor de la función costo**
(0,6) $x = 0$; $y = 6$	$F = 8 \times 0 + 12 \times 6 = 72$
(4,2) $x = 4$; $y = 2$	$F = 8 \times 4 + 12 \times 2 = 32 + 24 = 56$
(8,0) $x = 8$; $y = 0$	$F = 8 \times 8 + 12 \times 0 = 64$

De los tres valores de la función costo F, el mínimo es 56. Corresponde a $x = 4$ e $y = 2$, es decir, a 4 unidades de A y 2 unidades de B.

Tales cantidades de A y B proporcionan un total de calorías y proteínas de acuerdo a las exigencias planteadas.
4 unidades de A : $4 \times 500 = 2000$ calorías 2 unidades de B : $2 \times 500 = 1000$ calorías Total = 3000 calorías
4 unidades de A : $4 \times 10 = 40$ gramos de proteínas 2 unidades de B : $2 \times 20 = 40$ gramos de proteínas
Total = 80 gramos de proteínas

El costo mínimo para lograr esto es 56.
Con esta cantidad ,se puede adquirir 4 unidades del alimento A y 2 del B.

Recuerda lo más importante

Inecuaciones equivalentes

Si a los dos miembros de una inecuación se les suma la misma cantidad se obtiene una inecuación equivalente:

x < y <===> x+a < y+a

Si a los dos miembros de una inecuación se les multiplica por la misma cantidad, no nula, se obtiene una inecuación equivalente (**pero ojo con el signo**):

a>0 ==> (x < y <===> ax < ay)

a<0 ==> (x < y <===> ax > ay)

Inecuaciones con una incógnita

Sus soluciones se expresan en forma de intervalos, abiertos si las desigualdades son estrictas (<, >), cerrados en caso contrario (<=, =>).

Inecuaciones de dos incógnitas

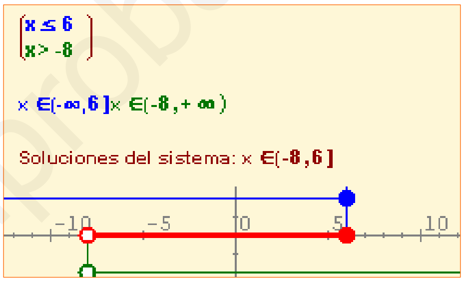
Sus soluciones son semiplanos y se resuelven en forma gráfica.

Inecuaciones de segundo grado.

Pueden resolverse como un sistema o en forma gráfica, averiguando si la parábola que la representa corta al eje X y si se abre hacia arriba o hacia abajo.

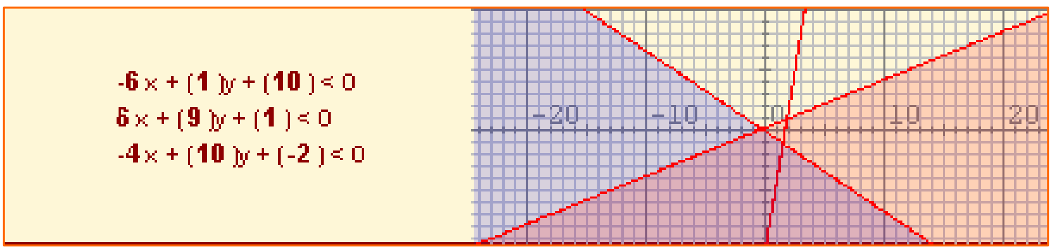
Sistemas con una incógnita

Cada inecuación se resuelve de forma independiente. Las soluciones del sistema son las comunes a todas ellas. Se expresan como intervalos o como unión de intervalos.



Sistemas con dos incógnitas

Cada inecuación se resuelve de forma independiente. Las soluciones del sistema son las comunes a todas ellas. Se resuelven de forma gráfica.



Autoevaluación

1. Resuelve la inecuación: $\frac{-2x-4}{3} < 0$

2. Un móvil se desplaza en línea recta a una velocidad que varía entre 69 m/s y 84 m/s ¿Entre qué distancias desde el punto de partida se encuentra el móvil al cabo de diez horas?

3. Resuelve el sistema $\left.\begin{array}{l} x < 5 \\ x \geq 2 \end{array}\right\}$.

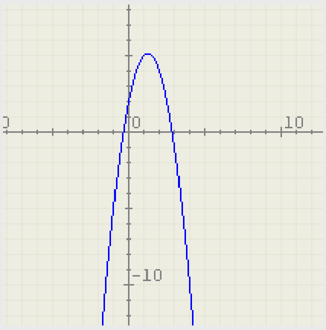
4. Resuelve el sistema $\left.\begin{array}{l} x > 5 \\ x \geq 2 \end{array}\right\}$.

5. Resuelve la inecuación $-2x^2 - 16x - 32 \geq 0$

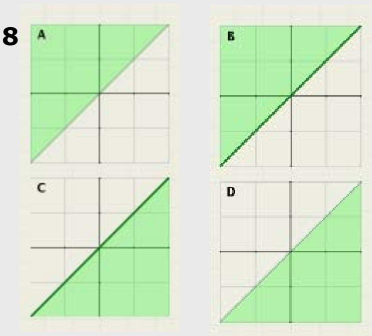
6. Resuelve la inecuación $-2x^2 + 14x - 20 \geq 0$

7. La imagen adjunta es la gráfica del polinomio de segundo grado de la inecuación $-2x^2 + 5x + 2 < 0$. Indica cuál es el conjunto solución de la misma.

a) No tiene soluciones
b) Todos los números reales
c) Un intevalo finito
d) La unión de dos intervalos infinitos

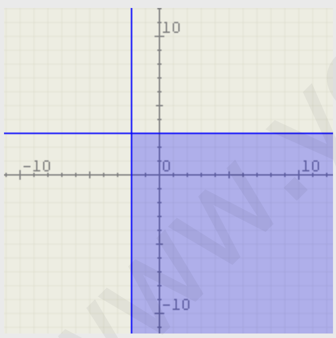
7


8. Indica cuál de las siguientes imágenes representa el conjunto solución de la inecuación $x < y$

8


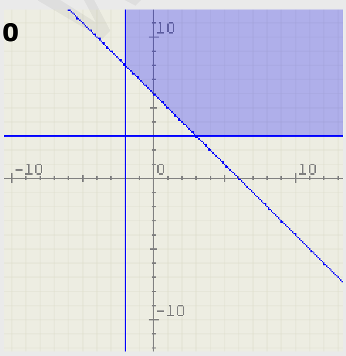
9. Indica cuál de los siguientes sistemas de inecuaciones con dos incógnitas tiene como conjunto solución esta imagen:

a) x<-2 y<3
b) x<-2 y>3
c) x>-2 y<3
d) x>-2 y>3

9


10. Indica cuál de los siguientes sistemas de inecuaciones con dos incógnitas tiene como conjunto solución esta imagen:

a) x>-2 y>3 x+y>6
b) x<-2 y>3 x+y<6
c) x>-2 y<3 x+y<6
d) x>-2 y>3 x+y<6

10


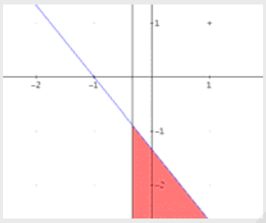
Soluciones de los ejercicios para practicar

1) Inecuaciones valor absoluto:
   a. (-7,-5)
   b. [-8,0]
   c. (-∞,-1)U(1,+ ∞)
   d. (-∞,-1/2]U[9/2,+ ∞)

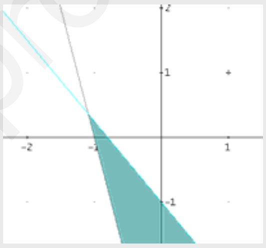
2) Inecuaciones 2º grado:
   a. No tiene soluciones
   b. (-∞,-0'16]U[3'16,+ ∞)
   c. [1'7,5'3]
   d. (1,8)

3) Inecuaciones Racionales
   a. (-∞,-4)U(1,+ ∞)
   b. (-∞,-3)U(-2,+∞)
   c. (-1/2,5/3]
   d. [-4,1)

4) Inecuaciones con 2 incógnitas

a. 

b. 

c. 

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. (-2,+ ∞)
2. Entre 2484 y 3024 km
3. [2,5)
4. (5,+ ∞)
5. {-4}
6. (-∞ ,2) U (5,+ ∞)
7. Respuesta D
8. Respuesta A
9. Respuesta C
10. Respuesta A

No olvides enviar las actividades al tutor ►

Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia

ACTIVIDADES DE ESO

Nombre y apellidos del alumno:		Curso: 4º
Quincena nº: 5	Asignatura: Matemáticas B	
Fecha:	Profesor de la asignatura:	

1. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $|2x+7|<10$

b) $|2x+7|\geq 10$

2. Resuelve la inecuación: $x^2-3x+2 \leq 0$

3. Resuelve la inecuación: $\dfrac{3x-5}{2} \leq \dfrac{x+1}{-3}$

4. Da tres soluciones del sistema de inecuaciones: $\begin{cases} 2x+y<1 \\ x-y>0 \end{cases}$

cidead@mec.es

http://cidead.cnice.mec.es

C/ TORRELAGUNA, 58
28027 MADRID
TEL: 91 3778300
FAX: 91 3778314

6

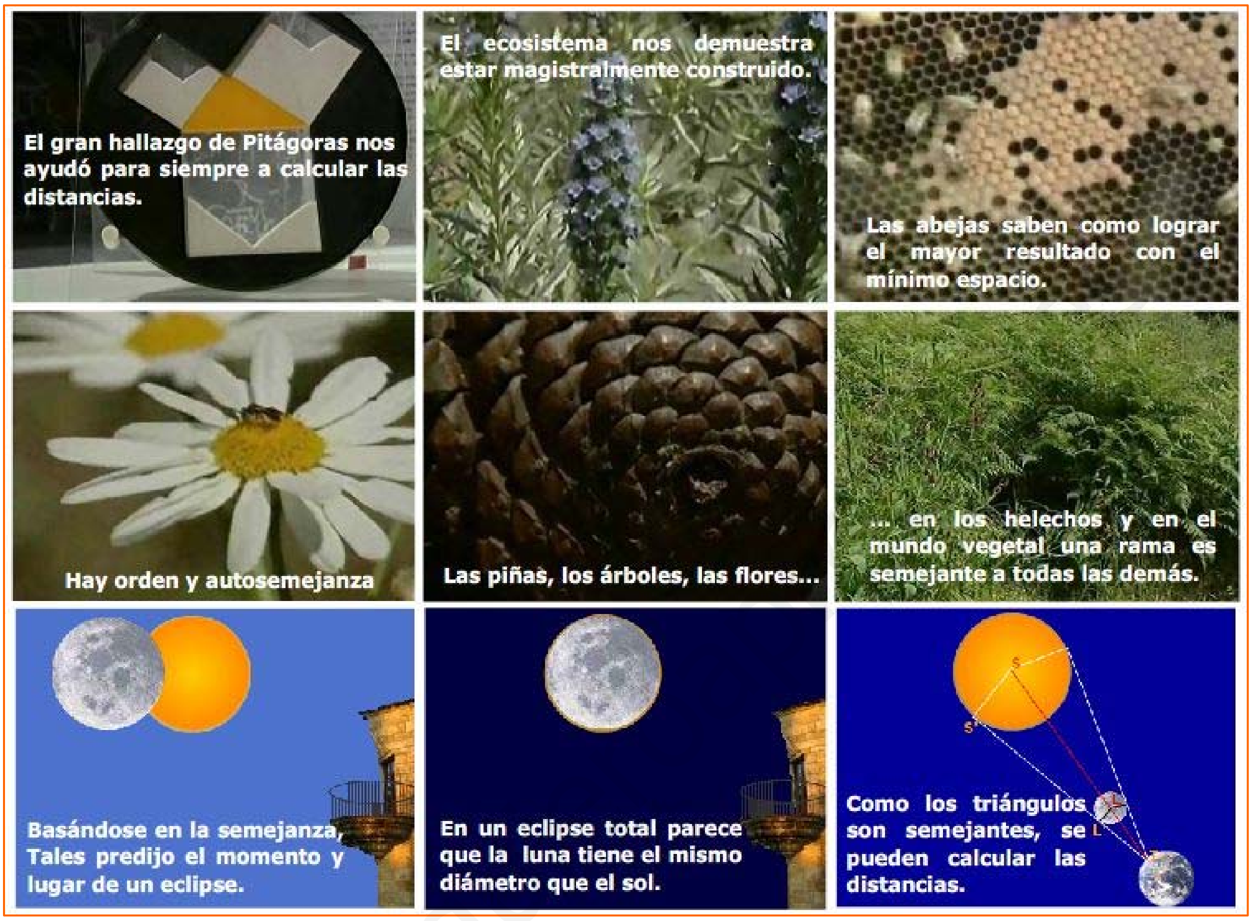
Semejanza

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Reconocer y dibujar figuras semejantes.
- Aplicar los criterios de semejanza de triángulos.
- Demostrar y utilizar los teoremas del cateto y de la altura.
- Aplicar el teorema de Pitágoras generalizado.
- Calcular áreas y volúmenes de una figura a partir de otra semejante a ella.
- Calcular distancias en planos y mapas.
- Utilizar el teorema de Tales y la semejanza para resolver problemas de medidas.

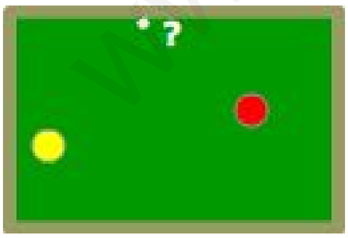
Antes de empezar



Investiga jugando

¿Cómo hacer carambola a una banda?

Si has jugado al billar, sabrás que hacer carambola a una banda significa que la bola lanzada debe dar una vez en el marco de la mesa antes de hacer carambola. Basta aplicar la semejanza para conseguirlo, ¿Cómo?



¿Hacia donde debemos dirigir la bola amarilla para que después de rebotar en la banda vaya a la bola roja?

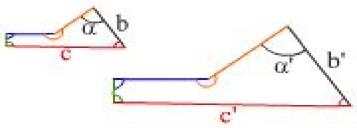
Recuerda

Antes de seguir adelante te conviene comprobar que recuerdas algo la proporcionalidad directa y algunas propiedades básicas de los triángulos.

1. Figuras semejantes

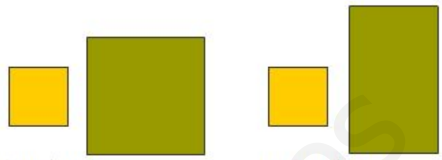
Las figuras semejantes son las que mediante el zoom (homotecias) y movimientos (giros, traslaciones y simetrías) pueden coincidir.

Un polígono está determinado por sus lados y ángulos, por tanto para que dos polígonos sean semejantes basta con que los **lados homólogos sean proporcionales** (con el zoom se multiplican todos los lados por el mismo número) **y sus ángulos iguales** (las homotecias, los giros, las traslaciones y simetrías no modifican los ángulos de las figuras).



Los ángulos iguales
$\alpha = \alpha'$ ...
Los lados proporcionales
$b'/b = c'/c$ ...

Semejantes, con un giro, una homotecia, una simetría y una traslación pueden coincidir



Semejantes, ángulos iguales y lados proporcionales

No Semejantes, ángulos iguales pero lados no proporcionales

No semejantes, lados iguales, proporcionales pero ángulos distintos

Teorema de Tales

Para que dos polígonos sean semejantes se han de cumplir dos condiciones

1. Ángulos iguales
2. Lados proporcionales

Pero en los triángulos basta con que se de una condición.

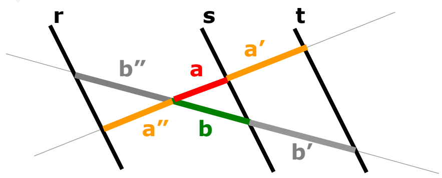
El Teorema de Tales, demuestra que en **triángulos**

Ángulos iguales $\Rightarrow$ Lados proporcionales

El teorema afirma que si dos rectas se cortan por paralelas, los segmentos que estas paralelas definen en las rectas guardan la misma proporción.

También se cumple el recíproco del Teorema de Tales,

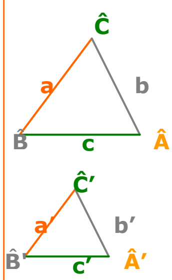
Segmentos proporcionales $\Rightarrow$ paralelas.



r, s y t paralelas $\Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'} = \dfrac{a''}{b''}$

Triángulos semejantes. Criterios

Dos triángulos son semejantes si cumplen alguno de los criterios de la derecha, llamados criterios de semejanza

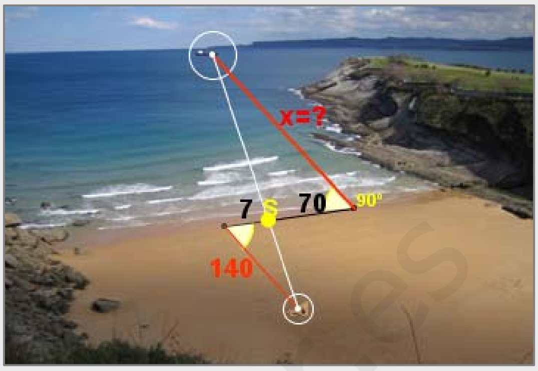


1. Ángulos iguales (con dos basta)
   $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$
2. Un ángulo igual y los lados que lo forman proporcionales
   $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$
3. Lados proporcionales
   $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

EJERCICIOS resueltos

1. Para calcular la distancia desde la playa a un barco se han tomado las medidas de la figura. Calcula la distancia al barco.

$$\frac{x}{140} = \frac{70}{7} \Rightarrow x = \frac{70 \cdot 140}{7} = 1400\,\text{m}$$



2. Aplica el Teorema de Tales para calcular las medidas de x, y, z.

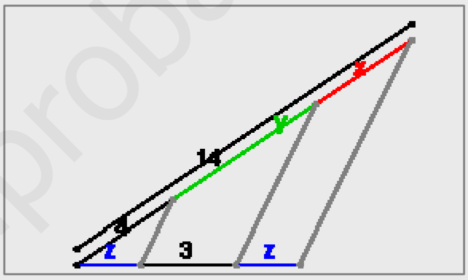
Calculamos x: $\frac{x}{z} = \frac{4}{z} \Rightarrow x = 4$

Hallamos y: $4 + y + x = 14$

Como $x = 4$ resulta $y = 6$

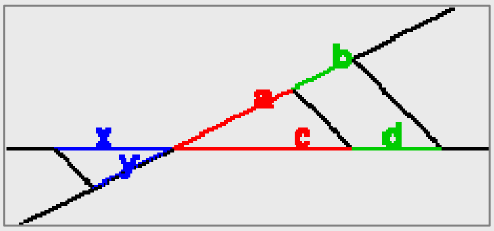
Y aplicando de nuevo el Teorema de Tales:

$$\frac{z}{4} = \frac{3}{y} \Rightarrow z = 2$$

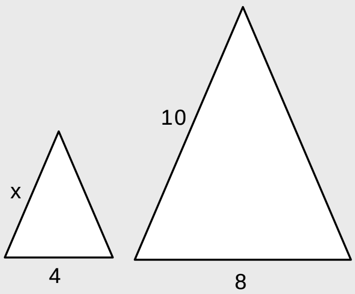


3. Observa las proporciones que se deducen del T. de Tales en la siguiente figura:

Ciertas	No tienen por qué ser ciertas
$y \cdot c = x \cdot a$	$y \cdot a = x \cdot c$
$\frac{a-y}{c-x} = \frac{b}{d}$	$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{d}$
$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$	$a = \frac{b}{d}$
$\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$	$\frac{b}{d} = \frac{c}{a}$
$\frac{b}{d} = \frac{y}{x}$	$\frac{b}{d} = \frac{x}{y}$



4. Los triángulos de la figura son semejantes, halla la medida del lado x

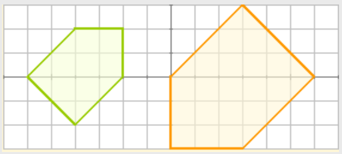


$$\frac{x}{4} = \frac{10}{8} \Rightarrow x = 5$$

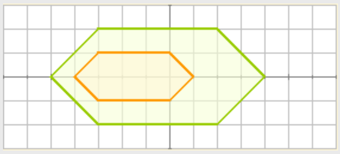
EJERCICIOS resueltos (continuación)

5. Contesta razonadamente:

a) ¿Son semejantes?



Sí, puesto que los lados están en proporción 2/3 y los ángulos son iguales.



No, los ángulos son iguales pero los lados no son proporcionales.

No, los ángulos no son iguales.

b) Un triángulo con un ángulo de 30º y otro de 40º ¿es forzosamente semejante a un triángulo con un ángulo de 30º y otro de 110º?

Sí, pues como los ángulos de un triángulo suman 180º, se concluye que los ángulos de los dos triángulos son iguales y por el criterio 1, son semejantes.

c) Un triángulo de lados 3, 6 y 7 cm, ¿es semejante a otro cuyos lados miden 9, 36 y 49 cm?

No, pues los lados no son proporcionales.

d) Un cuadrilátero de lados 3, 4, 5 y 6 cm ¿es necesariamente semejante a otro de lados 6, 8, 10 y 12 cm?

No, pues aunque los lados son proporcionales, en polígonos de más de tres lados esto no basta para que ocurra la semejanza, han de ser además los ángulos iguales.

e) Dos triángulos que tienen un ángulo de 20º y los lados que los forman en uno miden 6 y 15 cm, en otro, 4 y 10 cm ¿Son semejantes?

Sí, por el segundo criterio, ya que la proporción entre los lados que forman el ángulo igual es en ambos casos 2/5.

f) Dos polígonos regulares con el mismo número de lados, ¿son semejantes?

Sí, los ángulos son iguales, (nº de lados-2)180º/nº de lados, y los lados, proporcionales.

g) Los lados de dos triángulos miden 3, 6 y 7cm, en uno, y $\sqrt{18}$, $\frac{12}{\sqrt{2}}$ y $7\sqrt{2}$ en otro.

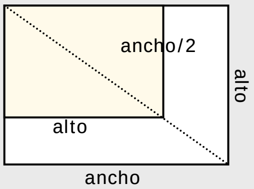
¿Son semejantes?

Sí, pues los lados son proporcionales: $\sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2}$; $\frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2} \cdot \cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}$

y en triángulos basta con esta condición (criterio 3)

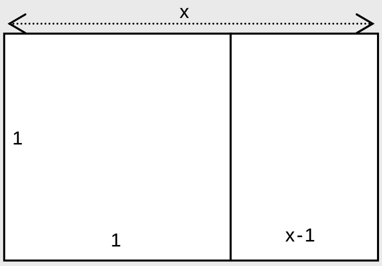
EJERCICIOS resueltos (continuación)

6. Al cortar a la mitad una hoja DIN-A, se obtiene una semejante. Deduce a partir de esto la proporción entre el ancho y el alto en estas hojas.



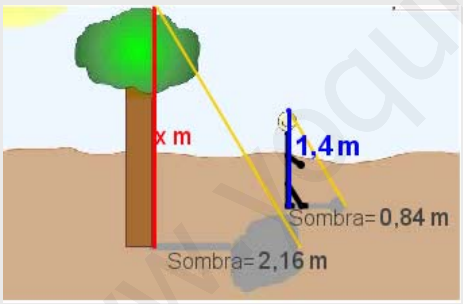
$$\frac{\text{alto}}{\frac{\text{ancho}}{2}} = \frac{\text{ancho}}{\text{alto}} \Rightarrow 2 = \left(\frac{\text{ancho}}{\text{alto}}\right)^2 \Rightarrow \frac{\text{ancho}}{\text{alto}} = \sqrt{2}$$

7. El rectángulo áureo que aparece en el Partenón y en la Gioconda, se caracteriza, porque al cortarle el cuadrado de lado su lado menor, se obtiene otro rectángulo semejante. Calcula la proporción entre sus longitudes.



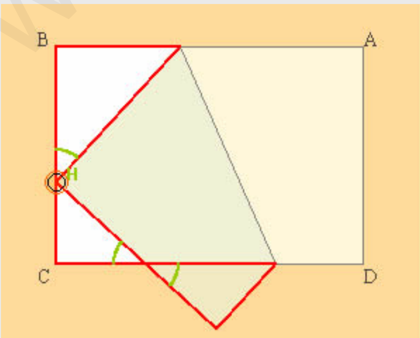
$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$ razón áurea: $\Phi \approx 1{,}62$

8. Halla la altura del árbol



$$\frac{x}{2{,}16} = \frac{1{,}4}{0{,}84} \Rightarrow x = 2{,}16 \cdot \frac{1{,}4}{0{,}84} = 3{,}6$$

9. Al doblar un rectángulo, como indica la figura, se obtienen tres triángulos semejantes ¿por qué son semejantes?

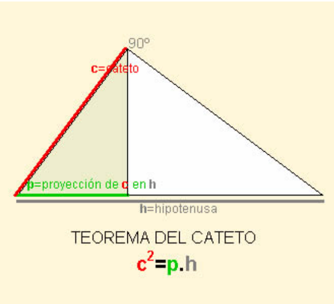


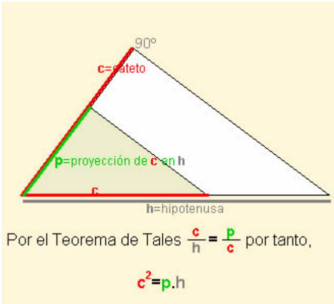
Son semejantes porque los ángulos son iguales ya que los tres son triángulos rectángulos, dos de los triángulos tienen otro ángulo igual porque son opuestos por el vértice. Y H es igual porque al añadirle 90º con la esquina que se dobla, nos da el complementario del ángulo marcado en los otros triángulos.

2. Triángulos rectángulos. Teoremas

Teorema del cateto

En un triángulo rectángulo, el cuadrado del cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección del cateto sobre ella. Esto se sigue de la semejanza entre el triángulo total y el que definen el cateto y su proyección en la hipotenusa.



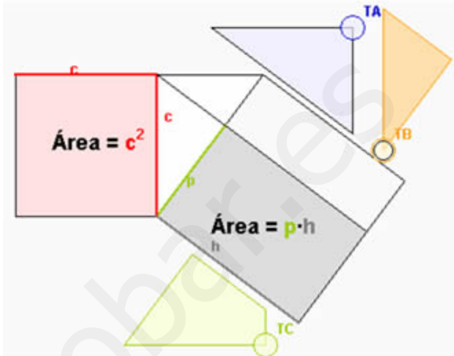


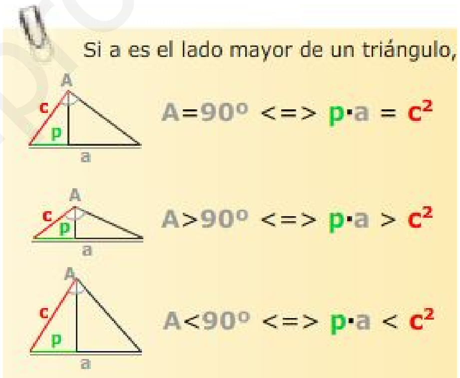
✓ Se voltea el triángulo y se gira para ponerlos en posición del Teorema de Tales.

$$\frac{c}{h}=\frac{p}{c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{c^2 = p \cdot h}}$$

El teorema se puede generalizar a triángulos acutángulos y obtusángulos, comparando los triángulos correspondientes.

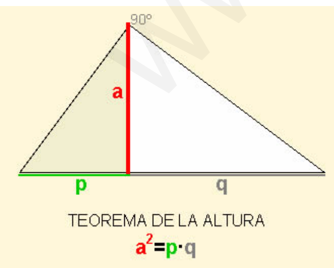
Puzzle del teorema del cateto
Recortando las tres piezas "T_" se puede completar con ellas el cuadrado o el rectángulo, comprobando que ambas áreas son iguales y por tanto el teorema.

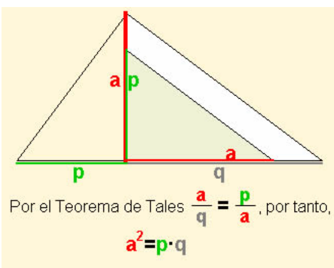




Teorema de la altura

En un triángulo rectángulo el cuadrado de la altura que descansa sobre la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

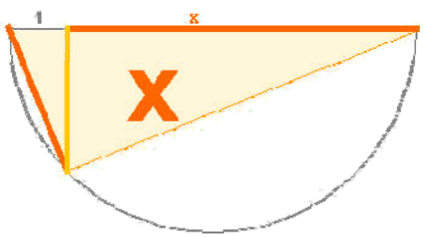




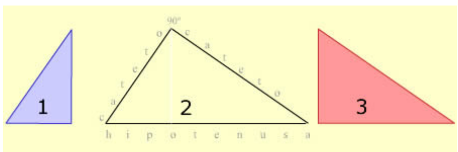
✓ Se gira el triángulo para ponerlos en posición de Tales. Entonces por el citado Teorema:

$$\frac{a}{q}=\frac{p}{a} \text{ y por tanto } \mathbf{a^2=p \cdot q}$$

La altura del triángulo es $\sqrt{x}$

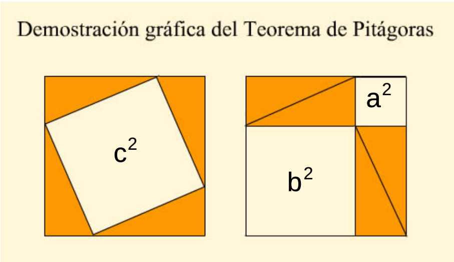


Recuerda

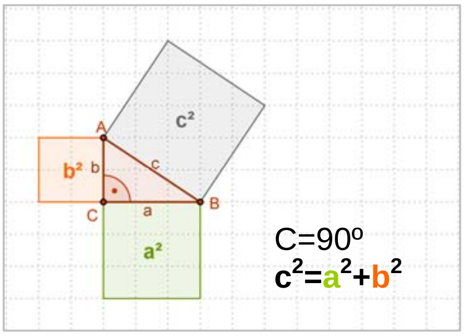


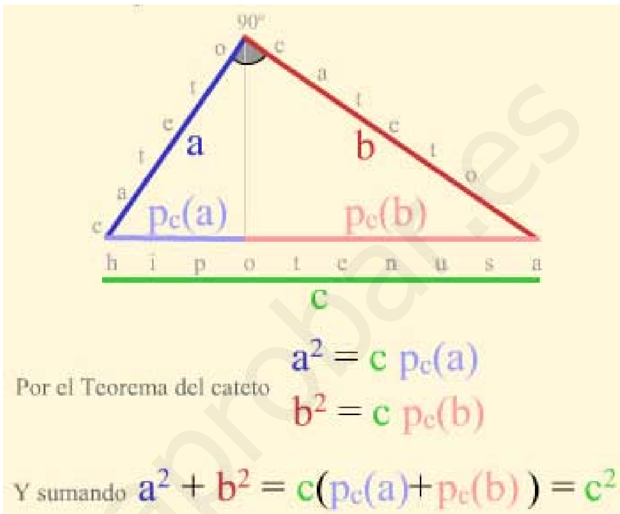
Tres triángulos semejantes.
Comparando 1 y 2 => T. del cateto
Comparando 1 y 3 => T. de la altura

Teorema de Pitágoras generalizado

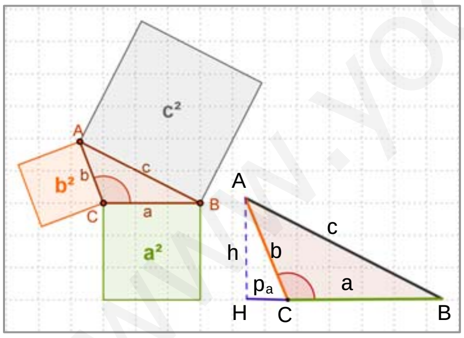


Teorema de Pitágoras. $\hat{C} = 90º \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$





El teorema se generaliza a triángulos obtusángulos y acutángulos:



✓ Si **C>90º** entonces $\mathbf{c^2 > a^2+b^2}$

$$\mathbf{c^2 = a^2+b^2+2\cdot a\cdot p_a}$$

Demostración

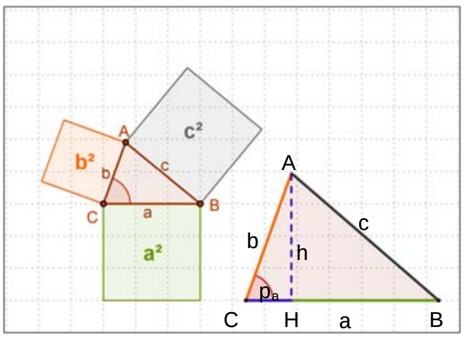
Trazando la altura se forman dos triángulos rectángulos, AHB y AHC, en los que aplicar el Teorema de Pitágoras.

En el triángulo rectángulo mayor: $c^2 = (a+p_a)^2+h^2$

En el triángulo rectángulo menor: $b^2 = p_a^{\,2}+h^2$

Restando las dos igualdades: $c^2 - b^2 = a^2+2p_a\cdot a$

Y despejando: $c^2 = a^2+b^2+2\cdot a\cdot p_a$



✓ Si **C<90º** entonces $\mathbf{c^2 < a^2+b^2}$

$$\mathbf{c^2 = a^2+b^2 - 2\cdot a\cdot p_a}$$

Demostración

Trazando la altura se forman dos triángulos rectángulos, AHB y AHC, en los que aplicar el Teorema de Pitágoras.

En el triángulo rectángulo mayor: $c^2 = (a - p_a)^2+h^2$

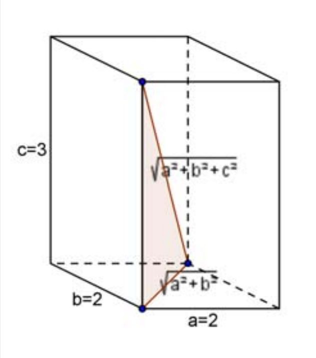
En el triángulo rectángulo menor: $b^2 = p_a^{\,2}+h^2$

Restando las dos igualdades: $c^2 - b^2 = a^2-2p_a\cdot a$

Y despejando: $c^2 = a^2+b^2-2\cdot a\cdot p_a$

EJERCICIOS resueltos

10. Calcula la diagonal de un ortoedro con ocho aristas de 2 dm y el resto de 3 dm.



La diagonal del ortoedro, la diagonal de la base y la altura forman un triángulo rectángulo.
La diagonal de la base se calcula por el Teorema de Pitágoras:

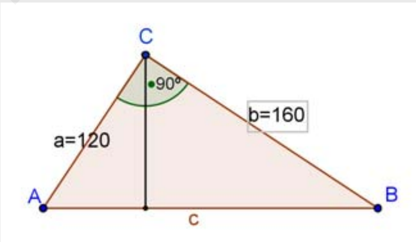
$$\sqrt{2^2+2^2}$$

y volviendo a aplicar el teorema al triángulo mencionado, se concluye que la diagonal es $\sqrt{2^2+2^2+3^2}=\sqrt{17}\approx 4{,}12$

11. Decide si es rectángulo, obtusángulo o acutángulo el triángulo de lados 3 cm, 6 cm y 8 cm.

Hay que decidir si el ángulo mayor del triángulo es obtuso, recto o agudo. Se aplica el teorema generalizado de Pitágoras y se compara $8^2=64$ con $3^2+6^2=9+36=45$.
Como 64 es mayor que 45, se concluye que el triángulo es obtusángulo.

12. En el triángulo de la figura calcula la hipotenusa, las proyecciones de los catetos y la altura.



Aplicando el *Teorema de Pitágoras*:

$$\text{Hipotenusa}=\sqrt{120^2+160^2}=200$$

Aplicando el *Teorema del Cateto*:

$p_c(a)=120^2/200=72$ y $p_c(b)=200-72=128$

Con el *Teorema de la Altura*:

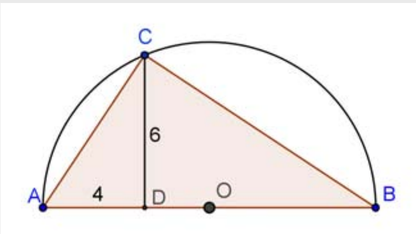
$$\text{alt}=\sqrt{72\cdot 128}=96$$

13. Comprueba que si M, N (M>N) son dos valores enteros (M^2-N^2, 2MN, M^2+N^2) es una terna pitagórica.

Tomamos p.e. M=3, N=2 y sustituimos $M^2-N^2=5$, $2MN=12$, $M^2+N^2=13$
Ahora comprobamos que es pitagórica: $5^2+12^2=169=13^2$

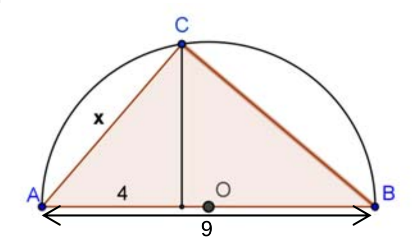
Otras ternas pitagóricas que puedes comprobar: 3, 4, 5 ; 7, 24, 25 ; 8, 15, 17 ; etc

14. Calcula el radio de la semicircunferencia de la figura.



Aplicando el Teorema de la altura, $6^2=4\cdot p \Rightarrow p=9$
Luego el diámetro = 9+4=13
y el radio = 6,5

15. Calcula la medida del cateto x en la figura.

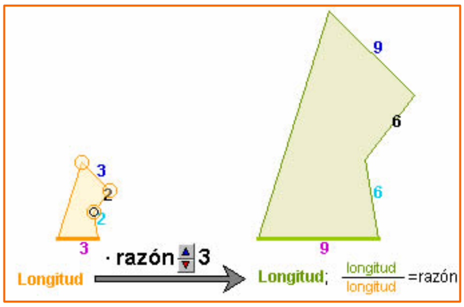


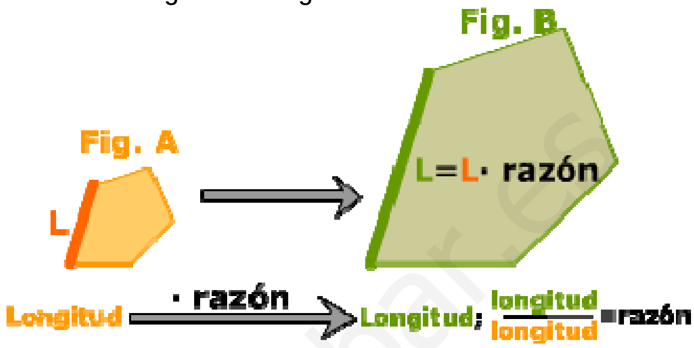
Por el Teorema del cateto,
x^2= diámetro·4=9·4=36
Por tanto x=6

3. Razón de semejanza

Longitudes

Si dos figuras A y B son semejantes, se llama razón de semejanza de la figura B sobre la A al cociente entre la longitud de un segmento de la figura B y la de su homólogo en la figura A.

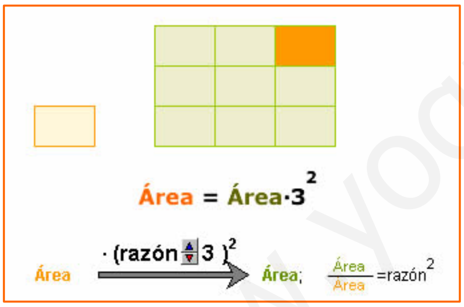


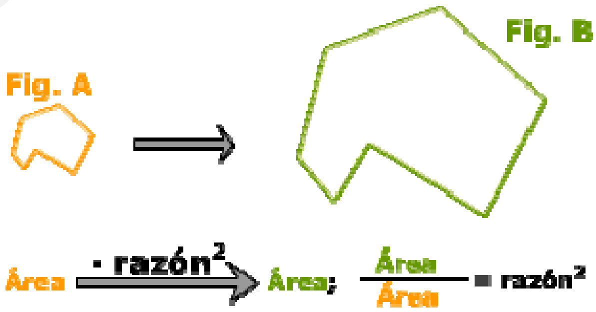


La razón de semejanza define la homotecia que transforma la figura A en la B.

Áreas

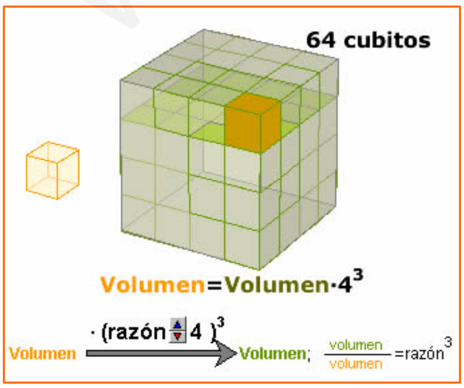
Si dos figuras A y B son semejantes, el cociente entre el área de B y el área de A es el cuadrado de la razón de semejanza de la figura B sobre la A.

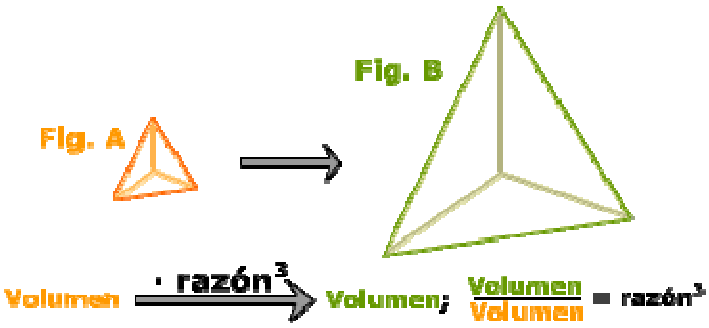




Volúmenes

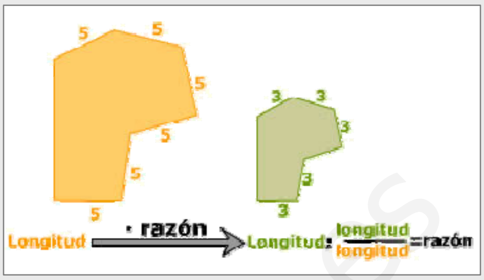
Si dos figuras A y B son semejantes, el cociente entre el volumen de B y el de A es el cubo de la razón de semejanza de la figura B sobre la A.





EJERCICIOS resueltos

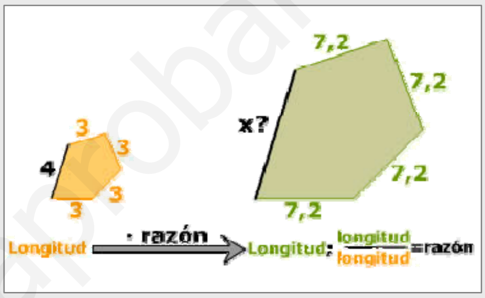
16. ¿ Cuál es la razón de una semejanza que convierte un segmento de longitud 5 m en otro de longitud 3 m?



La razón de semejanza es el cociente entre longitudes homólogas.

Razón = 3/5=0,6

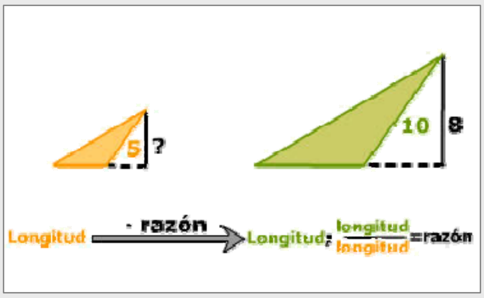
17. Calcula la longitud del segmento homólogo al de 4 m, sabiendo que al aplicar la semejanza de esa misma razón, un segmento de 3 m se transforma en uno de 7,2 m.



Razón =7,2/3=2,4

x=4·razón=4·2,4=9,6 m

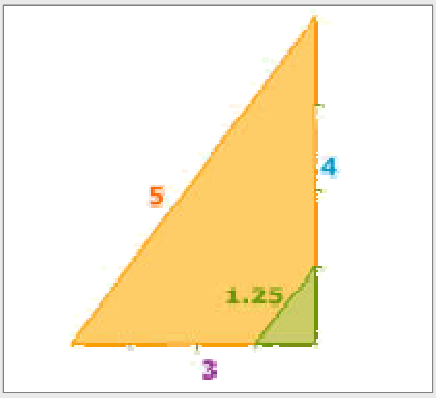
18. En una semejanza un segmento de 5m se transforma en otro de 10m. En la figura transformada hay un segmento de longitud 8m ¿Cuál es la longitud del segmento del que proviene?



Razón =10/5=2

x·razón=8 => x·2=8; x= 4

19. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 cm y aplícale una semejanza de razón ¼ para obtener otro semejante. Calcula la longitud de la hipotenusa en cada triángulo.



Por el T. de Pitágoras:

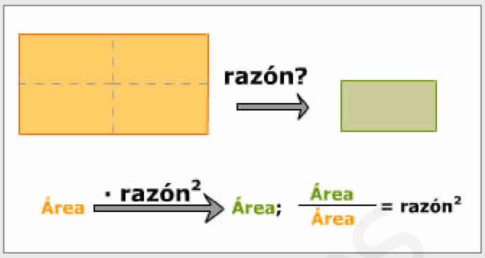
$$\text{hipotenusa} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Si aplicamos la semejanza de razón 1/4, hipotenusa=5·1/4=1,25

EJERCICIOS resueltos

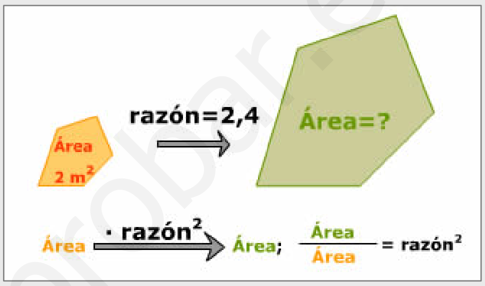
20. ¿ Cuál es la razón de una semejanza que convierte una figura en otra de área la cuarta parte?

$$\text{razón}^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{razón} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$



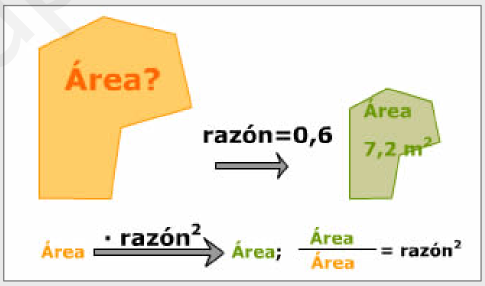
21. ¿Cuál es el área de una figura que se obtiene al aplicar a otra de área 2 m^2, una semejanza de razón 2,4?

Área = 2 m^2 · razón^2 = 2·2,4^2 = 11,52 m^2



22. En una semejanza de razón 0,6 se obtiene una figura de área 7,2 m^2 ¿cuál es el área de la figura inicial?

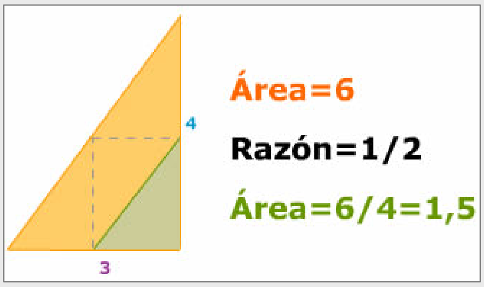
$$\text{Área} = \frac{7{,}2\ \text{m}^2}{0{,}6^2} = 20\ \text{m}^2$$



23. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 cm y otro semejante pero de área la cuarta parte.

Si el área es la cuarta parte, la razón de semejanza que aplicaremos será:

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$



24. El volumen de una casa es de 1200 m^3 y en una maqueta dicha casa ocupa 150 dm^3 ¿Cuál es la escala de la maqueta?

El cociente de los volúmenes es el cubo de la razón, $r^3 = \dfrac{150\ \text{dm}^3}{1200\ \text{m}^3}$

Pasando el denominador a dm^3 y simplificando queda: $r = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8000}} = \dfrac{1}{20}$

4. Aplicaciones

Escalas

Los mapas o planos de viviendas suelen indicar la escala de esta manera:

1:2500000 en algún mapa de carreteras

o 1:250 en el plano de una vivienda.

Para saber aplicar las escalas a longitudes áreas y volúmenes solo hay que recordar las siguientes fórmulas:

Escala=1:l
l = Distancia real /Distancia en plano
l^2= Área real /Área en el plano
l^3= Volumen real/Volumen en maqueta

Fig.1

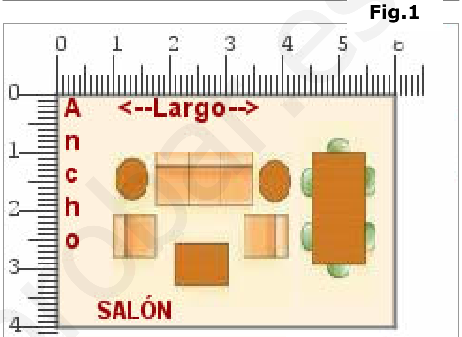


Fig.2

1) Calcular la escala del plano de la figura 1

$$\frac{\text{Distancia real}}{\text{Distancia plano}} = \frac{6844\text{ cm}}{3{,}2\text{ cm}} = 2139$$

Escala= 1:2139

2) La escala es 1:120, ¿cuál es la superficie real del salón de la casa?

$6 \cdot 4 \cdot 120^2 = 345600\text{ cm}^2 = 34{,}56\text{ m}^2$

3) El volumen real de una de las torres es 139650 m^3 si la escala es 1:700, ¿cuál es el volumen de la maqueta?

Volumen de la maqueta: $\frac{139650}{700^3} = 407{,}14\text{ cm}^3$

Fig.3

Distancias inaccesibles

Como ya hiciera Tales al calcular la altura de la pirámide midiendo su sombra, podemos aplicar la semejanza al cálculo de distancias inaccesibles. Anteriormente ya vimos cómo calcular la distancia a un barco o a un punto inaccesible.

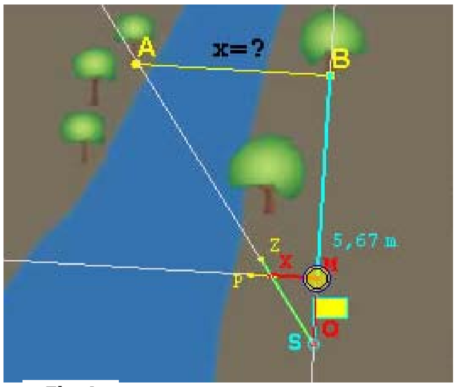


Fig.4

4) *Se desea calcular la distancia entre los puntos A y B, para ello se han tomado las medidas de la figura: QM=1 m, XM=0,69 m y QB=5,67 m*

Aplicando el teorema de Tales: $\frac{x}{QB} = \frac{XM}{QM}$

Con lo que x=5,67·0,69=3,91 m

5) *¿Cuál es la longitud del hilo de pescar?*

Con el Teorema de Pitágoras calculamos la longitud de la caña hasta el punto de apoyo:

$$a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

y aplicando la semejanza: $\frac{x - 4{,}3}{3} = \frac{7}{5}$

obtenemos: x=8,5 m

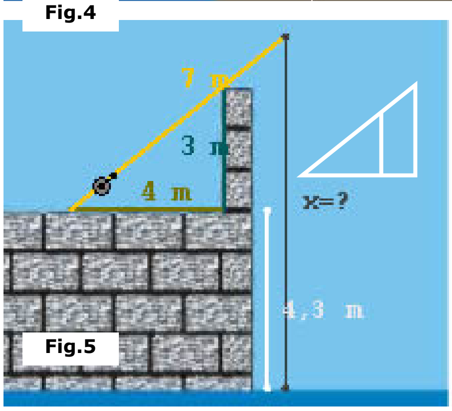
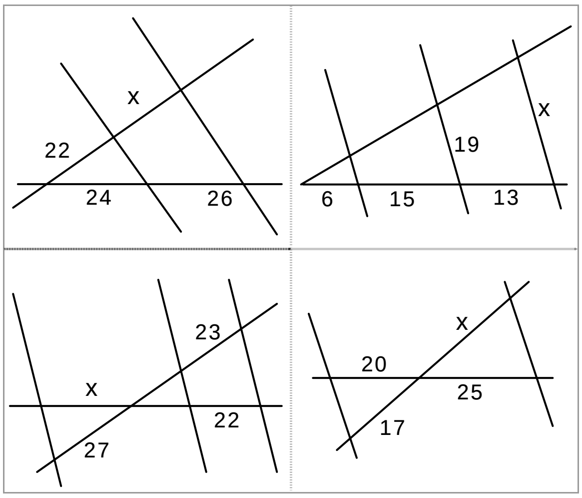


Fig.5

Para practicar

1. Halla x en cada caso

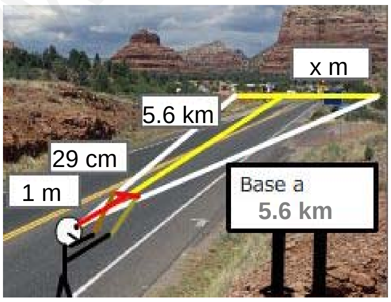


2. Las medidas de tres lados homólogos de dos cuadriláteros semejantes son:

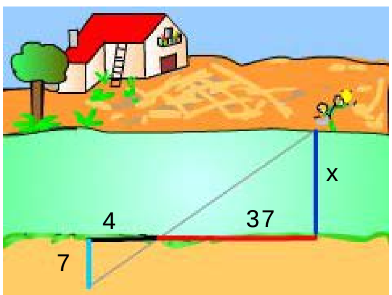
4 cm	x cm	7 cm
20 cm	10 cm	y cm

Halla x e y

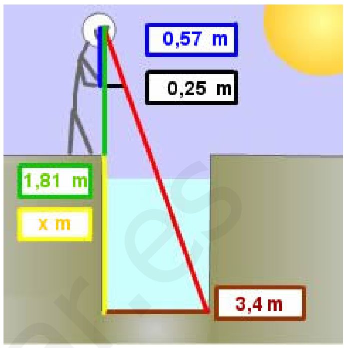
3. La base de un monte se observa a una distancia de 5,6 km. Se mueve una regleta de 29 cm hasta cubrir con ella visualmente la base y en ese momento la distancia de la regleta al ojo del observador es de 1 m.
Calcula la anchura de la base del monte.



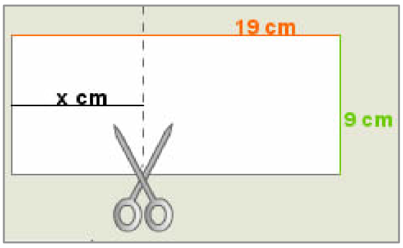
4. Calcula la anchura del río.



5. Calcula la profundidad del pozo.



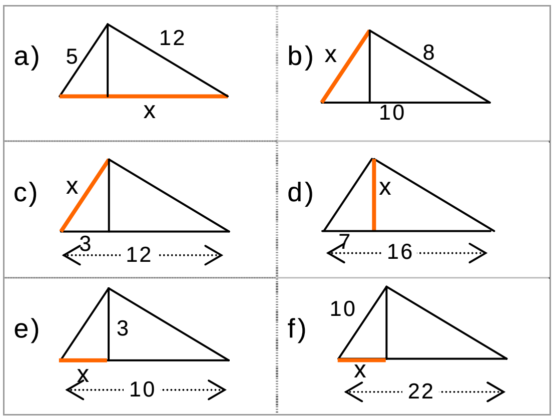
6. ¿Por dónde se ha de cortar la hoja para que el trozo de la izquierda sea semejante a la hoja entera?.



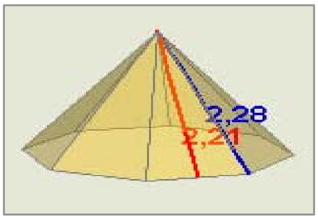
7. Dibuja en tu cuaderno un triángulo con un ángulo de 69º y uno de los lados que lo forman de 9 cm. ¿Son semejantes todos los triángulos que cumplen estas condiciones?

8. Dibuja en tu cuaderno un triángulo con un ángulo de 56º y el cociente de los lados que lo forman igual a 3. ¿Son semejantes todos los triángulos que cumplen estas condiciones?

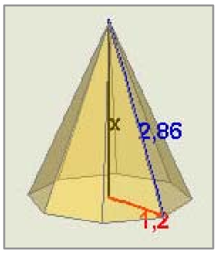
9. Calcula el valor de x en cada triángulo:

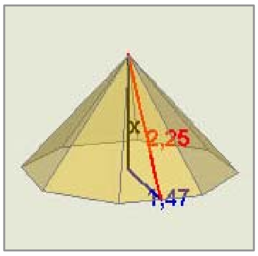


10. Calcula el lado de la base de la pirámide

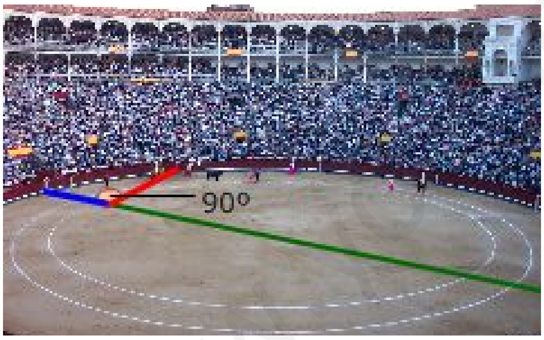


11. Calcula la altura de la pirámide en cada caso.

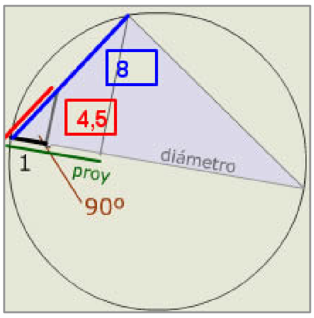




12. En una plaza de toros se puede calcular su diámetro midiendo tan solo unos metros. En dirección de un diámetro (lo define la visual con los espectadores de enfrente) se miden 9m y girando 90º se avanza en esa dirección hasta el callejón, resultando la medida de este recorrido igual a 28,3 m. Calcula el diámetro del ruedo de la plaza de toros

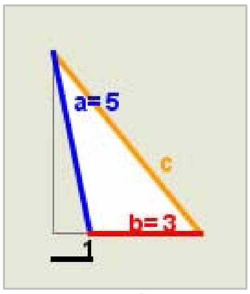


13. Calcula el diámetro de la circunferencia de la figura



14. Halla la distancia entre los puntos de coordenadas (-1,-1) y (-4,3).

15. Aplica el teorema generalizado de Pitágoras para hallar la medida del lado c en el triángulo de la figura.



16. En la figura se ve una copia del dibujo original. ¿Cuál es la escala de la copia?

17. Al medir sobre el mapa con el curvímetro la distancia por carretera entre dos pueblos obtenemos 9,5 cm, la escala del mapa es 1:470000. ¿Cuántos km. Tendrá la carretera que une esos dos pueblos?

18. Al observar un mapa de escala 1:210000 descubrimos que falta un pueblo, B, en una carretera. Si sabemos que B dista 73,3 km de otro pueblo A que vemos en el mapa, ¿a cuántos cm de A por la carretera del mapa colocaremos el punto que represente a B?

19. El volumen de una torre es de 2925 m^3 calcula el volumen de su representación en una maqueta de escala 1:500.

20. El área de la base de una torre es de 275 m^2 calcula el área de la misma en una maqueta de escala 1:350.

21. El área de una torre es de 125 m^2 y en una maqueta ocupa una superficie de 55 cm^2 . Halla la escala de la maqueta.

22. El área de la base de una torre es de 25 cm^2 en una maqueta de escala 1:350. Calcula el área real de la base.

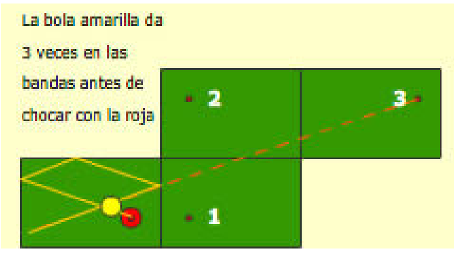
23. El volumen de una torre es de 3300 m^3 y en una maqueta ocupa un volumen de 412 cm^3. Halla la escala de la maqueta.

24. El volumen de una torre es de 27 cm^3 en una maqueta de escala 1:450. Calcula el volumen real de la torre.

Para saber más

Billar a tres bandas

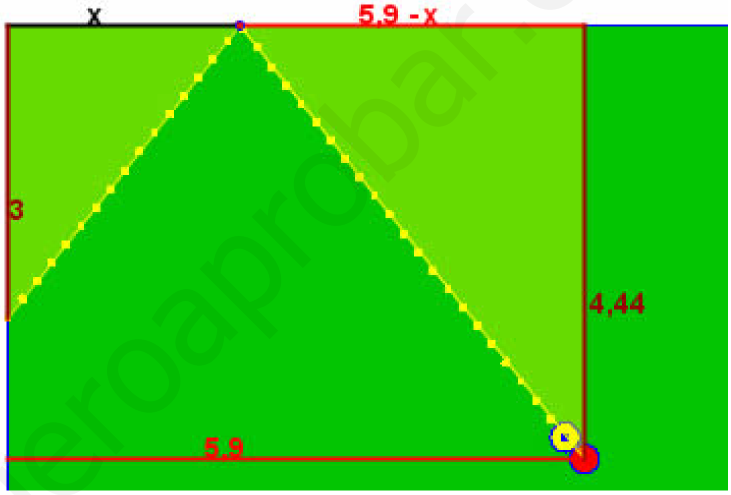
Construimos los rectángulos iguales al billar, después los puntos simétricos a la bola roja, el camino más corto entre dos puntos es la linea recta que al plegarla en el billar nos da el recorrido deseado



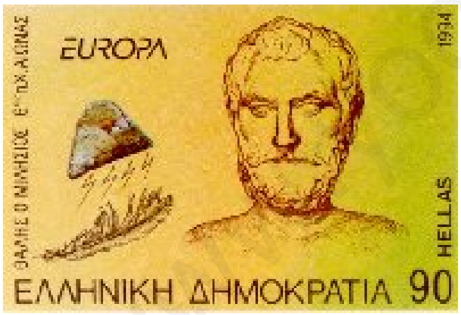
¿Cómo asegurar la carambola a una banda?

Como la bola incide en la banda con el mismo ángulo que rebota, habrá que conseguir que los triángulos sean semejantes, y esto se puede lograr ¡a ojo! o con precisión resolviendo la ecuación de proporcionalidad asociada a la semejanza.

$$\frac{x}{3} = \frac{5{,}9 - x}{4{,}44} \Rightarrow 4{,}44 \cdot x = 3 \cdot (5{,}9 - x); \qquad x = \frac{3 \cdot 5{,}9}{3 + 4{,}44} = 2{,}37$$



Geometría griega



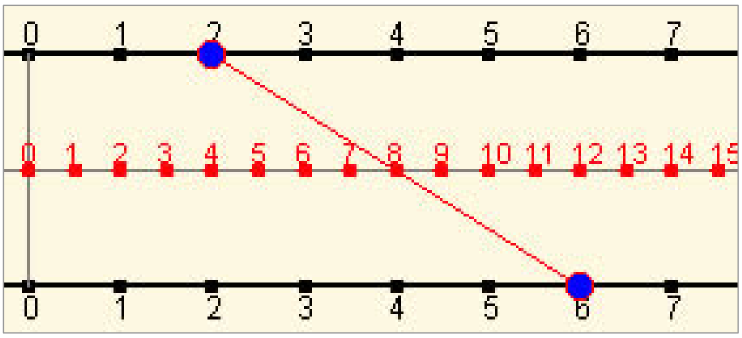
La tradición atribuye a Thales (600 años antes de nuestra era) la introducción en Grecia de la geometría egipcia. Thales fue un precursor sobre todo preocupado de problemas prácticos (cálculo de alturas de monumentos con ayuda de un bastón y de la proporcionalidad de las sombras).

La geometría griega que fue un éxito asombroso de la ciencia humana dando pruebas de un ingenio excepcional, estuvo marcada por dos Escuelas: la de Pitágoras y la de Euclides.

Ver más en:
http://perso.orange.fr/therese.eveilleau/pages/hist_mat/textes/h_geom.htm

Con el Teorema de Tales se pueden realizar "geométricamente" las operaciones básicas, en la imagen vemos un calculadora geométrica para sumar.

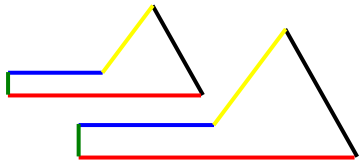
Se basa en que la abscisa del punto medio de un segmento es la semisuma de las abscisas de los extremos.



Recuerda lo más importante

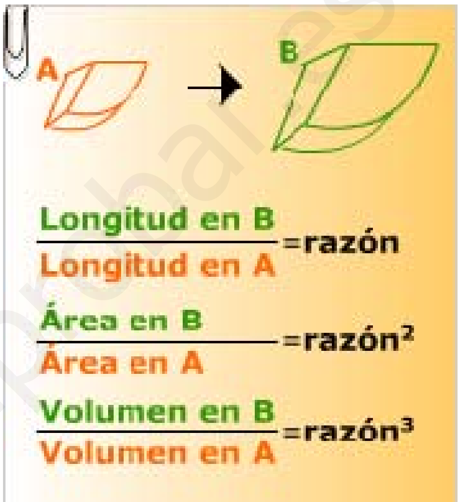
Figuras semejantes

Si se puede pasar de una a otra mediante una homotecia y movimientos.



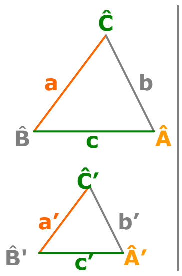
Polígonos semejantes

Si tienen y los lados proporcionales y los ángulos iguales.

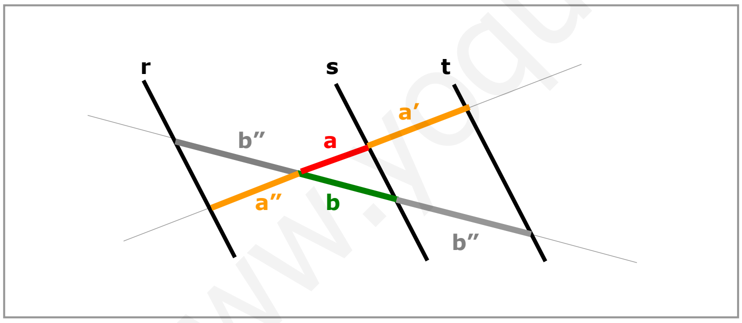


Triángulos semejantes

En el caso de los triángulos basta que se cumpla uno de los tres criterios:



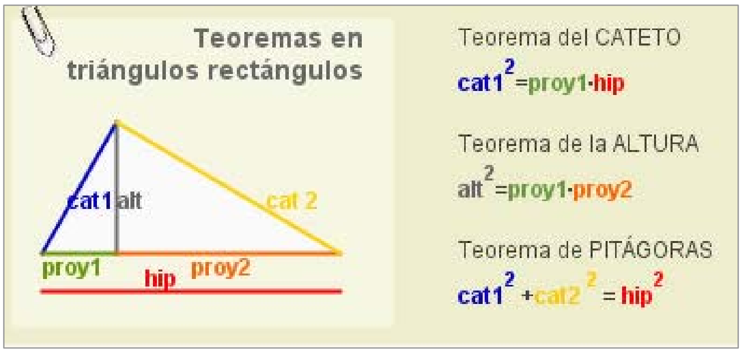
1. Ángulos iguales (con dos basta)
   $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$
2. Un ángulo igual y los lados que lo forman proporcionales
   $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
3. Lados proporcionales
   $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$



Teorema de Tales

Los segmentos que determinan rectas paralelas en dos secantes son proporcionales.

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$$

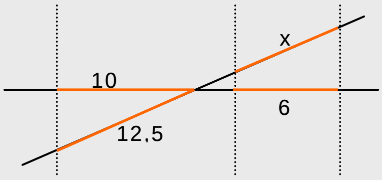


Teorema de Pitágoras generalizado

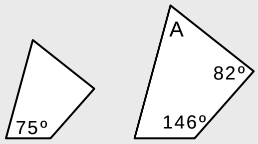
Si C>90º $c^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot p_a(b)$

Si C<90º $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot p_a(b)$

Autoevaluación

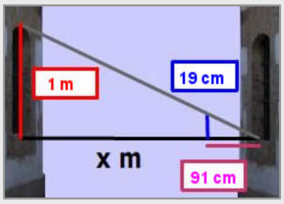


1. Aplica la semejanza para calcular el valor de x.



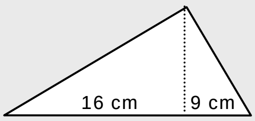
2. Sabiendo que los ángulos de un cuadrilátero suman 360º, calcula el ángulo A.

3. Los polígonos de la figura, ¿son semejantes?.

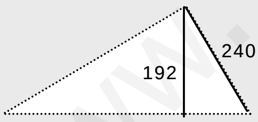


4. Como la ventana de la casa de enfrente es igual que la mía puedo saber su altura, y con la visual de una varilla calcular la anchura de la calle. Calcúlala.

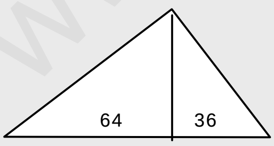
5. Si los lados de un triángulo miden 6, 8 y 11 cm, ¿qué tipo de triángulo es?



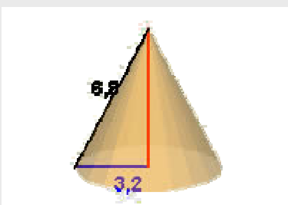
6. Calcula el perímetro de un triángulo rectángulo en el que las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 16 y 9 cm.



7. En un triángulo rectángulo un cateto mide 240 cm y la altura sobre la hipotenusa 192 cm, ¿cuánto mide la hipotenusa?.



8. Calcula el área de un triángulo rectángulo en el que las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 64 y 36 cm.



9. La generatriz de un cono recto mide 6,8 cm y el radio de la base 3,2 cm. Halla la altura de un cono semejante a éste realizado a escala 1:2.

10. Calcula la superficie en m^2 de un piso del que tenemos un plano a escala 1:300, si el piso en el plano ocupa 17 cm^2.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) 23,83 b) 30,76
c) 25,82 d) 21,25

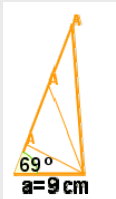
2. x=2 y=35

3. 1624 m

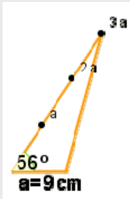
4. 64,75

5. 5,94 m

6. 4,26 cm



Prob. 7



Prob.8

7. No tienen porqué ser semejantes

8. Son semejantes

9. a) 13 b) 6 c) 6
d) $\sqrt{63} \approx 7,9$ e) 1 f) $4,\overset{\frown}{5}4$

10. 1,12

11. 2,59 1,70

12. 97,98 m

13. 36

14. 5

15. $c^2=a^2+b^2+2b\cdot p_b(a)=40$;
$c=\sqrt{40} \approx 6,32$

16. 1:2,5

17. 44,65 km

18. 34,90 cm

19. 23,4 cm^3

20. 22,44 cm^2

21. 150,75 cm^2

22. 306,25 cm^2

23. 1:200

24. 2460,37 m^3

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 7,5

2. 57º

3. No son semejantes

4. 91/19 m = 4,78 m

5. Obtusángulo $11^2>6^2+8^2$

6. 60 cm

7. 400 cm

8. 4800 cm^2

9. 3 cm

10. 153 m^2

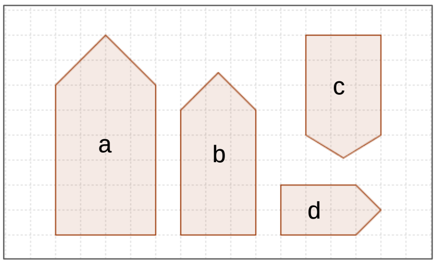
No olvides enviar las actividades al tutor

Centro para la Innovación y Desarrollo
de la Educación a Distancia

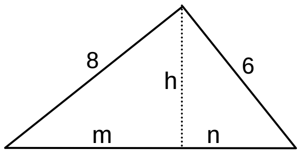
ACTIVIDADES DE ESO

Nombre y apellidos del alumno:		Curso: 4º
Quincena nº: 6	Asignatura: Matemáticas B	
Fecha:	Profesor de la asignatura:	

1. Indica cuáles de las siguientes figuras son semejantes:



2. En el triángulo rectángulo de la figura calcula las longitudes h, m y n.



3. La escala del plano de una vivienda es 1:200, el salón tiene forma rectangular de dimensiones en el plano 2 cm y 3,5 cm. Halla el área real del salón.

4. Calcula razonadamente la altura de un árbol que proyecta una sombra de 12 metros a la misma hora que un palo de 1,2 m proyecta una sombra de 1,5 m.

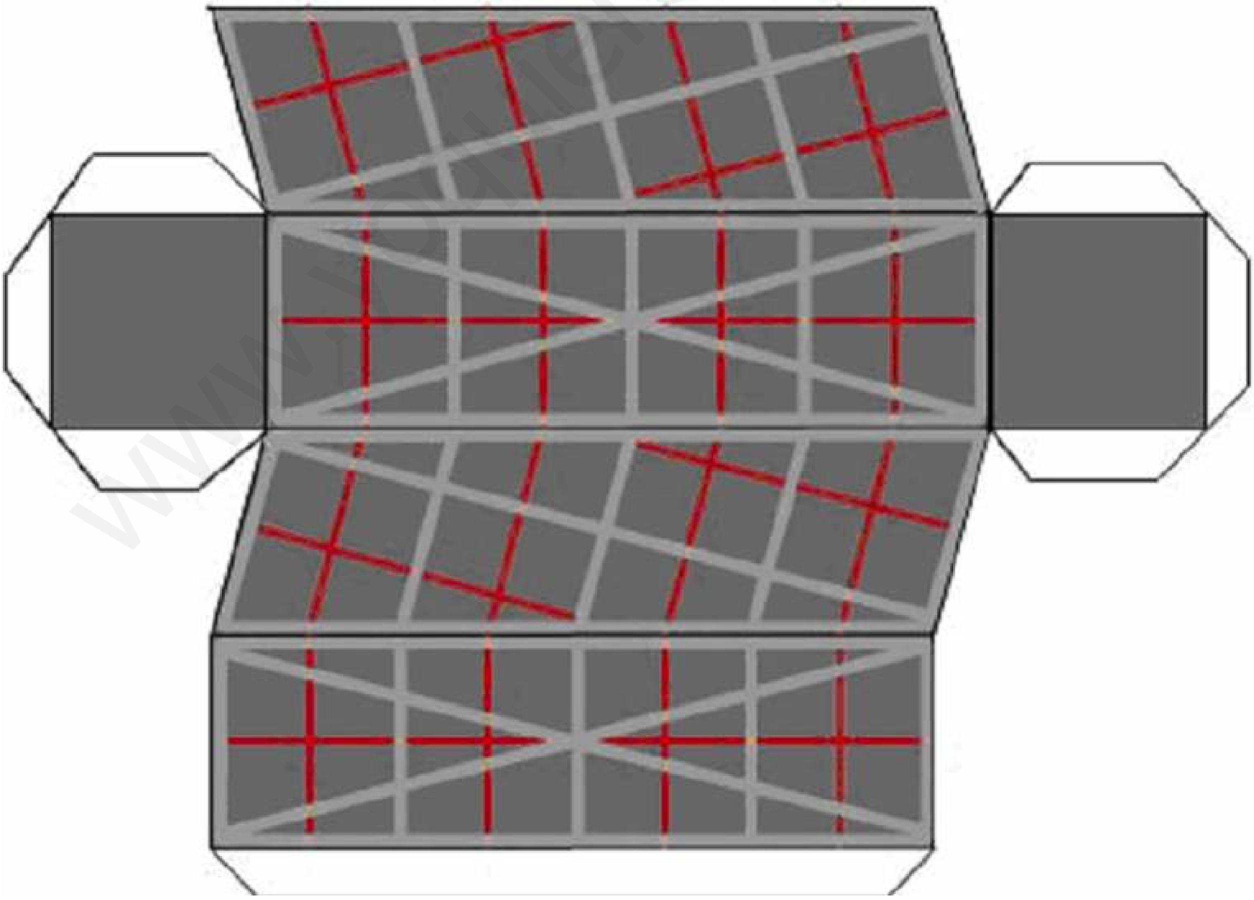
cidead@mec.es

http://cidead.cnice.mec.es

C/ TORRELAGUNA, 58
28027 MADRID
TEL: 91 3778300
FAX: 91 3778314

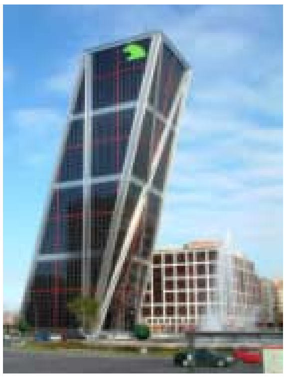
Para finalizar se propone un problema para repasar la semejanza sobre una maqueta de las TORRES KIO (Plaza Castilla, Madrid).

✓ Puedes comenzar por recortar y construir la maqueta de una de las torres.



1.¿Cuál es la altura de la torre en la maqueta? Indícalo sobre la imagen.

La altura real de la torre es de 114 m. ¿Cuál es la escala de la maqueta?



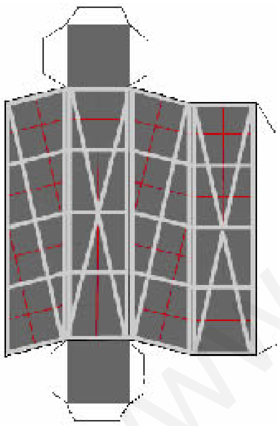
2. Mide con el transportador la inclinación de la torre-maqueta.

¿Cuál es la inclinación de la torre real?

3. Halla el área del cuadrado de la base del desarrollo.

¿Cuál es el área de la base en la torre real?

4. Halla el área total de la torre en la maqueta. Indica el área de cada cara en el desarrollo.



¿Cuál es el área total de la torre real?

5. Halla el volumen de la torre-maqueta. Explica los cálculos realizados

¿Cuál es el volumen total de la torre Kio en la Plaza Castilla?

6. Comprueba que se verifica el teorema de Pitágoras en las medidas de las aristas y de la altura de la maqueta. Escribe aquí las medidas y los cálculos

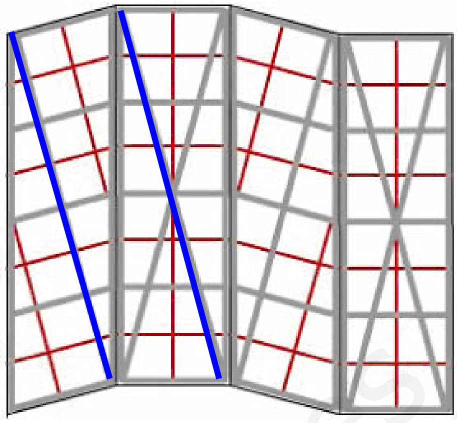
Arista mayor = su cuadrado =

Arista menor = su cuadrado =

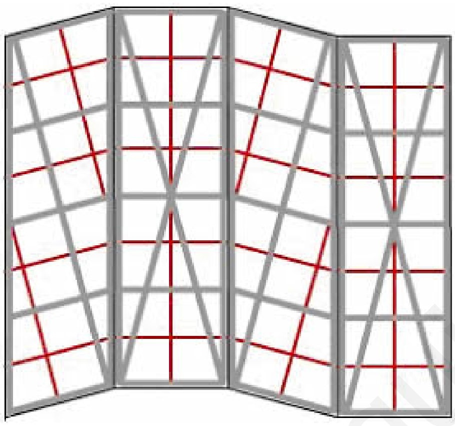
Altura = su cuadrado =

Teorema de Pitágoras→

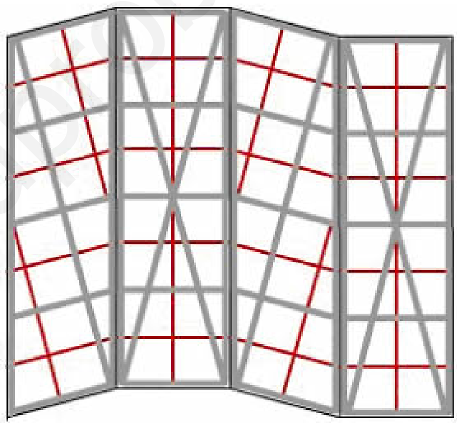
7. ¿Son paralelas las diagonales de las caras laterales señaladas en azul?



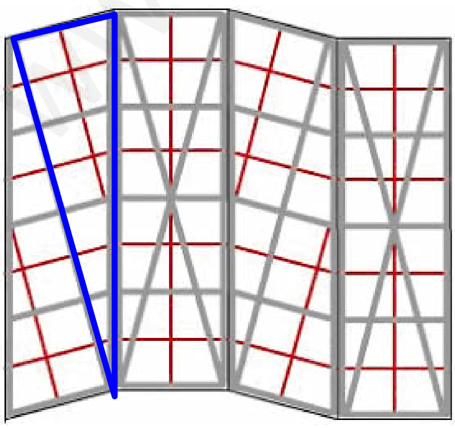
8. Enuncia el Teorema de Tales sobre algunos triángulos y segmentos del desarrollo de la fachada



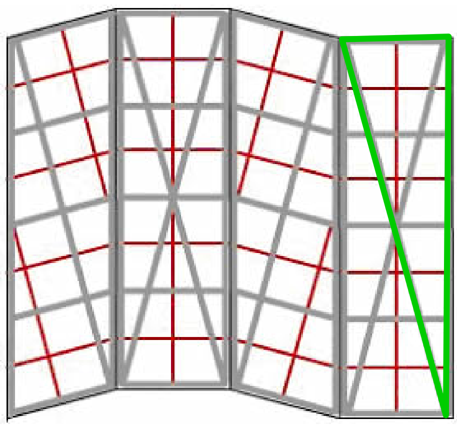
9. Busca triángulos semejantes en la fachada



10. Explica el teorema del cateto sobre el triángulo rectángulo azul.



11. Aplica el teorema de la altura al triángulo verde, marcado a la derecha.



SOLUCIONES

1. Las medidas que hemos realizado sobre la maqueta dan los siguientes datos con los que hemos realizado los ejercicios. Los errores inevitables de medida darán otras soluciones.

Arista de la base cuadrada 2,8 cm　　　Altura de la torre 9,12 cm

La altura señalada en la maqueta es 9,12cm

11400cm/9,12cm=1250. Escala=1:1250

2. 15º. La inclinación en la torre real es la misma, las semejanzas conservan los ángulos.

3. Área base maqueta $=7.84\ cm^2$ que al multiplicarla por 1250^2 da el
Área de la base en la realidad $= 1225\ m^2$

4. El área de las bases es de $2 \cdot 2{,}8^2\ cm^2 = 15{,}68\ cm^2$

Área paralelogramo = arista de la base · altura = 2,8·9,12 = 25,536 cm2

Área rectángulo = arista de la base · arista lateral = 2,8·9,54 = 26,712 cm2

Área total $= 15{,}68 + 2 \cdot (25{,}536 + 26{,}712) = 120{,}176\ cm^2$

Área real: $120{,}176\ cm^2 \cdot 1250^2 = 18777{,}5\ m^2$

5. Área base · altura $= 7{,}84\ cm^2 \cdot 9{,}12\ cm = 71{,}5008\ cm^3 \sim 71{,}5\ cm^3$

Volumen total de la torre Kio $\sim 71{,}5\ cm^3 \cdot 1250^3 \sim 139648{,}5\ m^3$

6. Arista mayor = 9,54　　su cuadrado = 91,01

Arista menor = 2,8　　su cuadrado = 7,84

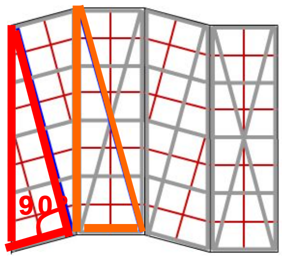
Altura = 9,12　　su cuadrado = 83,17

Teorema de Pitágoras→ 91,01 - 7,84 = 83,17

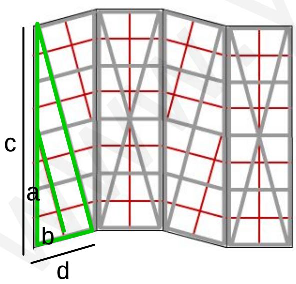
7. No son paralelas pues en ese caso los triángulos serían semejantes y los lados proporcionales y no lo son ya que:

$$\frac{\text{cateto pequeño izda}}{\text{cateto pequeño dcha}} = \frac{2{,}8}{2{,}8} = 1$$

$$\frac{\text{cateto grande izda}}{\text{cateto grande dcha}} = \frac{9{,}54}{9{,}12} \neq 1$$

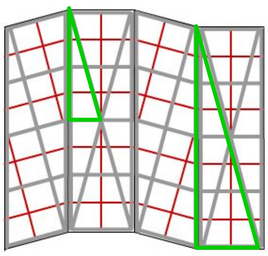


8. Hay muchos ejemplos, señalamos uno.

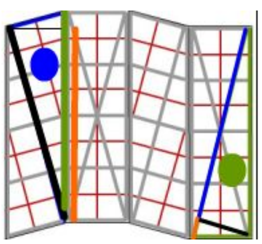


$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

9. También hay muchos ejemplos.



10. 11.



T. del cateto c^2 = hip · proy.

T. de la altura alt^2 = proy. 1 · proy.2

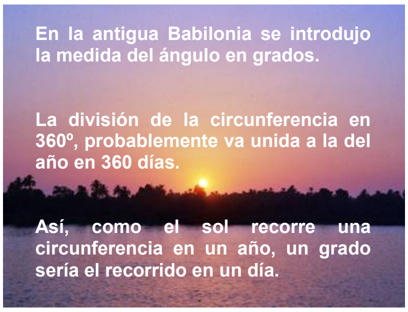
7 Trigonometría

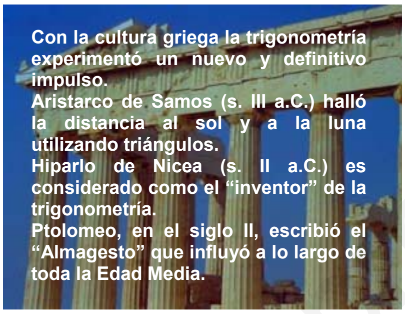
Objetivos

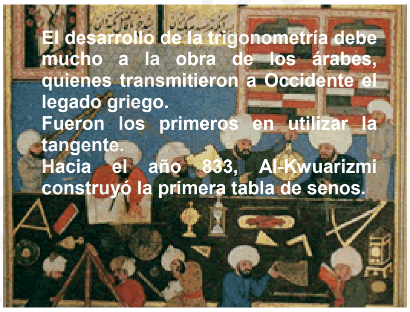
En esta quincena aprenderás a:

- Calcular las razones trigonométricas de un ángulo.
- Hallar todas las razones trigonométricas de un ángulo a partir de una de ellas.
- Resolver triángulos rectángulos cuando se conocen dos lados o un lado y un ángulo.
- Resolver situaciones relacionadas con la geometría en las que se precise calcular ángulos y distancias entre dos puntos.
- Utilizar la calculadora para obtener razones o ángulos.

Antes de empezar







Investiga

Seguramente habrás visto esta señal en las carreteras y conoces lo que indica: pendiente prolongada.
También recordarás el concepto de pendiente de una recta. Según éste el 10% significa que cada 100 m recorridos en horizontal, subimos (o bajamos) 10 en vertical. Pero algunos interpretan los 100 m como el camino real recorrido. ¿Tú qué opinas?, ¿influye mucho considerarlo de una u otra forma?.

Recuerda

Antes de seguir adelante te conviene comprobar que recuerdas la semejanza de triángulos y el Teorema de Pitágoras.

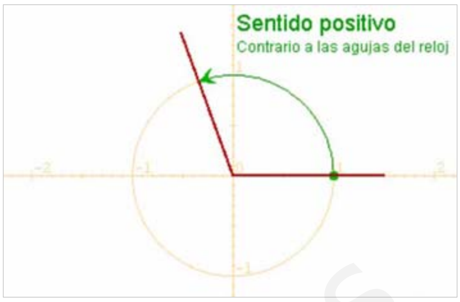
1. Los ángulos y su medida

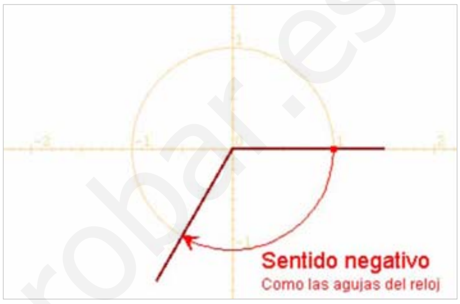
Trigonometría es una palabra que deriva del griego Τριγωνομετρία, Tri (Τρι) tres, gono (γωνο) ángulo, metría (μετρία) medida, es decir, "medida de tres ángulos". Puedes consultar la definición de trigonometría que da el diccionario de la R.A.E.

En este curso se tratará únicamente la trigonometría plana.

Con objeto de estudiar los ángulos y su medida consideraremos que un ángulo es un recorrido en la circunferencia con centro el origen y de radio unidad o circunferencia goniométrica, el punto de partida de estos recorridos se situará en el punto de coordenadas (1,0) y la medida de un ángulo será la medida de ese recorrido.

Los ángulos pueden tener sentido positivo o negativo según sea el de su recorrido; si es contrario al de las agujas del reloj será positivo y si es igual, negativo.





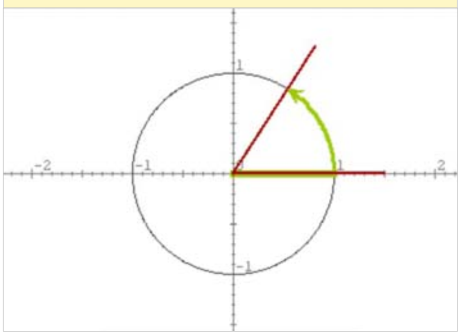
Radianes

Medir un ángulo es medir su recorrido en la circunferencia.

Como la medida de toda la circunferencia es 2·π·radio, resulta conveniente tomar como unidad de medida el radio.

En las figuras, los ángulos se representan en una circunferencia de radio 1, ello no significa que el radio mida 1 cm o 1 pie o 1 m, sino que el radio es la unidad de medida tomada. Por razones evidentes a esta unidad se le llama **radián**.

El ángulo de **1 radián** es aquel cuyo recorrido en la circunferencia es igual al radio.



Grados sexagesimales

Ya conoces el sistema sexagesimal de medida de ángulos.

Al dividir la circunferencia en 360 partes iguales, obtenemos un grado, a su vez cada grado se compone de 60 minutos y cada minuto de 60 segundos.

Así un ángulo se mide en:

grados° minutos' segundos''

Mide ángulos con el transportador

1 grado = $\frac{\pi}{180}$ **radianes**

De grados a radianes:

✓ multiplicamos por $\frac{\pi}{180}$

1 radián = $\frac{180}{\pi}$ **grados**

De radianes a grados:

✓ multiplicamos por $\frac{180}{\pi}$

De grados a radianes y de radianes a grados

El semiperímetro de la semicircunferencia es π·radio

π radianes = 180 grados

es decir, π veces un radián = 180 veces un grado

$\pi \cdot 1$ radián = $180 \cdot 1$ grado

Si despejamos el grado resulta:

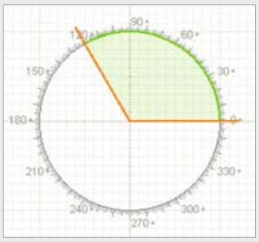
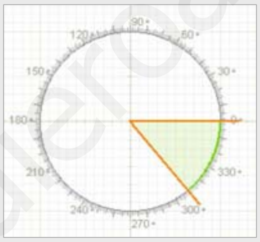
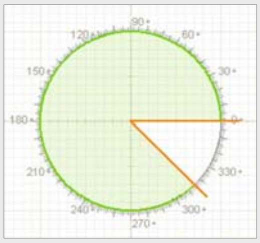
1 grado = $\pi/180$ radianes ~ 0.0175 radianes

Si despejamos el radián resulta:

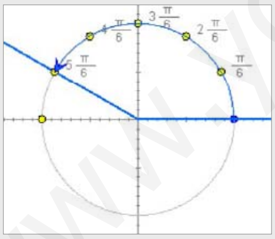
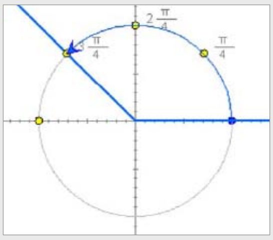
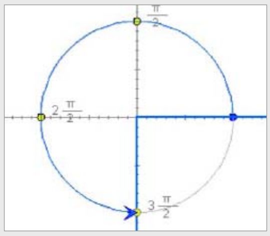
1 radián = $180/\pi$ grados ~ 57.2957 grados

EJERCICIOS resueltos

1. Dibuja en la circunferencia goniométrica los ángulos de 120º, -50º y 315º.

2. Dibuja en la circunferencia goniométrica el ángulo de $5\pi/6$, $3\pi/4$, y $3\pi/2$ rad.

3. Pasa a radianes: a) 150º, b) 210º, c) 270º, d) 60º

a) $150º = \frac{150 \cdot \pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$ rad

b) $210º = \frac{210 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{6}$ rad

c) $270º = \frac{270 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{2}$ rad

d) $60º = \frac{60 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ rad

4. Pasa a grados: a) $11\pi/6$ rad, b) $\pi/4$ rad, c) $5\pi/4$ rad, d) $2\pi/3$ rad

a) $\frac{11\pi}{6}$ rad $= \frac{11\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 330º$

b) $\frac{\pi}{4}$ rad $= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 45º$

c) $\frac{5\pi}{4}$ rad $= \frac{5\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 225º$

d) $\frac{2\pi}{3}$ rad $= \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 120º$

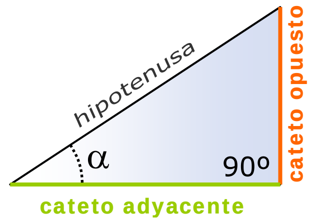
2. Razones trigonométricas

En los triángulos semejantes los ángulos son iguales y los lados homólogos son proporcionales. La razón entre los lados de un triángulo determina su forma.

Dado un triángulo rectángulo, las razones trigonométricas del ángulo agudo α se definen:

- ✓ El **seno** es el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa.
- ✓ El **coseno** es el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa.
- ✓ La **tangente** es el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

Estas razones no dependen del tamaño del triángulo sino del ángulo.



$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

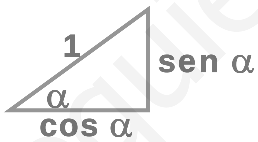
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Seno y coseno en la circunferencia

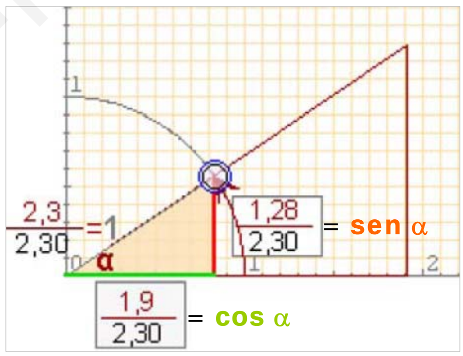
En la figura se ha representado el ángulo α en la circunferencia goniométrica o de radio unidad.

En el triángulo rectángulo que se forma como la hipotenusa es 1, el cateto opuesto es el **sen α** y el adyacente el **cos α**.

Es importante recordar el siguiente triángulo:



Observa que (**cos** α, **sen** α) son las **coordenadas** del punto final del ángulo α en la circunferencia de radio unidad.



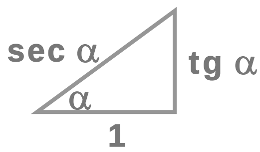
Tangente en la circunferencia

En la figura se comprende por qué al cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente se le llama tangente, su valor queda definido sobre la recta tangente a la circunferencia en el punto (1,0).

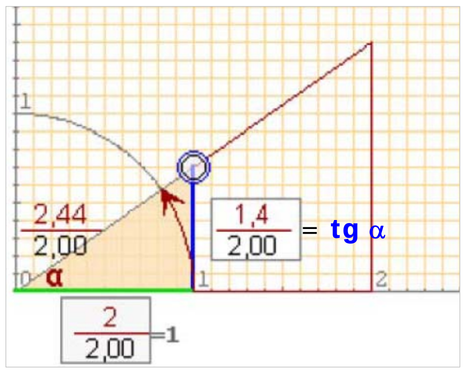
Observa que cuando el cateto adyacente vale 1, la hipotenusa es igual a la inversa del cos α.

Al cociente:

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$



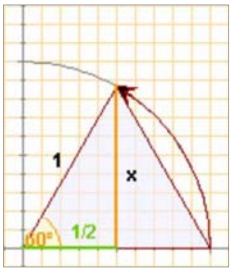
se le llama secante de α y se abrevia con sec α.



Razones de 30º, 45º y 60º

En un triángulo equilátero los ángulos miden **60º**
Con el Teorema de Pitágoras se calcula la altura

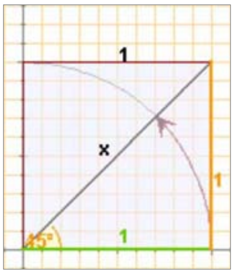
$$x=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Tomamos un cuadrado de lado **1**

Con el Teorema de Pitágoras se calcula la diagonal

$$\text{diag}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$



Los ángulos de 30º, 45º y 60º aparecen con bastante frecuencia, fíjate cómo se calculan sus razones a partir de la definición si buscamos los triángulos adecuados.

	sen	cos	tg
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Memorizar esta tabla es fácil si observas el orden que guardan. Una vez aprendidos los senos con las raíces consecutivas, los cosenos salen en orden inverso.

Con la calculadora

- Dado un ángulo α obtener sus razones trigonométricas.

  Por ejemplo el sen 28º 30´

  Pon la calculadora en modo DEG

  Teclea 28 º ' '' 30 º ' '' sin

  Obtenemos: 0,477158760

  En algunas calculadoras hay que pulsar la tecla sin antes de introducir el ángulo, comprueba cómo funciona la tuya.

  Si queremos obtener el cosα ó la tgα procederemos de la misma forma pero pulsando las teclas cos y tan respectivamente.

- Dada una razón obtener el ángulo α correspondiente.

  Con el mismo valor que tienes en la pantalla : 0,477158760

  Comprueba que la calculadora sigue en modo DEG

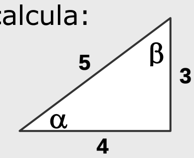
  Teclea SHIFT sin

  Obtenemos : 28,5 en grados, si queremos grados, minutos y segundos, pulsamos SHIFT º ' '' obteniendo 28º 30''

EJERCICIOS resueltos

5. En el triángulo de la figura calcula:

a) sen α d) sen β
b) cos α e) cos β
c) tg α f) tg β



a) $\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{5}=0{,}6$ d) $\operatorname{sen}\beta=\frac{4}{5}=0{,}8$

b) $\cos\alpha=\frac{4}{5}=0{,}8$ e) $\cos\beta=\frac{3}{5}=0{,}6$

c) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}=0{,}75$ f) $\operatorname{tg}\beta=\frac{4}{3}=1{,}\widehat{3}$

6. Obtén con la calculadora:

a) sen 30º = 0,5
b) cos 60º = 0,5
c) tg 45º = 1

7. Obtén con la calculadora los ángulos α y β del ejercicio 5.

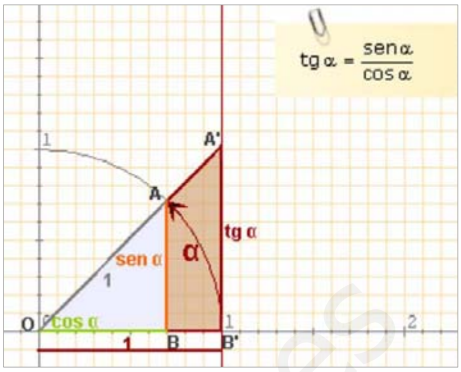
α: Tecleamos 0 . 6 SHIFT sin → 36,87º
β: Tecleamos 0 . 8 SHIFT sin → 53,13º
Observa que en efecto suman 90º.

3. Relaciones fundamentales

Si se aplican la semejanza y el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos "básicos", es decir, con hipotenusa=1 o con cateto adyacente=1, se obtienen las relaciones fundamentales de la trigonometría:

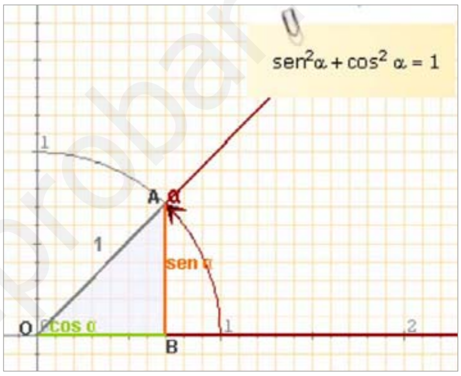
Los triángulos OBA y OB'A' son semejantes:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{tg}\alpha}{1} \quad \text{luego} \quad \boxed{\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\,\alpha}}$$



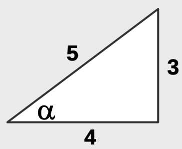
Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo OBA de la figura obtenemos:

$$\boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$



EJERCICIOS resueltos

8. Comprueba en el ángulo α del triángulo de la figura que se cumplen las relaciones fundamentales.



$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} = \text{tg}\alpha$$

9. Calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo α tal que sen α=0,3

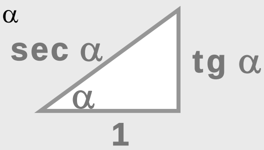
$$\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - 0{,}3^2 = 1 - 0{,}09 = 0{,}81 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}3}{0{,}9} = \frac{1}{3}$$

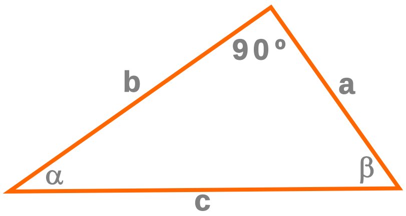
10. Comprueba que se cumple la relación: $1 + \text{tg}^2\,\alpha = \sec^2\alpha$

$$1 + \text{tg}^2\alpha = 1 + \left(\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = 1 + \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$$

Recuerda el triángulo:



4. Resolución de triángulos rectángulos

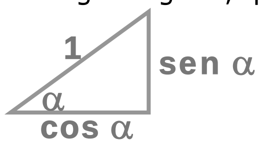


Resolver un triángulo rectángulo es calcular los datos desconocidos, lados o ángulos, a partir de los conocidos.

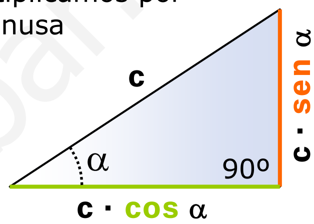
Veamos los casos que se pueden presentar.

a) Conocidos un ángulo y la hipotenusa

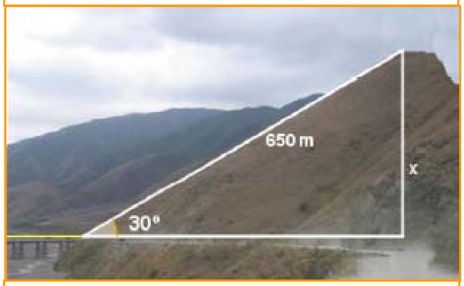
Para hallar los catetos de un triángulo rectángulo del que se conocen las medidas de la **hipotenusa** y de un ángulo agudo, pensaremos en el triángulo:



que multiplicamos por la hipotenusa



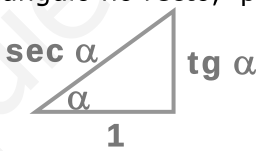
Calcular la altura del monte.



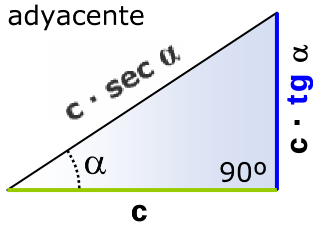
x = 650·sen 30º = 650·0,5=325

b) Conocidos un ángulo y un cateto

Para hallar los lados de un triángulo rectángulo del que se conocen las medidas un **cateto** y de un ángulo no recto, pensaremos en el triángulo:



que multiplicamos por el cateto adyacente



Calcular la altura de la torre.

x = 20·tg 45º = 20·1=20m

c) Conocidos dos lados

Para hallar el otro lado del triángulo se aplicará el teorema de Pitágoras, el ángulo se determinará como

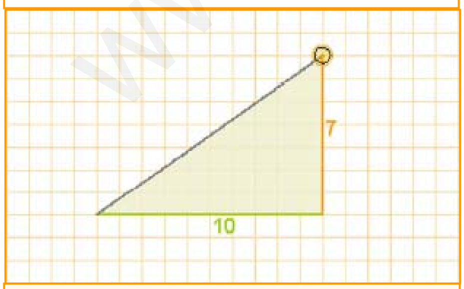
el arco cuya tangente es $\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

o bien como el arco cuyo seno es $\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

dependiendo de los datos iniciales.

Para calcular el otro ángulo basta restar de 90º.

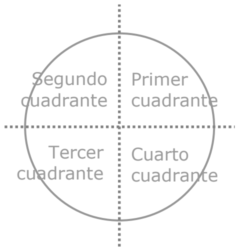
Resolver el triángulo.



hipotenusa = $\sqrt{7^2+10^2} = \sqrt{149}$
Con la calculadora: atan(0,7)=35º
Y el otro ángulo: 90º-35º=55º

5. Razones de cualquier ángulo

Recuerda que (**cos α**, **sen α**) eran las **coordenadas** del punto final del ángulo α en la circunferencia de radio unidad. Esto que vimos para los ángulos agudos podemos hacerlo extensible a ángulos cualesquiera.

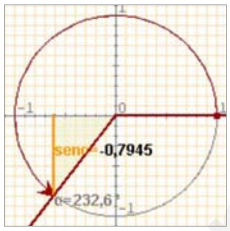


La circunferencia goniométrica es una circunferencia de radio unidad y centro el origen de coordenadas.

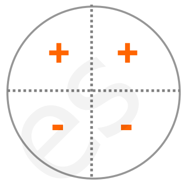
El seno

El seno de un ángulo es la coordenada **vertical** del punto final del recorrido del ángulo sobre la circunferencia goniométrica.

Observa que su valor está comprendido entre -1 y 1.



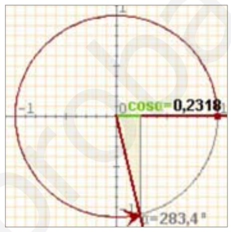
SIGNO DEL SENO



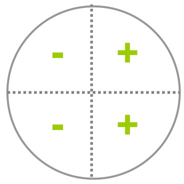
El coseno

De la misma manera que el seno de un ángulo es la ordenada, el coseno es la **abscisa** del punto final del recorrido que marca el ángulo en la circunferencia.

Su valor también está comprendido entre -1 y 1.



SIGNO DEL COSENO

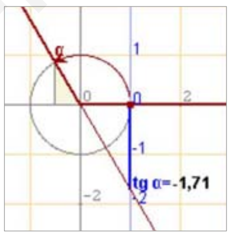


La tangente

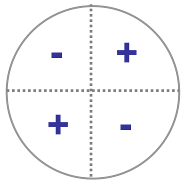
Con la relación fundamental **tg α=senα/cosα** se amplia la definición de tangente en ángulos agudos a un ángulo cualquiera.

La tangente se representa en la recta tangente a la circunferencia goniométrica en el punto (1,0).

Para los ángulos de 90º y 270º, el coseno es 0 por lo que no está definida la tangente; cuanto más se acerca un ángulo a 90º o a 270º, mas grande se hace en valor absoluto la tangente, diremos que es infinito



SIGNO DE LA TANGENTE



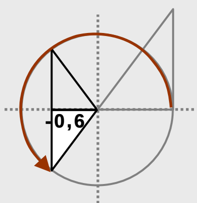
EJERCICIOS resueltos

11. Dibuja un ángulo del tercer cuadrante cuyo cos sea -0,6 y calcula el seno y la tangente.

$\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$

$\text{sen}\alpha = \pm\sqrt{0{,}64} = \pm 0{,}8$ Como está en el tercer cuadrante será -0,8

$\text{tg}\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{-0{,}8}{-0{,}6} = \dfrac{4}{3}$

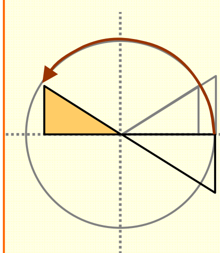


12. Calcula cosα siendo tgα=-2 y α del cuarto cuadrante.

$$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{5}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$ y elegimos el positivo ya que α está en el 4º cuadrante.

Observa

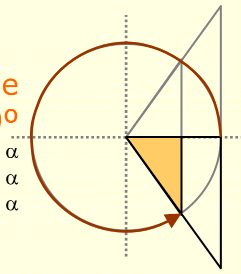


Ángulos suplementarios

sen(180º- α)=sen α

cos (180º- α)=-cos α

tg(180º- α)=-tg α



Ángulos que suman 360º

sen(360º- α)=-sen α

cos (360º- α)=cos α

tg(360º- α)=-tg α

6. Resolver problemas métricos

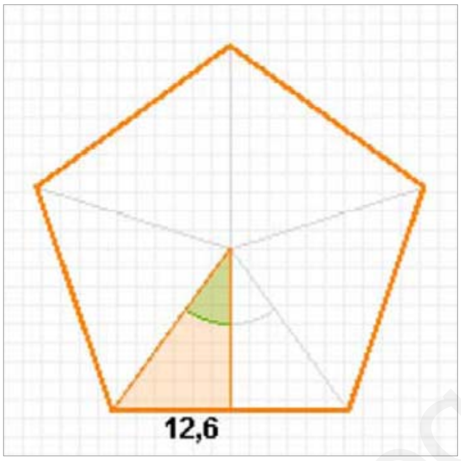
La trigonometría es útil para resolver problemas geométricos y calcular longitudes en la realidad.

Con un teodolito como el de la fotografía, se pueden medir ángulos, tanto en el plano vertical como en el horizontal, que nos permiten, aplicando las razones trigonométricas, hallar distancias o calcular alturas de puntos inaccesibles.

En estos casos aunque el triángulo de partida no sea rectángulo, trazando su altura podemos obtener dos triángulos rectángulos a resolver con los datos que tenemos.

Veamos algunos ejemplos.

Calcular áreas de polígonos regulares



Calcular el área de un pentágono regular de 25,2 cm de lado.

- ✓ El área de un polígono regular: perímetro·apotema/2

  Como se trata de un pentágono el ángulo central mide:

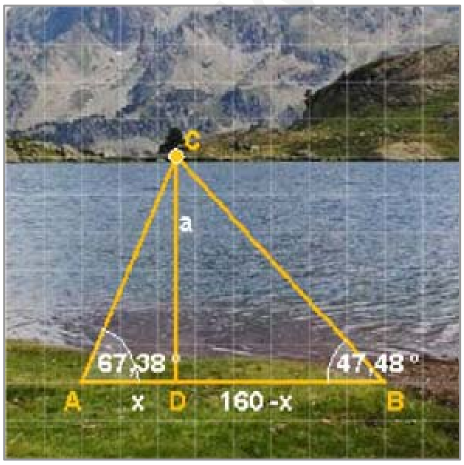
  360º/5=72º
- ✓ Nos fijamos en el triángulo rectángulo de la figura en el que un cateto es la apotema y otro la mitad del lado. En este triángulo:

  $$\text{tg}36º = \frac{12,6}{a} \Rightarrow a = \frac{12,6}{\text{tg}36º} = \frac{12,6}{0,72} = 17,34$$

  Luego el área del pentágono es:

  $$\text{Área} = \frac{25,2 \cdot 17,34}{2} = 1092,57\ \text{cm}^2$$

Calcular medidas topográficas



Para medir la anchura de un río se han medido los ángulos de la figura desde dos puntos de una orilla distantes 160 m. ¿Qué anchura tiene el río?.

- ✓ La anchura del río es la altura del triángulo ACB que no es rectángulo, pero si lo son los triángulos ADC y BDC.

  En el triángulo ADC: $\text{tg}\,67,38º = \dfrac{a}{x} \Rightarrow a = x \cdot \text{tg}\,67,38º$

  En el BDC: $\text{tg}\,47,48º = \dfrac{a}{160 - x} \Rightarrow a = (160 - x)\text{tg}\,47,48º$
- ✓ Tenemos un sistema de dos ecuaciones que resolvemos por igualación:

  $$\left.\begin{array}{l} a = 2,40x \\ a = 1,09(160 - x) \end{array}\right\} \Rightarrow 2,40x = 1,09(160 - x) \Rightarrow 3,49x = 174,40$$

  $$x = \frac{174,40}{3,49} = 50 \Rightarrow\ a = 2,40 \cdot 50 = 120\ \text{m}$$

Para practicar

1. Expresa en radianes:

   a) 15º b) 120º

   c) 240º d) 345º

2. Expresa en grados:

   a) $\frac{\pi}{15}$ b) $\frac{3\pi}{10}$

   c) $\frac{7\pi}{12}$ d) $\frac{11\pi}{6}$

3. Halla con la calculadora las siguientes razones redondeando a centésimas:

   a) sen 25º b) cos 67º

   c) tg 225º d) tg 150º

4. Un ángulo de un triángulo rectángulo mide 47º y el cateto opuesto 8 cm, halla la hipotenusa.

5. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 26 cm y un ángulo 66º. Calcula los catetos.

6. Un ángulo de un triángulo rectángulo mide 44º y el cateto adyacente 16 cm, calcula el otro cateto.

7. En un triángulo rectángulo los catetos miden 15 y 8 cm, halla los ángulos agudos.

8. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 45 cm y un cateto 27 cm, calcula los ángulos agudos.

9. En un triángulo isósceles los ángulos iguales miden 78º y la altura 28 cm, halla el lado desigual.

10. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 41 cm y los ángulos iguales 72º, calcula el otro lado.

11. El cos de un ángulo del primer cuadrante es 3/4, calcula el seno del ángulo.

12. La tangente de un ángulo del primer cuadrante es 12/5 calcula el seno.

13. El $\operatorname{sen}\alpha = 3/5$ y α es un ángulo del segundo cuadrante, calcula la tg α.

14. El $\cos\alpha = 3/5$ y α es un ángulo del cuarto cuadrante, calcula la tg α.

15. La tg $\alpha = 3$ y α es un ángulo del tercer cuadrante, calcula el cos α.

16. La apotema de un polígono regular de 9 lados mide 15 cm, calcula el lado.

17. El lado de un exágono regular mide 30 cm, calcula la apotema.

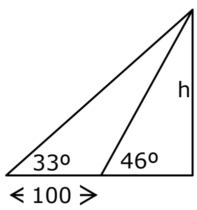
18. La apotema de un octógono regular mide 8 cm, calcula el área del polígono.

19. La longitud del radio de un pentágono regular es 15 cm. Calcula el área.

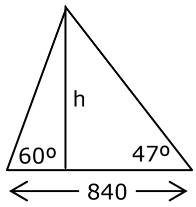
20. La sombra de un árbol cuando los rayos del sol forman con la horizontal un ángulo de 36º, mide 11m. ¿Cuál es la altura del árbol?.

21. El hilo de una cometa mide 50 m de largo y forma con la horizontal un ángulo de 37º, ¿a qué altura vuela la cometa?.

22. Para medir la altura de un edificio se miden los ángulos de elevación desde dos puntos distantes 100m. ¿cuál es la altura si los ángulos son 33º y 46º?.



23. Dos personas distantes entre sí 840 m, ven simultáneamente un avión con ángulos de elevación respectivos de 60º y 47º, ¿a qué altura vuela el avión?.



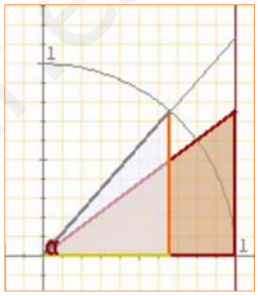
24. Para medir la altura de una montaña se miden los ángulos de elevación desde dos puntos distantes 480m y situados a 1200 m sobre el nivel del mar. ¿Cuál es la altura si los ángulos son 45º y 76º?.

Para saber más

¿Qué inclinación de la carretera indica esta señal?

Si has investigado un poco habrás visto que unos dicen que ese 10% es la pendiente matemática y otros la definen como pendiente de tráfico. Sea una u otra, la diferencia no es grande, el ángulo indicado será en el primer caso atan(10/100)=5.71º y asen(10/100)=5.74º en el segundo, y los problemas de nuestro coche para abordar esa pendiente serán similares en ambos casos.

La diferencia entre la pendiente matemática o la de tráfico será más significativa si una señal indicara a un alpinista que la inclinación de la montaña a subir es del 75%.



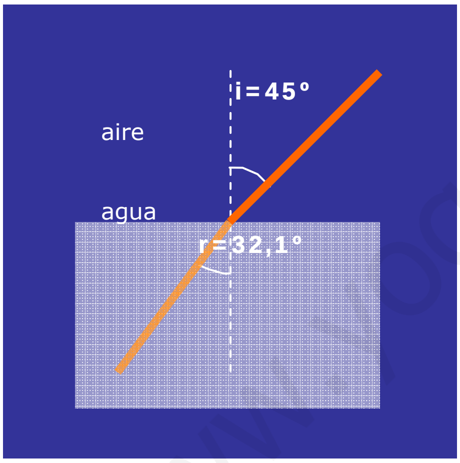
- ✓ La pendiente matemática del 75% corresponde al ángulo:

  atan(75/100)=36.86°

- ✓ La pendiente de tráfico del 75% corresponde al ángulo:

  asen(75/100)=48.59°

En la figura, la hipotenusa del triángulo marrón muestra la pendiente al interpretar el % como tangente y en el triángulo azul, se interpreta el % como seno.



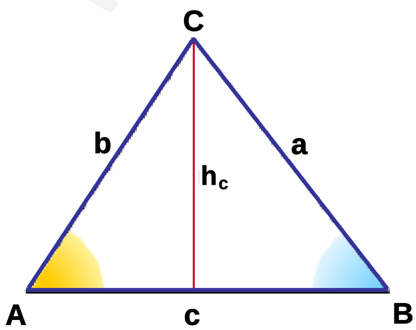
La refracción de la luz

Es el fenómeno que se produce cuando la luz pasa de un medio material a otro en el que la velocidad de propagación es distinta. De ahí que una varilla introducida en agua la veamos "quebrada".

La relación entre el ángulo de incidencia "i" y el de refracción "r", viene dada por la siguiente relación, conocida como Ley de Snell.

$$n_1 \cdot \text{sen } i = n_2 \cdot \text{sen } r$$

donde n_1 y n_2 son, respectivamente, los índices de refracción del medio 1 y del medio 2, a su vez el cociente entre la velocidad de la luz en el medio y la velocidad de la luz en el vacío.



Teorema del seno

En este tema has podido resolver triángulos que no eran rectángulos considerando la altura.

El resultado conocido como Teorema del seno, nos permite resolver triángulos cualesquiera si conocemos un lado y dos ángulos.

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Recuerda lo más importante

1 grado = $\frac{\pi}{180}$ **radianes**

grados $\xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}}$ radianes

radianes $\xrightarrow{\times \frac{180}{\pi}}$ grados

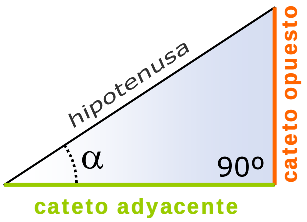
1 radián = $\frac{180}{\pi}$ **grados**

Los ángulos y su medida

Para medir ángulos empleamos grados o radianes.

Un **radián** es el ángulo cuyo recorrido es igual al radio con que ha sido trazado.

Razones trigonométricas



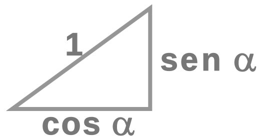
- ✓ El **seno** es el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa.
- ✓ El **coseno** es el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa.
- ✓ La **tangente** es el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

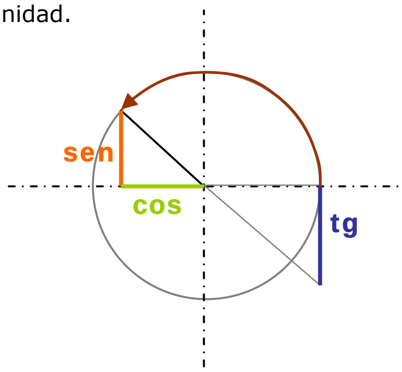
Relaciones fundamentales



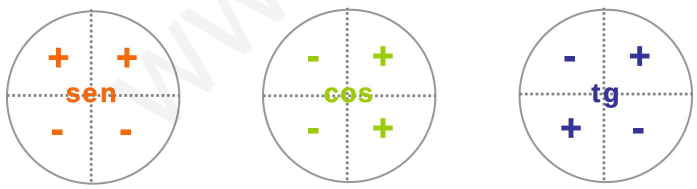
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

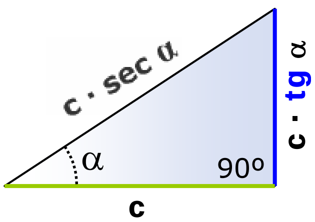
Razones de ángulos cualesquiera

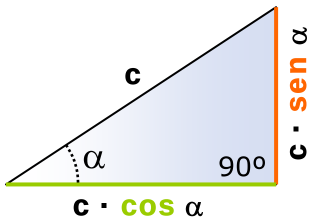
(**cos** α, **sen** α) son las **coordenadas** del punto final del ángulo α en la circunferencia goniométrica o de radio unidad.



SIGNO DE LAS RAZONES







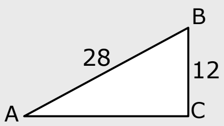
Resolver un triángulo rectángulo consiste en hallar las medidas de sus seis elementos: tres lados y dos ángulos (el tercero es 90º), conocidos un lado y un ángulo o dos lados.

Autoevaluación

1. Expresa en radianes el ángulo de 150º.

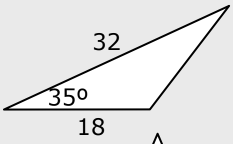
2. Calcula el valor de tg A en el triángulo ABC de la figura.

2)



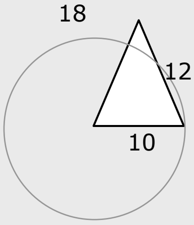
3. Calcula el área del triángulo de la figura.

3)



4. Con un compás de 12 cm de longitud hemos trazado una circunferencia de 10 cm de radio, ¿qué ángulo, en radianes, forman las ramas del compás?

4)



5. Si $\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$, y α es un ángulo agudo, calcula la tg α.

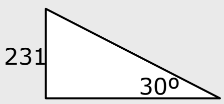
6. Si tg α=1.25 y α está en el tercer cuadrante, calcula el cos α.

7. A partir de las razones del ángulo de 30º, calcula la tg$\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

8. Si $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, y α es un ángulo agudo, calcula el cos(180º- α).

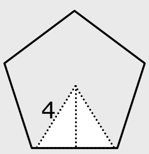
9. La altura de Torre España es de 231 m, ¿cuánto mide su sombra cuando la inclinación de los rayos del sol es de 30º?

9)



10. Calcula el área de un pentágono regular de radio 4 cm.

10)



Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) $\frac{\pi}{12}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{4\pi}{3}$ d) $\frac{23\pi}{12}$
2. a) 12º b) 54º c) 105º d) 330º
3. a) 0,42 b) 0,39 c) 1 d) -0,58
4. 10,93 cm
5. 23,75 cm, 10,57 cm
6. 15,45 cm
7. 28º 4′ 20″ 61º 55′ 40″
8. 36º 52′ 11″ 53º 7′ 49″
9. 11,9 cm
10. 25,33 cm
11. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$
12. sen α =12/13
13. tg α =-3/4
14. tg α =-4/3
15. $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$
16. 10,91 cm
17. 25,98 cm
18. lado=6,63 cm área=212,08 cm^2
19. lado=17,63 cm apot=12,14 cm área=534,97 cm^2
20. 7,99 m
21. 30 m
22. 57,41 m
23. 638,11 m
24. 639,42+1200=1839,42 m

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. $\frac{5\pi}{6}$
2. 0,47
3. 165,19 u^2
4. 0,85 rad (truncamiento)
5. tg α =4/3
6. cos α = -0,62
7. $\operatorname{tg}\frac{-5\pi}{6} = \operatorname{tg}30º = \frac{\sqrt{3}}{3}$
8. cos(180º $-\alpha$)=–cos α =–3/5
9. 400,10 m
10. 38,04 m^2

No olvides enviar las actividades al tutor ▶

cidead
Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia

ACTIVIDADES DE ESO

Nombre y apellidos del alumno:		Curso: **4º**
Quincena nº: **7**	Asignatura: **Matemáticas B**	
Fecha:	Profesor de la asignatura:	

1. Pasa a radianes o a grados, en cada caso, los siguientes ángulos:

a) 45º

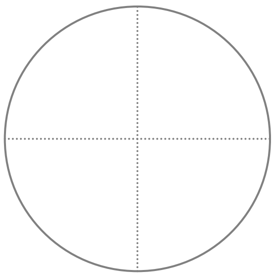
b) $\frac{2\pi}{3}$ rad

c) 240º

d) $\frac{7\pi}{4}$ rad

2. Calcula el seno y el coseno de un ángulo agudo sabiendo que su tangente vale 2.

3. Representa en la circunferencia goniométrica el ángulo $\alpha = -135º$



4. La sombra de un árbol cuando los rayos del sol forman un ángulo de 50º con la horizontal mide 8 m, ¿cuál es la altura del árbol?.

cidead@mec.es

http://cidead.cnice.mec.es

C/ TORRELAGUNA, 58
28027 MADRID
TEL: 91 3778300
FAX: 91 3778314

8

Funciones y gráficas

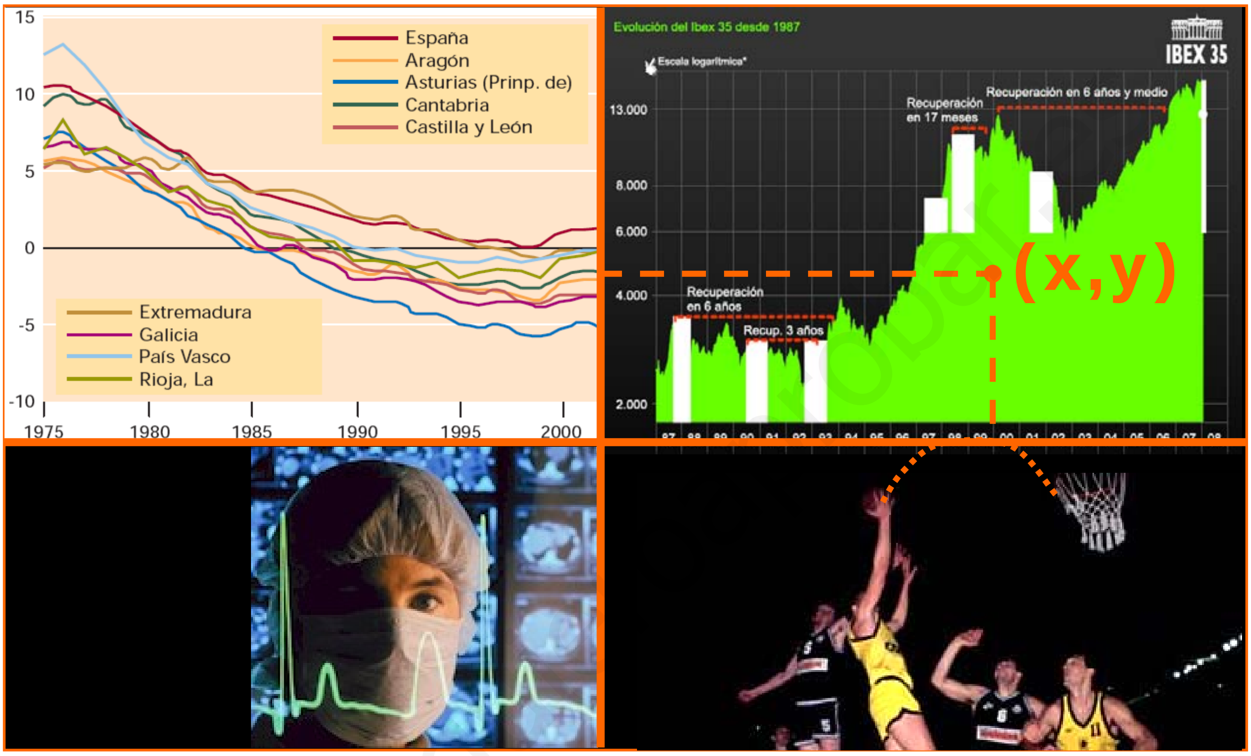
Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Conocer e interpretar las funciones y las distintas formas de presentarlas.
- Reconocer el dominio y el recorrido de una función.
- Determinar si una función es continua o discontinua.
- Hallar la tasa de variación y la tasa de variación media de una función en un intervalo.
- Determinar el crecimiento o decrecimiento de una función y hallar sus máximos y mínimos.
- Reconocer los puntos de inflexión.
- Comprobar la simetría de algunas funciones respecto al origen y al eje OY.
- Reconocer si una función es periódica.

Antes de empezar

El lenguaje de las gráficas



De las distintas formas en que puede presentarse una función, mediante un enunciado, una tabla, una expresión algebraica o una gráfica, esta última es la que nos permite ver de un sólo vistazo su comportamiento global, de ahí su importancia. En este tema aprenderás a reconocer e interpretar sus características principales.

Investiga

Imagina que montas en una noria cuyo radio mide 30 m y para subir hay que ascender 5 m desde el suelo. La noria comienza a girar, ¿cómo es la gráfica de la función que da la altura a la que te encuentras según el ángulo de giro?. Tú vas en la cabina naranja y unos amigos en la verde, ¿cómo será su gráfica?

1. Funciones reales

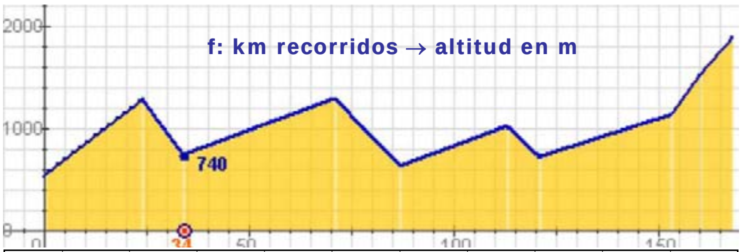
Concepto de función

Una función es una **correspondencia** entre dos conjuntos numéricos, de tal forma que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde un elemento y sólo uno del conjunto final.

Se relacionan así dos variables numéricas que suelen desisgnarse con x e y.

f: x → y=f(x)

- ✓ x es la variable independiente
- ✓ y es la variable dependiente



km	0	24	34	71	87	113	121	153	160	168
alt	540	1280	740	1290	630	1020	720	1130	1520	1882

El grafico describe el recorrido de la 9ª Etapa de la Vuelta Ciclista 2007, indicando los km totales y la altitud en los puntos principales del trayecto.
A la izquierda aparece la gráfica anterior trazada sobre unos ejes cartesianos, para simplificarla se han unido los puntos principales mediante segmentos. Se trata de una función que da la altitud según los km recorridos, observa la tabla de valores.

Gráfica de una función

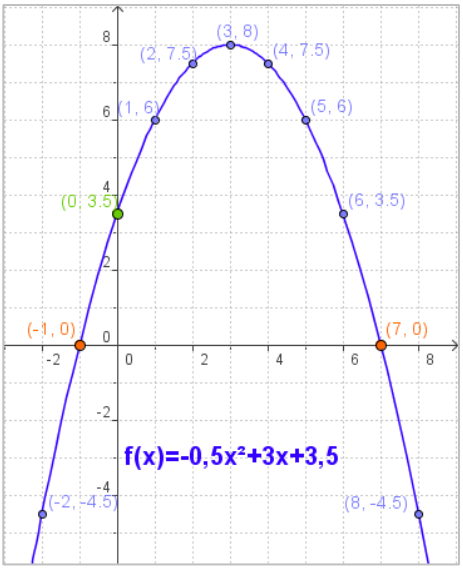
Para ver el comportamiento de una función, **f: x → y**, recurrimos a su **representación gráfica** sobre los ejes cartesianos, en el eje de abscisas (OX) la variable independiente y en el de ordenadas (OY) la independiente; siendo las coordenadas de cada punto de la gráfica: **(x, f(x))**.

En la figura está representada la función:

$$f(x)= 0,5x^2+3x+3,5$$

Haciendo una tabla de valores, se representan los puntos obtenidos, x en el eje de abscisas (OX), f(x) en el de ordenadas (OY).

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	-4,5	0	3,5	6	7,5	8	7,5	6	3,5	0	-4,5



Hay unos puntos que tienen especial interés, los que la gráfica corta a los ejes coordenados. Para calcularlos:

- ✓ Corte con el eje OY:
  Los puntos del eje de ordenadas tienen abscisa 0, basta hacer **x=0** en la fórmula de la función.
- ✓ Cortes con el eje OX:
  Los puntos del eje de abscisas tienen y=0. Se resuelve la ecuación **f(x)=0**

Cortes con los ejes

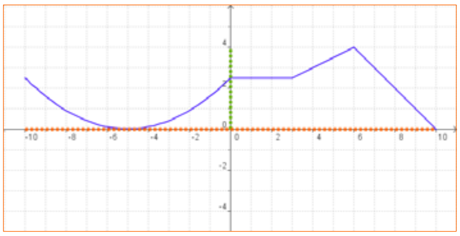
EJE OY: f(0)=3,5 Punto (0, 3,5)

EJE OX: Resolviendo la ecuación: $0,5x^2+3x+3,5=0$

Resulta:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+7}}{-2 \cdot 0,5} = 3 \pm 4 = \begin{matrix} 7 \\ -1 \end{matrix}$$

Puntos (7, 0) (-1, 0)



Dom f=[-10, 10]

Calcular Dominios

- Si la expresión analítica de la función es un polinomio, el dominio son todos los números reales.

  $f(x)=-x^4+4x^2+1$

  Dom f = $\mathbb{R}$
  Im f = $(-\infty, 5]$

- Si la expresión analítica de la función es un cociente, el dominio son todos los reales excepto los que anulan el denominador.

  $$f(x)=\frac{2}{x-1}$$

  Dom f = $\mathbb{R}-\{1\}$
  Im f = $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

- Si la expresión analítica de la función es una raíz cuadrada, el dominio está formado por los números reales para los que el radicando es positivo o cero.

  $$f(x)=\sqrt{x+3}$$

  Dom f = $[-3,+\infty)$
  Im f = $[0,+\infty)$

  $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

  Dom f = $(-2,+\infty)$
  Im f = $(0,+\infty)$

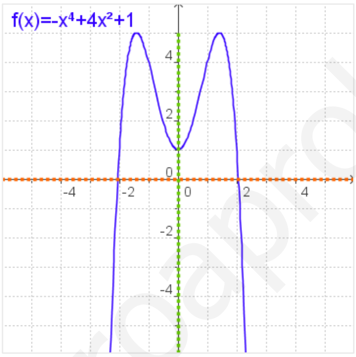
Dominio y recorrido

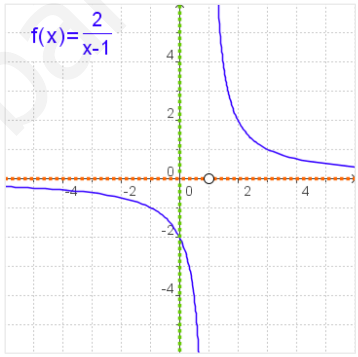
Dada una función y=f(x)

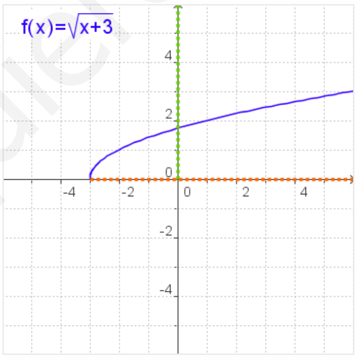
- ✓ Se llama **dominio** de f al conjunto de valores que toma la variable independiente, **x**. Se indica como **Dom f**.

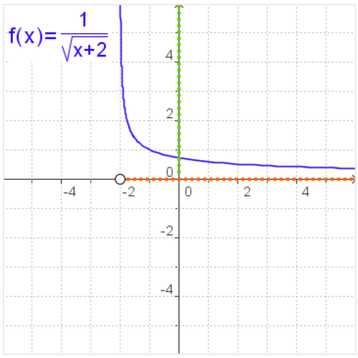
  El dominio está formado, por tanto, por los valores de x para los que existe la función, es decir, para los que hay un f(x).

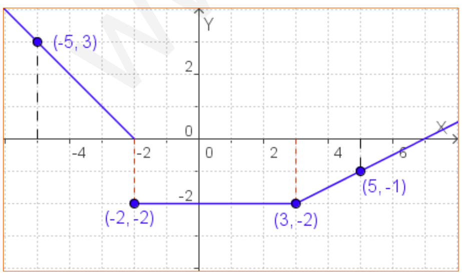
- ✓ El **recorrido** es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente, **y**, esto es el conjunto de las imágenes. Se representa como **Im f**.











$$f(x)=\begin{cases} -x-2 & x<-2 \\ -2 & -2\le x\le 3 \\ 0{,}5x-3{,}5 & x>3 \end{cases}$$

Funciones definidas a trozos

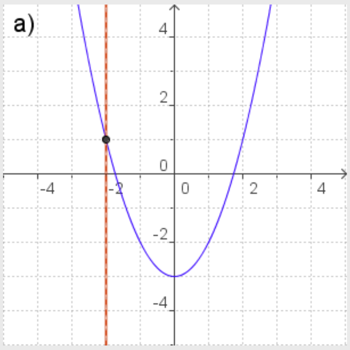
Hay un tipo de funciones que vienen definidas con distintas expresiones algebraicas según los valores de x, se dice que están **definidas a trozos**.

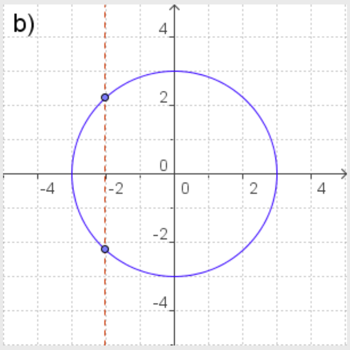
Para describir analíticamente una función formada por trozos de otras funciones, se dan las expresiones de los distintos tramos, por orden de izquierda a derecha, indicando en cada tramo los valores de x para los que la función está definida.

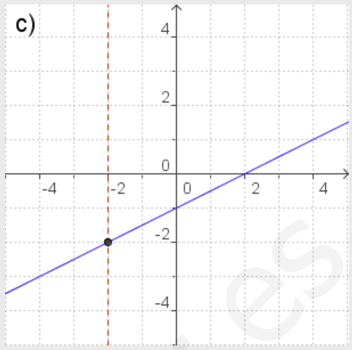
En la figura puedes ver un ejemplo de este tipo de funciones y su representación gráfica.

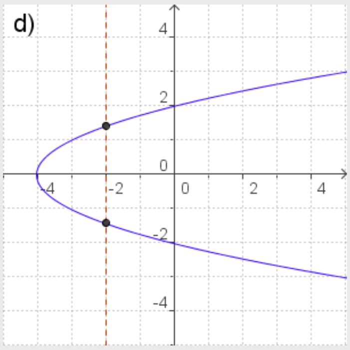
EJERCICIOS resueltos

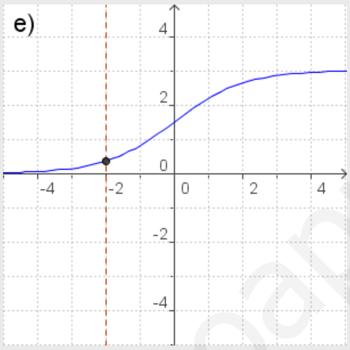
5. De las siguientes gráficas indica las que corresponden a una función y las que no.









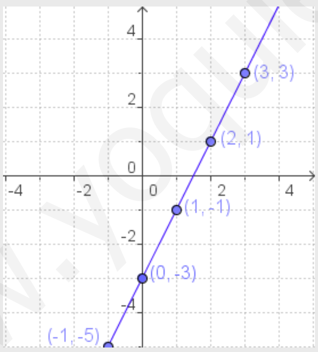


- Son gráficas de una función a), c) y e), ya que a cada x del dominio le corresponde un único valor de y.
- No son gráficas de una función b) y d)

6. Haz una tabla de valores, dibuja los puntos obtenidos y representa la función.

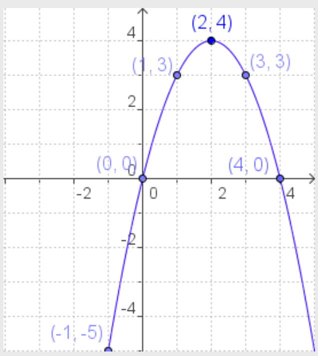
a) $f(x)=2x-3$

x	f(x)
0	-3
1	-1
2	1
3	3
-1	-5
-2	-7



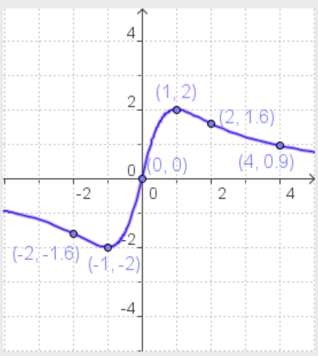
b) $f(x)=-x^2+4x$

x	f(x)
0	0
1	3
2	4
3	3
4	0
-1	-5



c) $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$

x	f(x)
0	0
1	2
-1	-2
2	1,67
-2	-1,67
4	0,9



- RECUERDA

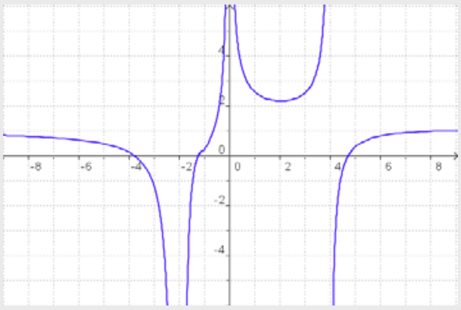
  Para hacer una tabla de valores, a partir de la expresión de una función, sustituye en la fórmula la x por los valores que desees, opera y calcula los correspondientes de y=f(x). En general procura alternar valores positivos y negativos.

  Dibuja los puntos (x,y) así obtenidos, y únelos.

EJERCICIOS resueltos

3. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a)



Dom f = IR– {-2, 0, 4}

b)

Dom f = IR – {-1, 1, 5}

En los puntos indicados, en ambos casos, no se puede encontrar f(x) en la gráfica.

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$

Dom f = IR ya que es un polinomio

d) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$

Dom f = IR – {2}

e) $f(x) = \sqrt{x-5}$

x-5≥0, x≥5 ⇒ Dom f = [5, +∞)

f) $f(x) = \sqrt{5-x}$

5-x≥0, 5≥x ⇒ Dom f = (-∞ , 5]

g) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x+4}}$

x+4>0, x>-4 ⇒ Dom f = (-4, +∞)

h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

2-x>0, 2>x ⇒ Dom f = (-∞ , 2)

(En estos casos -4 y 2, respectivamente, no son del dominio ya que anulan el denominador)

4. En las siguientes funciones, definidas a trozos, calcula las imágenes de los valores de x indicados.

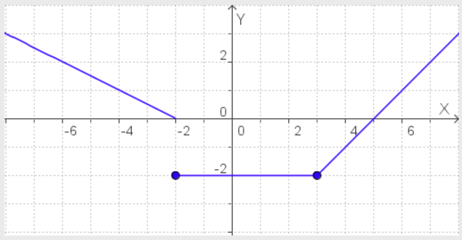
a) $f(x) = \begin{cases} -0{,}5x - 1 & \text{si} \quad x < -2 \\ -2 & \text{si} \quad -2 \le x \le 3 \\ x - 5 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

x=-4 se sustituye arriba (-4<-2)

x=-2, x=1 y x=3 se sustituyen en la del medio, ya que están en [-2,3].

x=6 se sustituye abajo pues 6>3.

x	f(x)
-4	1
-2	-2
1	-2
3	-2
6	1



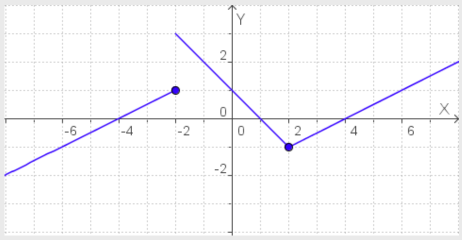
c) $f(x) = \begin{cases} 0{,}5x + 2 & \text{si} \quad x \le -2 \\ -x + 1 & \text{si} \quad -2 < x < 2 \\ 0{,}5x - 2 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$

x=-6, x=-2 se sustituye arriba.

x=0 se sustituye en la del medio, ya que están en -2<0<2.

x=2, x=4 se sustituye abajo.

x	f(x)
-6	-1
-2	3
0	1
2	-1
4	0



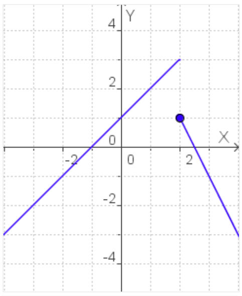
2. Propiedades de las funciones

Continuidad

La primera idea de función **continua** es la que puede ser representada de un solo trazo, sin levantar el lápiz del papel.

Cuando una función no es continua en un punto se dice que presenta una **discontinuidad**.

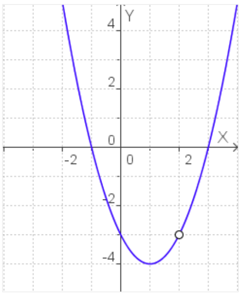
Las tres funciones dibujadas debajo son discontinuas en x=2, pero tienen distintos tipos de discontinuidad.



$f(x) = \begin{cases} x+1 & x<2 \\ -2x+5 & x \ge 2 \end{cases}$

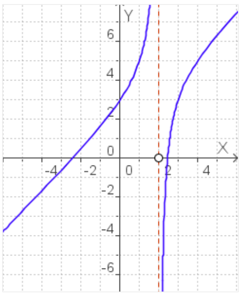
f(2)=1

La gráfica presenta un salto.



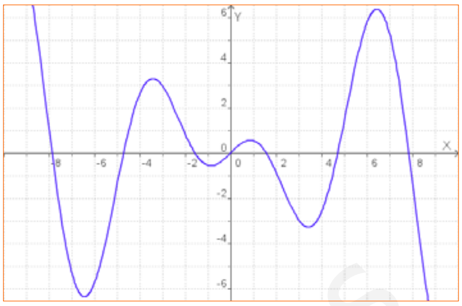
$f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x + 6}{x-2}$

x=2 no pertenece al dominio.
Esta discontinuidad se dice “evitable”.



$f(x) = \dfrac{x^2 - 6}{x-2}$

x=2 no pertenece al dominio.
La gráfica presenta un salto infinito.



Una función y=f(x) es continua en x=a si:

- La función está definida en **x=a**, existe **f(a)=b**.
- Las imágenes de los valores próximos a **a** tienden a **b**.

Hay varias razones por las que una función no es continua en un punto:

- Presenta un salto.
- La función no está definida en ese punto, o si lo está queda separado, hay un "agujero" en la gráfica.
- La función no está definida y su valor crece (o decrece) indefinidamente cuando nos acercamos al punto.

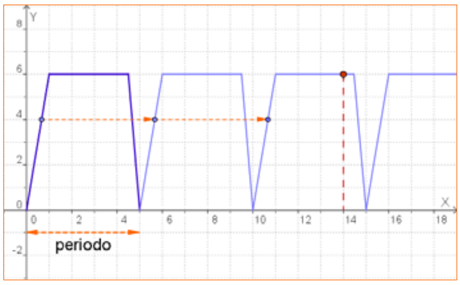
Funciones periódicas

En la naturaleza y en tu entorno habitual hay fenómenos que se repiten a intervalos regulares, como el caso de las mareas, los péndulos y resortes, el sonido...

Las funciones que describen este tipo de fenómenos se dicen **periódicas**

Una **función** es **periódica** cuando su valor se repite cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. El valor de este intervalo se llama **periodo**.

f(x+periodo)=f(x)



Una cisterna se llena y vacía automáticamente expulsando 6 litros de agua cada 5 minutos, siguiendo el ritmo de la gráfica. Cuando el depósito está vacío comienza el llenado, que cuesta 1 minuto, permanece lleno 3,5 minutos y se vacía en 0,5 minutos. Este proceso se repite periódicamente.

Para conocer el volumen de agua en el depósito en cada instante conocer lo que ocurre en estos primeros 5 minutos. Así a los 14 minutos, la cantidad de agua es:

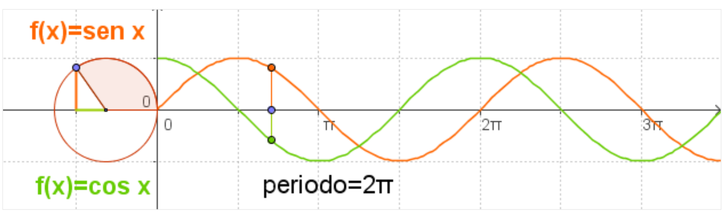
$$f(14)=f(4+2\cdot 5)=f(4)=6$$

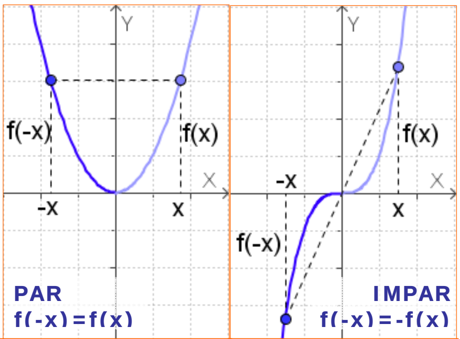
Al dividir 14:5, cociente=2 resto=5

En general, si el periodo es 5:

$$\mathbf{f(x+5\cdot n)=f(x)}$$

Dos funciones periódicas importantes:





Cuando se dobla la gráfica por el eje de ordenadas las dos ramas coinciden.	Cuando se dobla la gráfica por ambos ejes las dos ramas coinciden.

Simetrías

La gráfica de algunas funciones puede presentar algún tipo de simetría que si se estudia previamente, facilita su dibujo.

- ✓ Una función es **simétrica** respecto al **eje OY**, si **f(-x)=f(x)**.
  En este caso la función se dice **PAR**.
- ✓ Una función es **simétrica** respecto al **origen de coordenadas** cuando **f(-x)=-f(x)**.
  En este caso la función se dice **IMPAR**.

Observa los gráficos para reconocerlas.

EJERCICIOS resueltos

5. Calcula el valor de k para que las siguientes funciones sean continuas en el punto en que cambia la gráfica:

a) $f(x)=\begin{cases} 0{,}5x+k & x\le 4 \\ x-3 & x>4 \end{cases}$

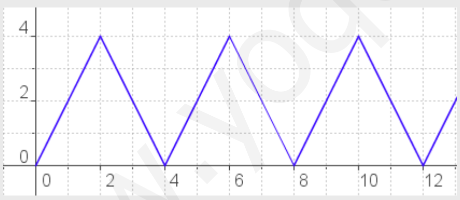
$f(4)=0{,}5\cdot 4+k=2+k$
Si se hubiera definido en el otro tramo sería:
$f(4)=4-3=1$
como ambos tramos deben coincidir:
$2+k=1 \Rightarrow k=1-2=-1$

b) $f(x)=\begin{cases} k & x\le 1 \\ -x+1 & x>1 \end{cases}$

$f(1)=k$
Si estuviera definida en el otro tramo sería:
$f(1)=-1+1=0$
como ambos tramos deben coincidir:
$k=0$

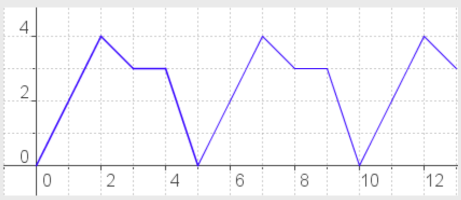
6. ¿Cuál es el periodo de las funciones siguientes?. En cada caso calcula f(45).

a)



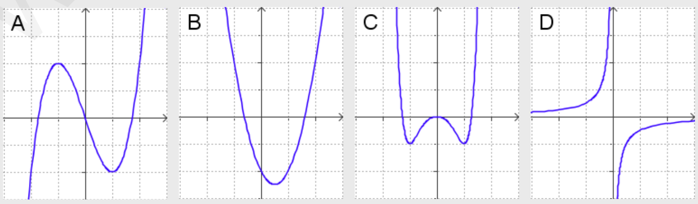
Periodo = 4
$45=4\cdot 11+1$ $\quad f(45)=f(1)=2$

b)



Periodo = 5
$45=5\cdot 9$ $\quad f(45)=f(0)=0$

7. De entre las siguientes gráficas selecciona las que corresponden a funciones pares y a funciones impares.



Par: C
Impares: A y D
B no es par ni impar

8. ¿Las funciones siguientes (corresponden a las de ej.7) son pares ó impares?

a) $f(x)=x^3-3x$	$f(-x)=(-x)^3-3(-x)=-x^3+3x=-f(x)$	IMPAR
b) $f(x)=2x^2-2x-2$	$f(-x)=2(-x)^2-2(-x)-2=2x^2+2x-2$	Ni PAR ni IMPAR
c) $f(x)=x^6-x^4-x^2$	$f(-x)=(-x)^6-(-x)^4-(-x)^2=2x^6-x^4-x^2=f(x)$	PAR
d) $f(x)=-1/x$	$f(-x)=-1/(-x)=1/x=-f(x)$	IMPAR

3. Tasa de variación y crecimiento

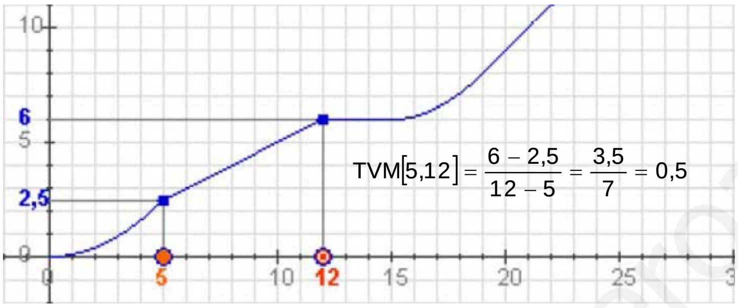
Tasa de variación de una función

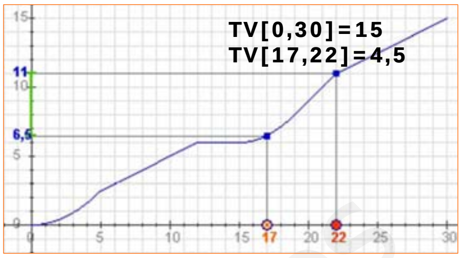
La **tasa de variación** o **incremento** de una función es el aumento o disminución que experimenta una función al pasar la variable independiente de un valor a otro.

$$\mathbf{TV[x_1,x_2]=f(x_1)-f(x_2)}$$

De más utilidad resulta calcular la llamada **tasa de variación media**, que nos indica la variación relativa de la función respecto a la variable independiente:

$$\mathbf{TVM[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}$$

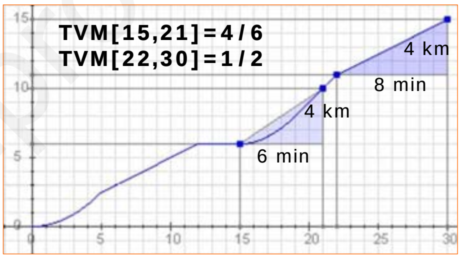




La gráfica representa la distancia en km recorrida de un ciclista en función del tiempo, en minutos, empleado.

La TV corresponde a la distancia recorrida en un intervalo de tiempo.

La TVM es la velocidad media en un intervalo de tiempo determinado.



Crecimiento y decrecimiento

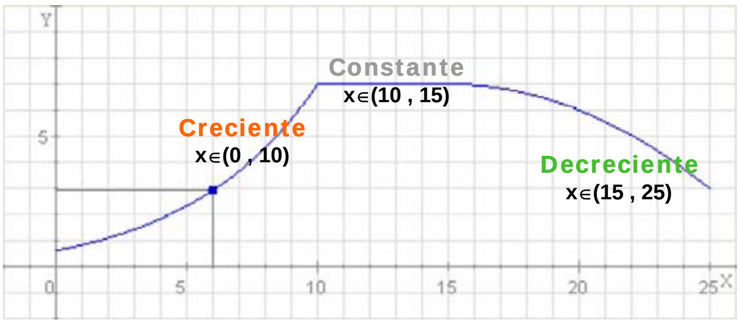
Una característica de las funciones que se puede visualizar fácilmente en las gráficas es la monotonía. Cuando al aumentar el valor de x aumenta el valor de y=f(x), la gráfica "asciende" y se dice que la función es **creciente**. Si por el contrario al aumentar x disminuye y, la gráfica "desciende", y la función **decrece**. Precisando un poco más:

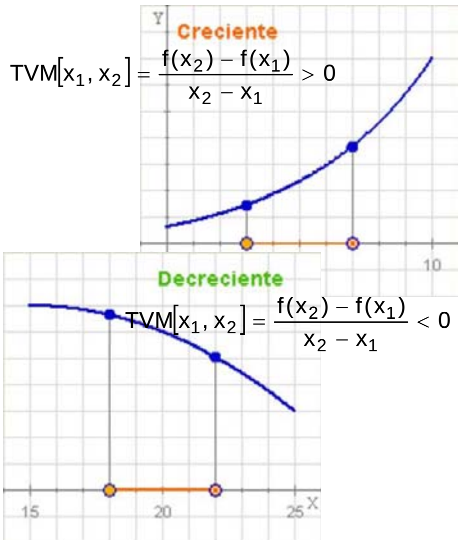
Una **función** es **creciente** en un intervalo, cuando dados dos puntos cualesquiera del mismo

- Si $\mathbf{x_1<x_2}$ entonces $\mathbf{f(x_1)<f(x_2)}$

Y será **decreciente**:

- Si $\mathbf{x_1<x_2}$ entonces $\mathbf{f(x_1)>f(x_2)}$



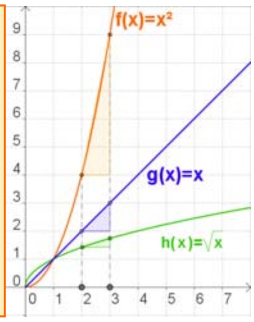


Todas las funciones no crecen o decrecen, de la misma manera.

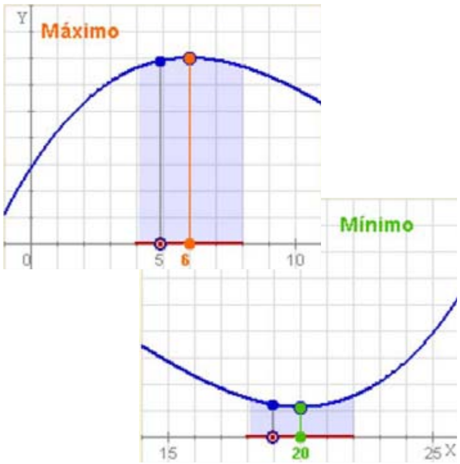
$f(x)=x^2$ es la que crece más deprisa,

$g(x)=x$ tiene un crecimiento lineal,

$h(x)=\sqrt{x}$ crece más lentamente.

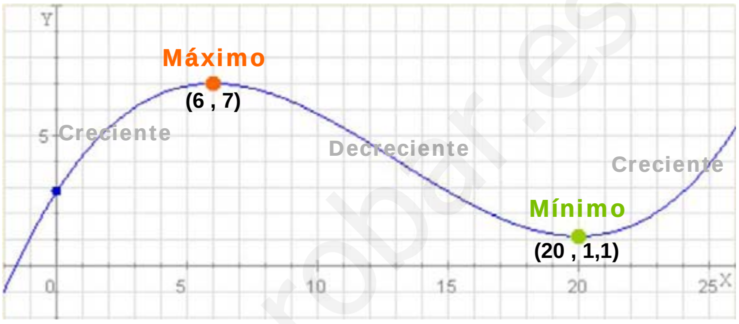


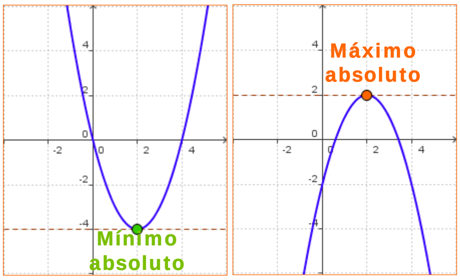
Máximos y mínimos



Dada una función continua en un punto x=a, se dice que presenta un **máximo relativo**, si a la izquierda de dicho punto la función es creciente y la derecha la función es decreciente.

Si, por el contrario, la función es creciente a la izquierda y decreciente a la izquierda hay un **mínimo relativo**.

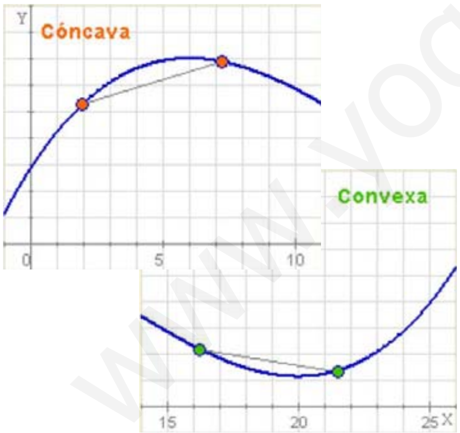




Si se verifica que f(a)>f(x) para cualquier valor x del dominio, y no sólo para los valores de "alrededor", se habla de **máximo absoluto** en x=a.

Y análogamente se dice que en a hay un **mínimo absoluto** si f(a)<(f(x) para cualquier x del dominio.

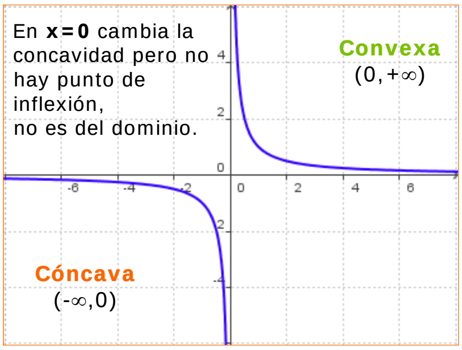
Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

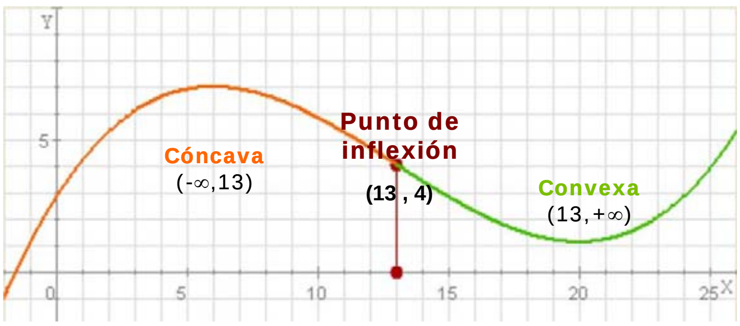


Otra característica de interés en las gráficas de las funciones es la concavidad, estudiar los intervalos en los que la gráfica se curva hacia abajo o hacia arriba.

- ✓ Una función es **cóncava** en un intervalo si el segmento que une dos puntos cualesquiera de la curva queda debajo de ella, y **convexa** si queda por encima.

Los puntos del dominio en los que la función pasa de cóncava a convexa o viceversa, se llaman **puntos de inflexión**.





EJERCICIOS resueltos

9. Calcula la tasa de variación media de las funciones siguientes entre los puntos indicados. Comprueba en la figura que en las funciones cuyo gráfico es una recta la TVM es constante.

a) y=2x+3

$TVM[1,3]=\dfrac{9-5}{3-1}=\dfrac{4}{2}=2$

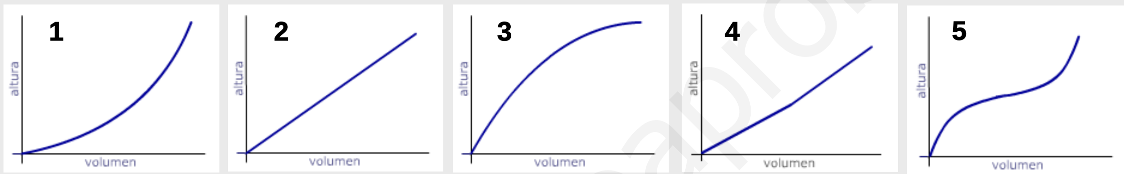
$TVM[-5,-2]=\dfrac{-1+7}{-2+5}=\dfrac{6}{3}=2$

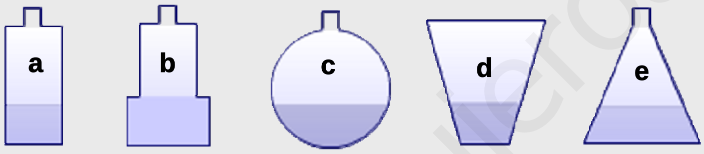
b) y=0,5x+3

$TVM[1,3]==\dfrac{4,5-3,5}{2}=0,5$

$TVM[-3,0]=\dfrac{3-1,5}{3}=0,5$

10. Las gráficas representan el llenado de los distintos recipientes, ¿qué gráfica corresponde a cada uno?

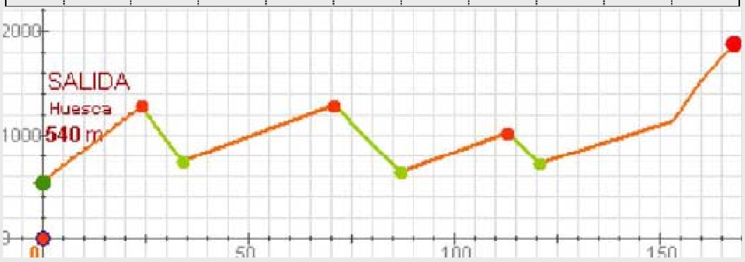




a → 2
b → 4
c → 5
d → 3
e → 1

11. Recuerda la función que daba el "perfil" de una etapa de la Vuelta, que viste en el primer capítulo, a) escribe los intervalos de crecimiento o decrecimiento; b) ¿En qué punto kilométrico se alcanzan los máximos relativos?, ¿qué valor toman?, ¿y los mínimos?; c) Hay máximo ó mínimo absoluto?

km	0	24	34	71	87	113	121	153	160	168
alt	540	1280	740	1290	630	1020	720	1130	1520	1882



a)
Creciente:
(0,24)U(34,71)U(87,113)U(121,168)
Decreciente:
(24,34)U(71,87)U(113,121)

b)
MÁX: x=24, y=1280
x=71, y=1290
x=113, y=1020
MÍN: x=34, y=740
x=87, y=630
x=121, y=720

c)
En este caso la función tiene máximo y mínimo absolutos, que se alcanzan ambos en los extremos del dominio, mín en x=0 de valor 540 m, máx en x=168 de valor 1882 m.

Para practicar

1. Considera la función que a cada nº le asigna su cuadrado menos 1. Escribe su expresión analítica y calcula la imagen de -1, 1 y 2. Calcula también los cortes con los ejes.

2. Considera la función que a cada nº le asigna su mitad más 3. Escribe su expresión analítica y calcula la imagen de -1, 1 y 3. Calcula también los cortes con los ejes.

3. Considera la función que a cada nº le asigna su doble menos 5. Escribe su expresión analítica y calcula la imagen de -2, -1 y 1. Calcula también los cortes con los ejes.

4. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=-2x^2+5x-6$

b) $f(x)=\dfrac{2x}{2x-4}$

c) $f(x)=\sqrt{-4x^2+12}$

d) $f(x)=\sqrt{4x^2+20}$

e) $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{2x-4}}$

5. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x-2}{x-3}$ b) $f(x)=\dfrac{-x}{x+3}$

6. Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indica:

a) $f(x)=\begin{cases} x+2 & x\le 1 \\ -x+2 & x>1 \end{cases}$ en $x=1$

b) $f(x)=\begin{cases} 2x+2 & x\le 0 \\ x+2 & x>0 \end{cases}$ en $x=0$

c) $f(x)=\begin{cases} -x+3 & x\le -1 \\ 4 & x>-1 \end{cases}$ en $x=-1$

d) $f(x)=\begin{cases} -x+3 & x\le -1 \\ 4 & x>-1 \end{cases}$ en $x=-1$

7. Estudia la simetría de las funciones:

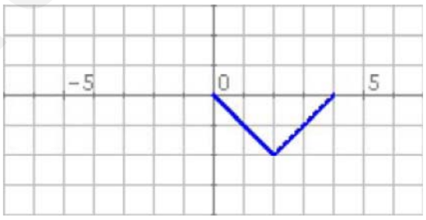
a) $f(x)=x^3+2x$ b) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{5x^2}$

c) $f(x)=2\sqrt{x^2+1}$ d) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

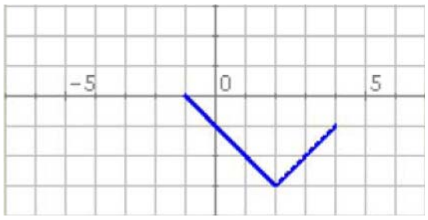
e) $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{2x}$ f) $f(x)=x^4-3x^2-3$

8. En cada caso la gráfica representa un tramo o periodo de una función periódica, representa otros tramos, indica el periodo y calcula la imagen del punto de abscisa que se indica:

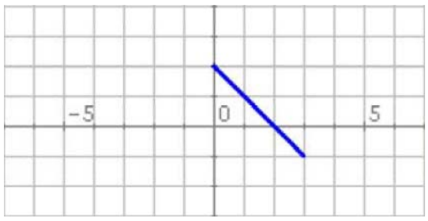
a) f(-2)



b) f(-3)

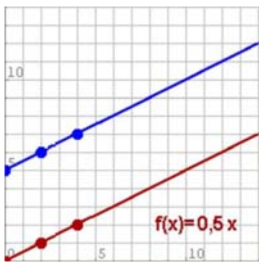


c) f(-1)

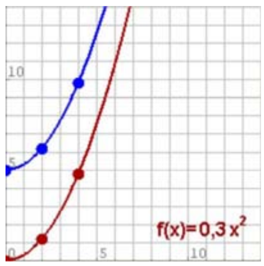


9. Calcula las TVM de las funciones de la gráfica en los intervalos [0,4] y [2,4].

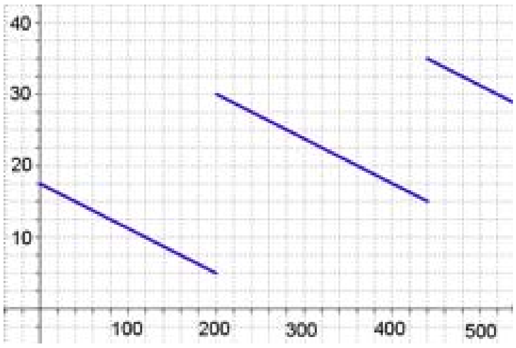
a)



b)



10. El gráfico muestra cómo varía la gasolina que hay en mi coche durante un viaje de 520 km por una autovía.



a) ¿Cuánta gasolina había al cabo de 240 km?. En el depósito caben 40 litros, ¿cuándo estaba lleno más de medio depósito?.

b) ¿En cuántas gasolineras paré?, ¿en qué gasolinera eché más gasolina?. Si no hubiera parado, ¿dónde me habría quedado sin gasolina?

c) ¿Cuánta gasolina usé en los primeros 200 km?. ¿Cuánta en todo el viaje?. ¿Cuánta gasolina gasta el coche cada 100 km en esta autovía?.

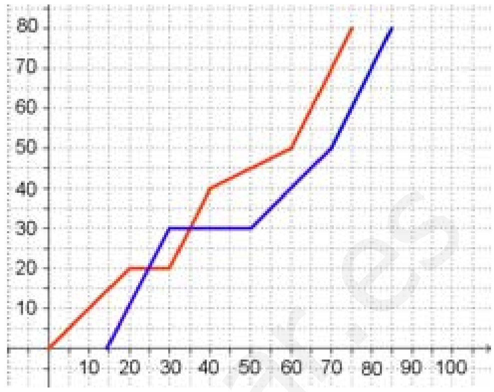
11. María y Jorge son dos personas más o menos típicas. En la gráfica puedes comparar como ha crecido su peso en sus primeros 20 años

a) ¿Cuánto pesaba Jorge a los 8 años?, ¿y María a los 12?. ¿Cuándo superó Jorge los 45 kg?.

b) ¿A qué edad pesaban los dos igual?. ¿Cuándo pesaba Jorge más que María?, ¿y María más que Jorge?

c) ¿Cuál fue el promedio en kg/año de aumento de peso de ambos entre los 11 y los 15 años?. ¿En qué periodo creció cada uno más rápidamente?

12. El gráfico da el espacio recorrido por dos coches que realizan un mismo trayecto.



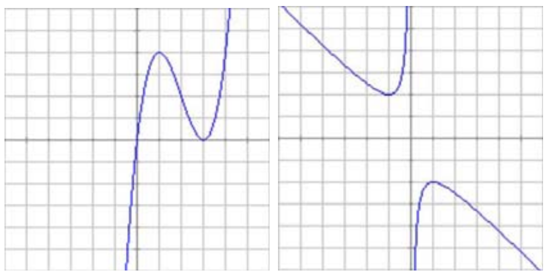
a) ¿Cuál es la distancia recorrida?. ¿Si el primer coche salió a las 10:00, a qué hora salió el 2º?. ¿Cuánto le costó a cada uno hacer el recorrido?

b) ¿Cuánto tiempo y dónde estuvo parado cada coche?. ¿En qué km adelantó el 2º al 1º?, ¿y el 1º al 2º?.

c) ¿Qué velocidad media llevaron en el trayecto total?, ¿en qué tramo la velocidad de cada coche fue mayor?.

13. Las gráficas siguientes corresponden a las funciones I y II.

I) $f(x)=x^3-6x^2+9x$ II) $f(x)=-\dfrac{x^2+1}{x}$



Calcula en cada una:

a) El dominio.

b) Los puntos de corte con los ejes.

c) Los valores de x para los que la función es positiva y negativa.

d) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

e) Los máximos y mínimos.

f) ¿Cuántos puntos de inflexión tienen?.

g) Los intervalos de concavidad y convexidad.

Para saber más

La primera función

El primero en construir una función fue **Galileo** (1564-1642). Desde lo alto de la torre inclinada de Pisa tiró dos bolas, una de hierro y otra de madera y comprobó que a pesar de la diferencia de peso, ambas llegaban al suelo a la vez, había descubierto la ley de caída de los cuerpos.

Continuando su estudio y empleando un curioso artilugio, comprobó que el espacio recorrido depende del cuadrado del tiempo, escribiendo la primera función de la historia. Pulsando aquí puedes leer más sobre el tema.

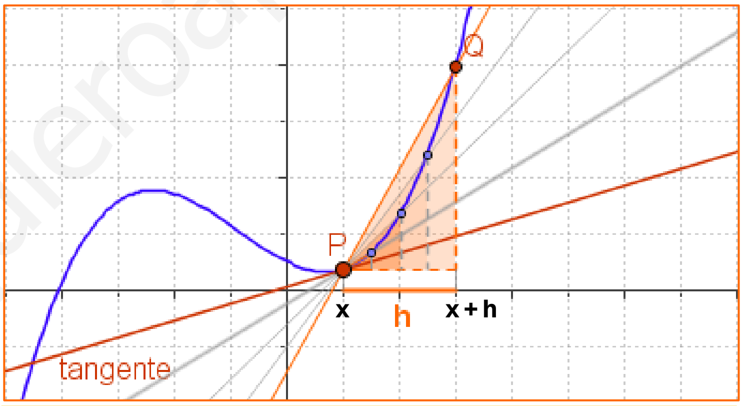
La primera definición formal de función se debe a **Euler**, quien en el libro *Introductio in analysis infinitorum*, publicado en 1748, dice:
"Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de números o cantidades constantes".
En 1755 en *Institutiones calculi differentialis*, vuelve sobre el tema acercándose más a la que hoy utilizamos.

Una función curiosa

La llamada función de Dirichlet, es la que a cada número real le asigna el 1 si es racional y el 0 si es irracional. Es discontinua en todos sus puntos.

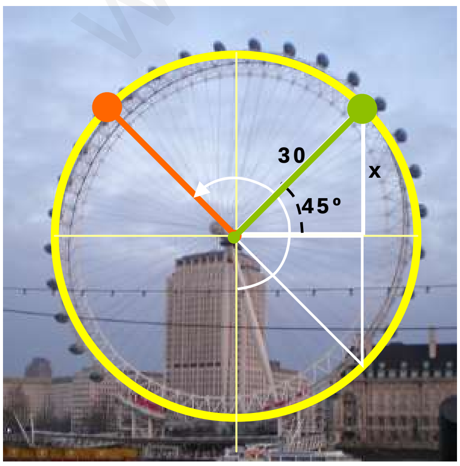
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \in R - Q \end{cases}$$

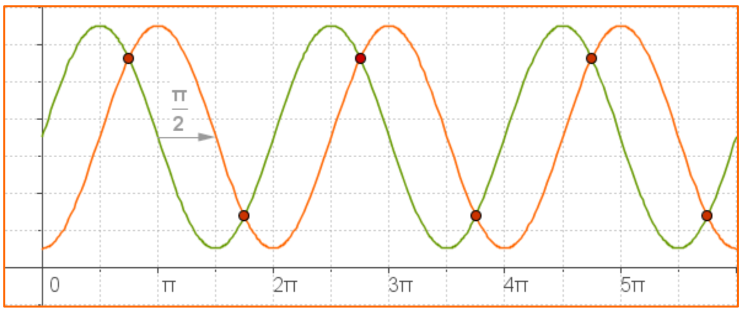
Tangente, tasa de variación media y derivada



Cuando el punto P→Q, la recta secante PQ tiende a la recta **tangente** a la curva y=f(x) en P. La pendiente de la secante es la TVM[P,Q] que tiende a la de la tangente.
Es la **derivada** de la función que Estudiarás en cursos posteriores.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

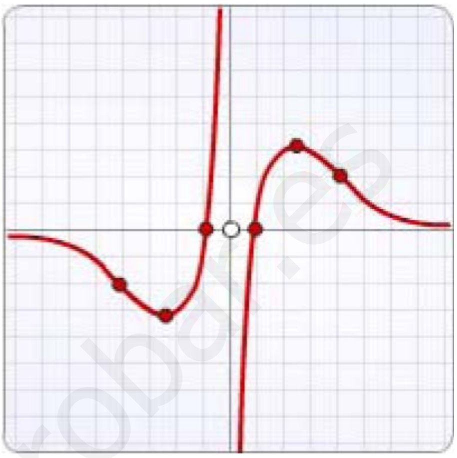




Observa las dos gráficas, ambas funciones son periódicas de periodo 2π, la gráfica verde está desfasada $\pi/2$ respecto a la naranja; fíjate donde alcanzan los máximos y los mínimos. Cuando coinciden las dos gráficas, ¿a qué altura están?,
x=r·sen 45º=21,21 m; 1) 35-21,21=13,79 2)35+21,21=56,21

Recuerda lo más importante

- Una **función** es una relación entre dos variables x e y, de modo que a cada valor de la variable independiente, **x**, le asocia un único valor de la variable **y**, la dependiente.
- El **dominio** de una función es el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar x.
- La **gráfica** de una función es el conjunto de puntos **(x,f(x))** representados en el plano.



- Una función es **continua** si puede representarse con un solo trazo. Es **discontinua** en un punto si presenta un "salto" o no está definida en ese punto.
- Una función es **periódica** de periodo t, si su gráfica se repite cada t unidades, f(x+t)=f(x).
- Una función es **simétrica** respecto al eje OY, función par, si f(x)=f(-x); y es simétrica respecto al origen, función impar, si f(-x)=-f(x).

- La **tasa de variación** de una función entre dos puntos es la diferencia: $\mathbf{TV[x_1,x_2]=f(x_2)-f(x_1)}$ La **tasa de variación media** es:

$$TVM[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Una función es **creciente** en un intervalo, cuando dados dos puntos cualesquiera del mismo
  - Si $x_1<x_2$ entonces $f(x_1)<f(x_2)$

  Y es **decreciente**
  - Si $x_1<x_2$ entonces $f(x_1)>f(x_2)$
- Una función continua en un punto x=a, presenta un **máximo** relativo, si a la izquierda de dicho punto es creciente y la derecha es decreciente. Si, por el contrario, es decreciente antes y creciente después hay un **mínimo** relativo.
- La gráfica de una función puede ser **cóncava** (hacia abajo) o **convexa** (hacia arriba). Los puntos del dominio en los que cambia la concavidad, se llaman **puntos de inflexión**.

Dominio
Todos los reales excepto el 0

Continuidad
No es continua, en 0 presenta una discontinuidad de salto infinito.

Simetría
Es simétrica respecto al origen de coordenadas, función impar.

Cortes con los ejes
Al eje de abscisas en (-1,0) y (1,0); no corta al eje de ordenadas.

Crecimiento y decrecimiento
Es creciente en (-∞, -2,5)U(2,5 ,+∞)
Y decreciente en (-2,5 ,0)U(0, 2,5)

Máximos y mínimos
Máximo en (2,5 ,3);
Mínimo en (-2,5 ,3)

Concavidad y convexidad
Puntos de inflexión
Es cóncava en (-∞, -3)U(0 , 3)
Y convexa en (-3 ,0)U(3, +∞)
(-3,0) y (3,0) son puntos de inflexión.
En x=0 cambia la concavidad pero no hay punto de inflexión ya que no es del dominio.

Autoevaluación

1. Calcula la imagen de x=0 en la función:

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\le 3\\ 5 & x>3\end{cases}$$

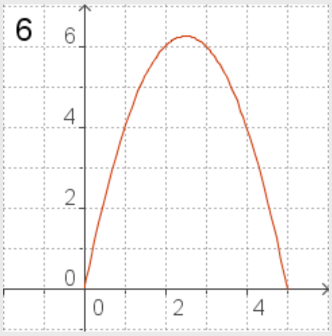
2. Calcula el dominio de la función:

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-4}$$

3. ¿Cuál de los puntos siguientes: (1,-2) (3,-15) (4,-26) no pertenece a la gráfica de la función $f(x)=-x^2-3x+2$?.

4. Calcula los puntos de corte con los ejes coordenados de la recta $y=-0,25x-0,75$.

5. Si $y=f(x)$ es una función impar y $f(3)=-2$, ¿cuánto vale $f(-3)$?

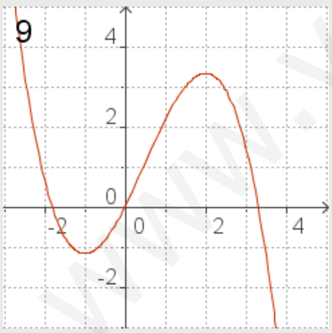


6. La gráfica muestra el primer tramo de una función periódica de periodo 5 y expresión $f(x)=-x^2+5x$ $(0\le x<5)$. Calcula f(28).

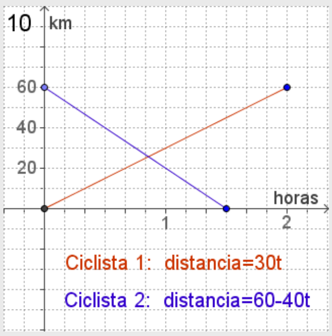
7. Averigua el valor de a para que la función sea continua en x=3.

$$f(x)=\begin{cases}2x+k & x\le 3\\ 6 & x>3\end{cases}$$

8. Calcula la TVM[-3,0] de la función $f(x)=-0,25x^2-3x+1$.



9. Determina el intervalo en que la función de la gráfica es creciente.



10. Un ciclista sale de un punto A hacia otro B distante 60 km a una velocidad constante de 30 km/h. A la vez otro ciclista sale de B en dirección a A, a 40 km/h. Observa la gráfica y calcula a cuántos km del punto A se cruzan en la carretera.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. $f(x)=x^2-1$ $f(-1)=0$, $f(2)=3$, $f(1)=0$
Corte OY: -1 Corte OX: 1 y -1

2. $y=\frac{x}{2}+3$
$f(-1)=2,5$ $f(1)=3,5$ $f(3)=4,5$
Corte OY: 3 Corte OX: -6

3. $f(x)=2x-5$
$f(-2)=-9$, $f(-1)=-7$, $f(1)=-5$
Corte OY: -5 Corte OX: 2,5

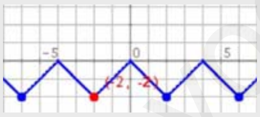
4. a) Es un polinomio, Dom(f)= IR
b) Todos los reales excepto el 2
c) $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$
d) Todos los reales
e) $(2, +\infty)$

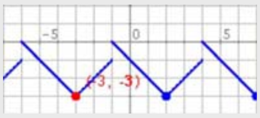
5. a) Es discontinua en x=3
b) Es discontinua en x=-3

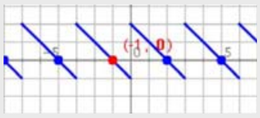
6. a) Discontinua en 1.
A la izda: 3; A la dcha: 1
b) Continua en 0.
A la izda: 2; A la dcha: 2
c) Continua en -1.
A la izda: 4; A la dcha: 4
c) Continua en -1.
A la izda: 4; A la dcha: 4

7. a) e) son impares; b) c) y f) son pares; d) no es par ni impar

8. a) TVM[0,4]=TVM[2,4]=0,5
b) TVM[0,4]=1,2; TVM[2,4]=1,8

9. a)


b)


c)


10. a) 27,5 litros; entre los km 200 y 360 y del 440 hasta el 520.
b) En dos, una en el km 200 y otra en el 440; eché más en la 1ª; a los 280 km
c) 12,5 l; 32,5 l; 6,25 l/100 km

11. a) J. 25 kg, M. 35 kg ; a los 14 años
b) A los 11 (30 kg) y a los 15 (55 kg)
J más que M: hasta los 11 y desde los 15;
M más que J: de los 11 a 15
c) 25kg; 6,25 kg/año; M entre los 11 y 12 (10 kg/año); J entre los 12-14 (10 kg/año)

12. a) 80 km; a las 10:15; 75 y 70 min
b) 10 min en km 20, 20 min en km 30; en el km 20 y en 30 respectivamente.
c) 64 km/h y 68,6 km/h; 1º: min 60-75
2º: min 15-30 y min 70-85

13. I) a) IR; b) (0,0)(3,0)
c) $y>0$ $(0,+\infty)$; $y<0$ $(-\infty,0)$;
d) crec: $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$, decrec: $(1,3)$;
e) max x=1, mín x=3;
f) Uno; conc: $(-\infty,2)$ conv: $(2,+\infty)$
II) a) IR-{0}; b) No corta
c) $y<0$ $(0,+\infty)$; $y>0$ $(-\infty,0)$;
d) decrec: $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, crec: $(-1,0)\cup(0,1)$;
e) max x=1, mín x=-1;
f) Ninguno; conv: $(-\infty,0)$ conc: $(0,+\infty)$

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. f(0)= –1

2. IR - { 2, -2}

3. (3, -15)

4. (0, -0,75) (-3,0)

5. f(-3)=2

6. f(28)=f(3)=6

7. k=0

8. TVM[-3,0] = -2,25

9. (-3, 1)

10. A partir de 4,25 min la A.

No olvides enviar las actividades al tutor

cidead
Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia

ACTIVIDADES DE ESO

Nombre y apellidos del alumno:		Curso: **4º**
Quincena nº: **8**	Asignatura: **Matemáticas B**	
Fecha:	Profesor de la asignatura:	

1. Calcula el dominio de la función $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$.

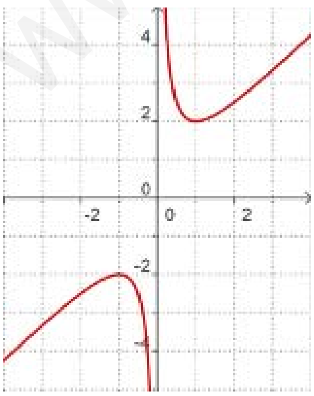
2. Calcula la tasa de variación media de la función $f(x)=x^2-5x$ entre $x=1$ y $x=3$.

3. Una empresa de alquiler de automóviles ofrece dos modalidades de alquiler con dos tipos de tarifas:

Tarifa A: 35€ por día sin límite de km
Tarifa B: 10€ por día y 0,20€ por km recorrido.

Un turista desea alquilar un coche por una semana, ¿a partir de cuántos km le interesará una u otra modalidad?

4. Indica qué características corresponden a la gráfica:



- ☐ Es una función continua
- ☐ Es una función impar
- ☐ Es una función par
- ☐ Tiene un mínimo en x=1
- ☐ Su dominio es IR
- ☐ Es creciente en (-∞, -1)
- ☐ f(-1)=-2

cidead@mec.es
http://cidead.cnice.mec.es
C/ TORRELAGUNA, 58
28027 MADRID
TEL: 91 3778300
FAX: 91 3778314

9 Funciones polinómicas

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

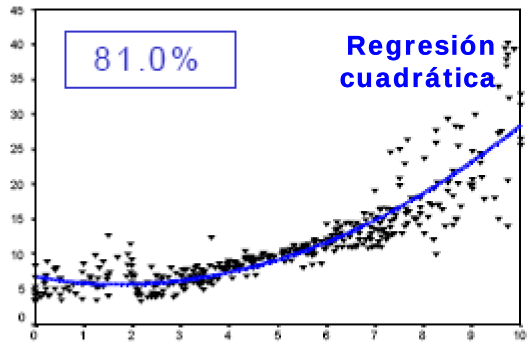
- Distinguir entre los distintos tipos de funciones cuya gráfica es una recta y trabajar con ellas.
- Determinar la pendiente de una recta y su relación con el crecimiento.
- Calcular la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados.
- Reconocer la gráfica de una función polinómica de segundo grado cualquiera.
- Representar gráficamente una función polinómica de segundo grado $y=ax^2+bx+c$.
- Determinar el crecimiento o decrecimiento de una función de segundo grado y hallar su máximo o mínimo.

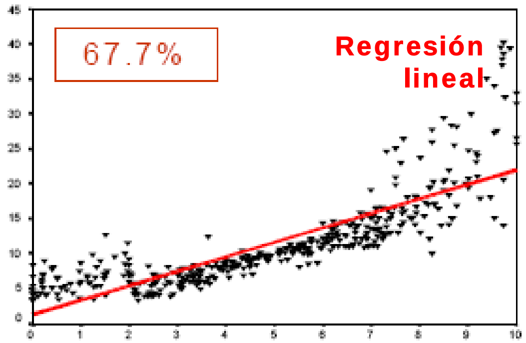
Antes de empezar

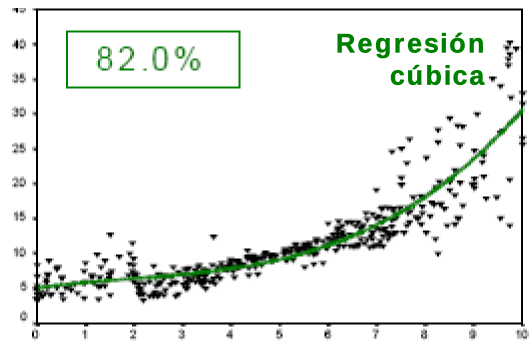
¿Para qué las funciones polinómicas?

Cuando se recogen los datos de un experimento se obtiene una nube de puntos que hay que estudiar, en la imagen se ve cómo un programa ajusta esa nube a distintas funciones polinómicas (curvas de *regresión*), indicando la bondad del ajuste en cada caso.

Gráficos tomados de http://eio.usc.es/eipc1/MATERIALES/311121873.pdf







1. Funciones polinómicas

Características

Las funciones polinómicas son aquellas cuya expresión es un polinomio, como por ejemplo:

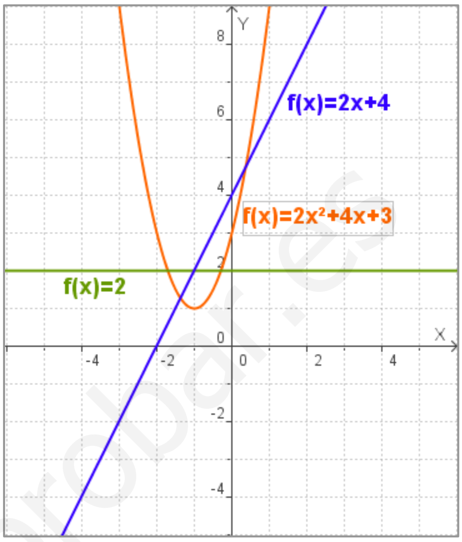
$$f(x)=3x^4-5x+6$$

Se trata de funciones continuas cuyo dominio es el conjunto de los números reales.

En la figura se pueden ver las gráficas de las funciones polinómicas de grado menor que 3, que son las que se estudiarán en esta quincena.

Observa la forma según su grado:

- ✓ las de grado cero como $f(x)=2$, son rectas horizontales;
- ✓ las de grado uno, como $f(x)=2x+4$, son rectas oblicuas;
- ✓ las de grado dos, como $f(x)=2x^2+4x+3$, son parábolas cuyo eje es paralelo al de ordenadas.



EJERCICIOS resueltos

1. En cada caso haz una tabla de valores y comprueba que los puntos obtenidos son de la gráfica.

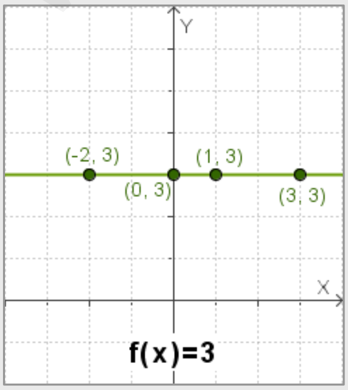
a) $f(x)=3$ b) $f(x)=-2x+3$ c) $f(x)=x^2-x+2$

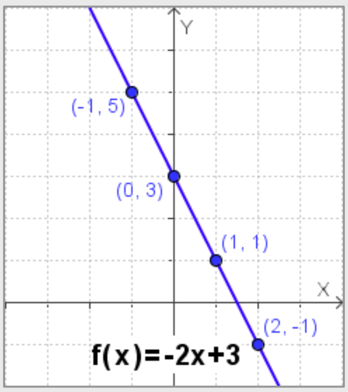
Solución

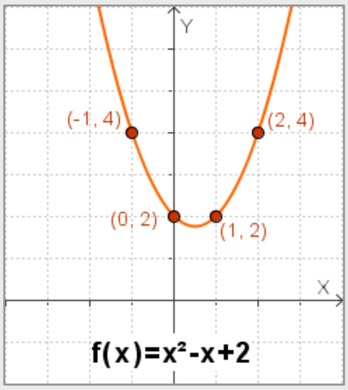
x	f(x)
0	3
1	3
2	3
-2	3

x	f(x)
0	3
1	1
2	-1
-1	5

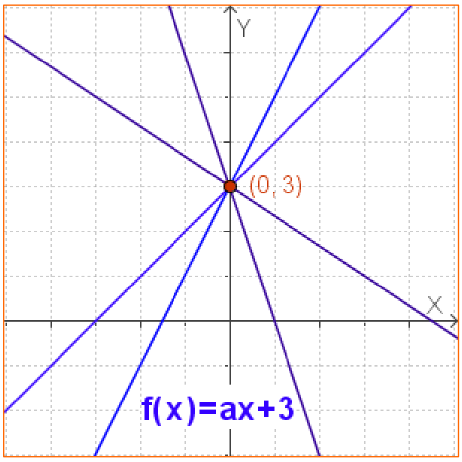
x	f(x)
0	2
1	2
2	4
-1	4







2. Funciones de primer grado

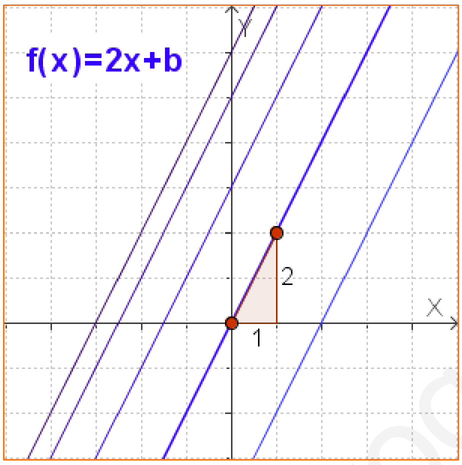


Término independiente

En cualquier función f(x) el corte de su gráfica con el eje OY o eje de ordenadas, es el punto (0, f(0)), por tanto su valor en cero define el corte con el eje de ordenadas.

En el caso de las funciones polinómicas f(0) coincide con el coeficiente de grado cero o **término independiente** de la función, por tanto nada más ver la expresión ya reconocemos un punto de su gráfica, el corte en el eje de ordenadas

> ✓ La gráfica de f(x)=ax+**b** corta al eje OY en **b**



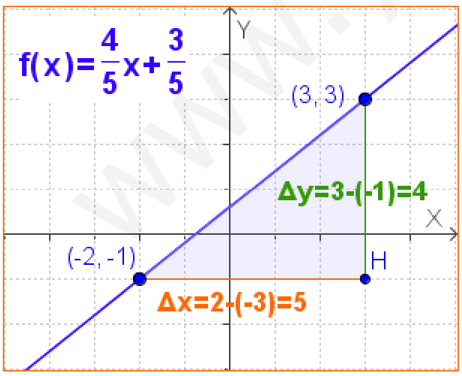
Pendiente

Es fácil ver que al modificar el coeficiente de x en estas funciones, lo que cambia es la inclinación de la recta, y ésta se mide con la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de abscisas, es decir, la **pendiente** de la recta.

> ✓ La pendiente de la recta f(x)=**a**x+b es **a**

Observa que cuando **a** es positiva la función es creciente, y cuando es negativa, decreciente.

Así, viendo los coeficientes, sabemos cómo es la gráfica de la función sin necesidad de realizar ningún cálculo.



La pendiente o $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es constante

Por tanto la ecuación de la recta que pasa por dos puntos (x_0, y_0) (x_1, y_1) es

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Recta que pasa por dos puntos

Para trazar una recta basta con dar **dos** puntos, por tanto para representar una función polinómica de primer grado dando valores, bastará con dar **dos** valores.

Si dos puntos P(3, 3) y Q(-2, -1) definen una recta, determinarán también su ecuación que podemos hallar resolviendo un sistema:

Ecuación de la recta **y=ax+b**

Pasa por P: $3a+b=3$
Pasa por Q: $-2a+b=-1$

$$\left.\begin{array}{r} 3a+b=3 \\ -2a+b=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 5a=4 \Rightarrow a=\frac{4}{5} \qquad b=\frac{3}{5}$$

Sean $P(x_0,y_0)$, $Q(x_1,y_1)$ dos puntos, la pendiente de la recta que pasa por ambos es

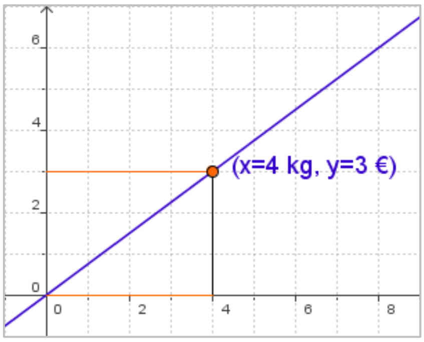
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Aplicaciones

Veamos algunos ejemplos de aplicación de las funciones polinómicas de primer grado.

1) Funciones de proporcionalidad directa

Las funciones polinómicas de primer grado con término independiente cero, representan la relación entre dos variables directamente proporcionales.



y=constante·x

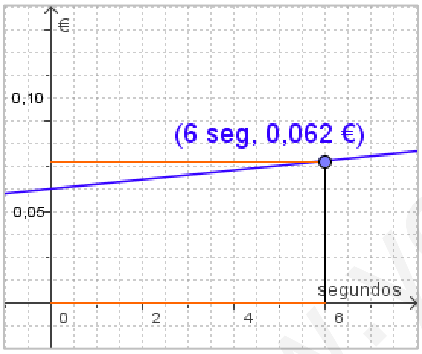
La gráfica de la función de proporcionalidad directa es una recta que pasa por el origen, y su pendiente es la constante de proporcionalidad

¿Cuánto pagaremos?
X: kg de naranjas que compramos
f(x): precio que se paga en euros

2) Tarificación telefónica por segundos

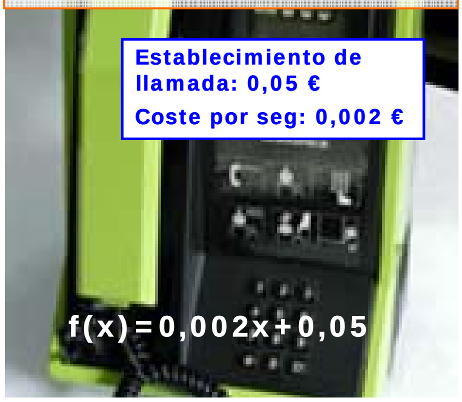
Para calcular el precio de una llamada telefónica se utilizan funciones polinómicas de primer grado.

y=precio por segundo·x+establecimiento de llamada



x seg	f(x) €
0	0,05
1	0.052
10	0,07
60	0,17

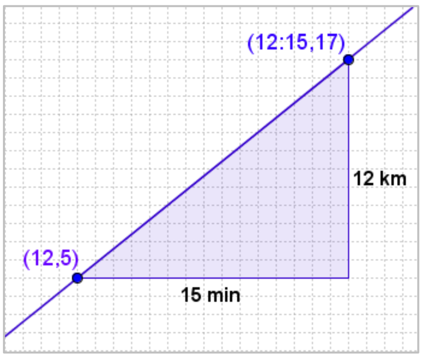
El precio de una llamada
X: segundos que dura la llamada
f(x): precio de la llamada en euros



3) Recorrido con velocidad constante

Si a las 12 estoy en el km 5 de una carretera y manteniendo una velocidad constante a las 12:15 estoy en el km 15, ¿qué velocidad llevo?.

Punto kilométrico=velocidad·t+pto. kilométrico inicial



La velocidad es la **pendiente** de la recta que pasa por los puntos (12,5) y (12:15,17)

$$\text{vel} = \frac{17-5}{15} = \frac{12}{15}\,\frac{\text{km}}{\text{min}} = \frac{12\cdot 60}{15}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 48\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

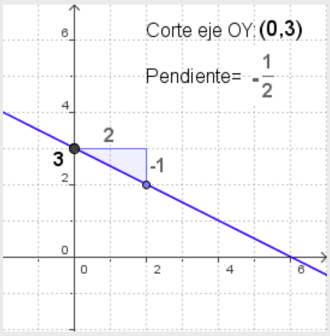
¿A qué velocidad?
t: tiempo transcurrido
f(t): punto kilométrico

EJERCICIOS resueltos

2. Representa la gráfica de f(x):

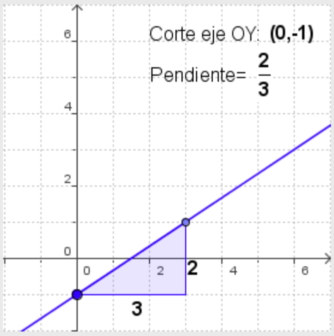
a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

Coeficiente de grado 0: **3**
Coeficiente de grado 1: **-1 / 2**



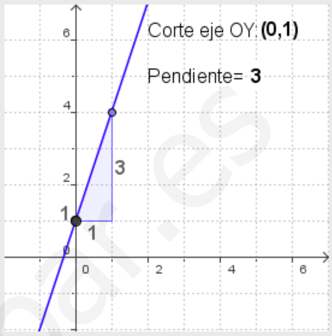
b) $f(x) = \frac{2}{3}x - 1$

Coeficiente de grado 0: **-1**
Coeficiente de grado 1: **2 / 3**

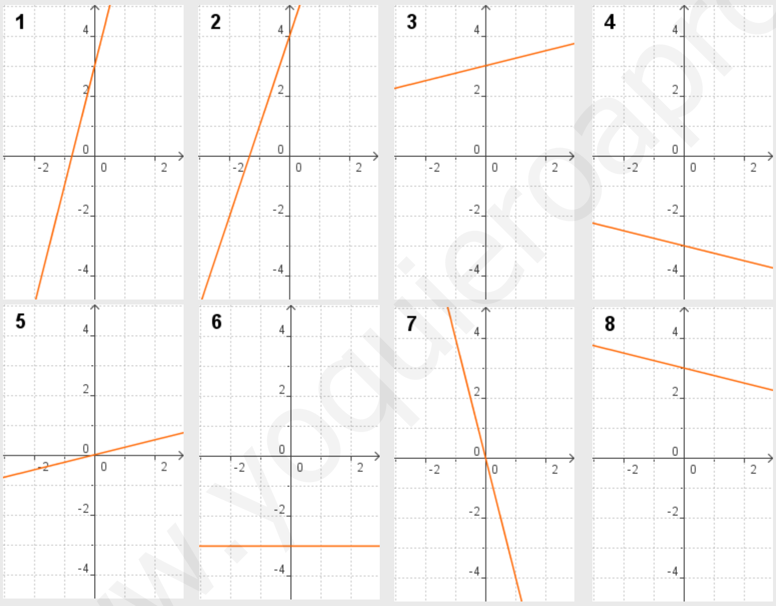


c) $f(x) = 3x + 1$

Coeficiente de grado 0: **1**
Coeficiente de grado 1: **3**



3. ¿Qué gráfica corresponde a cada ecuación?



a) y=x/4 +3 → **3**

b) y=4x+3 → **1**

c) y=-x/4-3 → **4**

d) y=-x/4 +3 → **8**

e) y=-3 → **6**

f) y=3x+4 → **2**

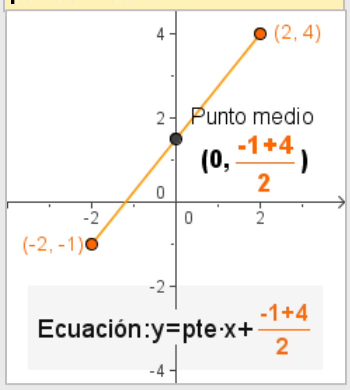
g) y=x/4 → **5**

h) y=-4x → **7**

4. ¿Qué ecuación corresponde a la recta que pasa por los puntos indicados?

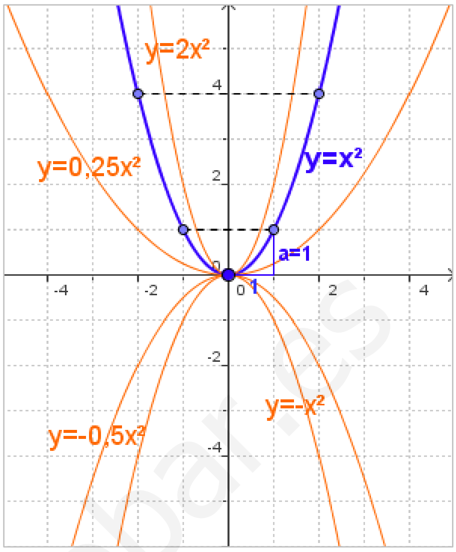
1) (-1, 5)	(1, -5)	a) y=x/5+3	→ **2**
2) (-2, 2,6)	(2, 3,4)	b) y=5x+3	→ **6**
3) (-2, -0,4)	(2, 0,4)	c) y=-x/5-3	→ **5**
4) (-2, 3,4)	(2, 2,6)	d) y=-x/5-3	→ **4**
5) (-2, -2,6)	(2, -3,4)	e) y=-3	→ **8**
6) (-1, -2)	(1, 8)	f) y=3x+5	→ **7**
7) (-1, 2)	(1, 8)	g) y=x/5	→ **3**
8) (-1, -3)	(1, -3)	h) y=-5x	→ **1**

Cuando el valor absoluto de las abscisas es el mismo, el corte con el eje OY lo define el **punto medio**.



3. Funciones de segundo grado

La gráfica de las funciones polinómicas de segundo grado es una parábola de eje vertical.

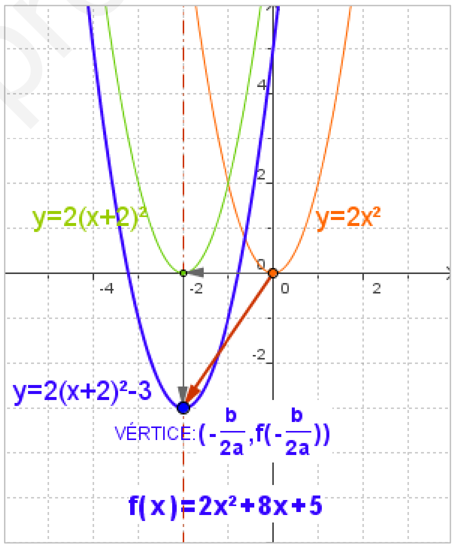


La parábola $y=ax^2$

Observa en la figura cómo se construye la gráfica de $\mathbf{f(x)=a\cdot x^2}$ y como cambia según los valores y el signo de **a**.

- ✓ Es simétrica respecto al eje OX.
- ✓ El signo de **a** determina la concavidad de la gráfica.
  - Si $\mathbf{a>0}$, tiene un **mínimo** en (0,0)
  - Si $\mathbf{a<0}$ tiene un **máximo** en (0,0)

Traslaciones de una parábola

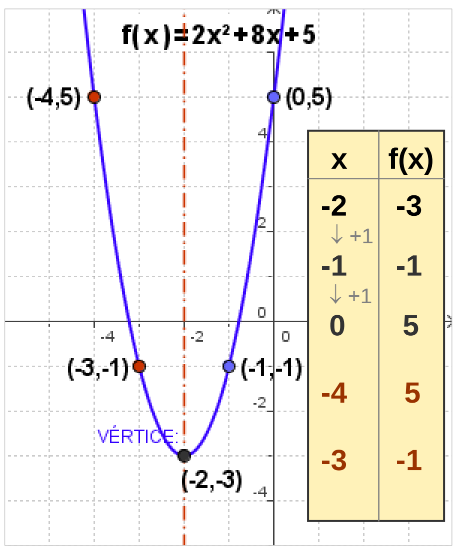


En la figura vemos la gráfica de $\mathbf{f(x)=ax^2+bx+c}$
Al modificar los valores de los coeficientes b y c, se observa que la gráfica no cambia de forma, solo se traslada, así la gráfica de $\mathbf{y=f(x)}$ tiene la misma forma que $\mathbf{y=ax^2}$ trasladada:

- ✓ $-\dfrac{b}{2a}$ unidades en **horizontal** $\rightarrow y=a\left(x-\dfrac{b}{2a}\right)^2$
  hacia la derecha si -b/(2a)>0, hacia la izquierda si -b/(2a)<0
- ✓ $c-\dfrac{b^2}{4a}$ o $f(-\dfrac{b}{2a})$ en **vertical** $\rightarrow y=a\left(x-\dfrac{b}{2a}\right)^2+c-\dfrac{b^2}{4a}$
  arriba si f(-b/(2a))>0, abajo si f(-b/(2a))<0).

> - El **eje** de simetría es $\mathbf{x=-b/(2a)}$
> - El **vértice**, máximo o mínimo, de la parábola es $\mathbf{(-b/(2a), f(-b/(2a))}$

Representar funciones cuadráticas



Para representar una función de segundo grado

$$\mathbf{f(x)=ax^2+bx+c}$$

comenzamos por colocar su vértice: $(-\dfrac{b}{2a},\ f(-\dfrac{b}{2a}))$

Se dibuja el eje de simetría y a continuación hacemos una tabla de valores aumentando en una unidad el valor de x cada vez. Cuando tenemos algunos puntos dibujamos los simétricos.

Al igual que en otras representaciones gráficas es interesante hallar los puntos de corte con los ejes,

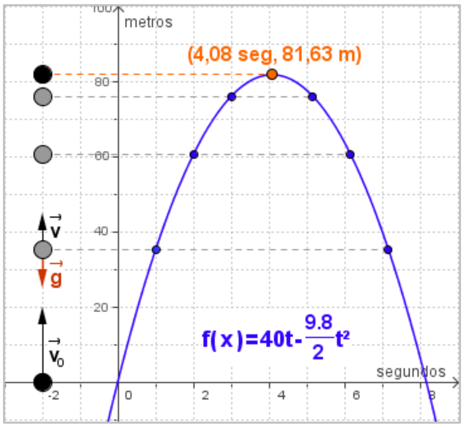
> - El corte con el eje **OY** es **c**
> - Los cortes con el eje **OX** son las soluciones de la ecuación $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$

Aplicaciones

Mediante las funciones polinómicas de segundo grado se pueden estudiar algunas situaciones, presentes en el mundo físico y la vida real.

Además el vértice de la parábola, es el máximo o mínimo relativo y a la vez absoluto de la función cuadrática correspondiente; mínimo si es convexa (hacia arriba) o máximo si es cóncava hacia abajo.

Entonces para calcular los extremos relativos de estas funciones basta calcular las coordenadas del vértice, como puedes observar en los ejemplos siguientes.



1) Movimiento uniformemente acelerado

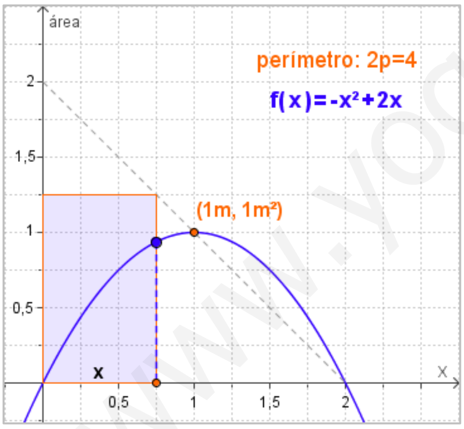
Un ejemplo de movimiento uniformemente acelerado o de aceleración constante, es el de **caída libre** en el que interviene la aceleración de la gravedad.
Las ecuaciones de este movimiento son:

$v = v_0 + gt$ $\quad$ $e = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$ $\quad$ $\mathbf{v_0}$: vel. inicial $\quad$ $\mathbf{g} \cong 9.8$ m/seg^2

- *Se lanza desde el suelo hacia arriba un objeto con velocidad inicial 40 m/seg, ¿qué altura alcanza?.*

  $\mathbf{f(x) = v_0 x - 4,9x^2}$ $\qquad$ **x**:tiempo $\quad$ $\mathbf{g} \cong -9.8$ m/seg^2

  Es una parábola de vértice $(v_0/g,\ \mathbf{f(v_0/g)})$, luego la altura máxima que alcanza es $f(v_0/g)$ m.



2) Rectángulo de área máxima

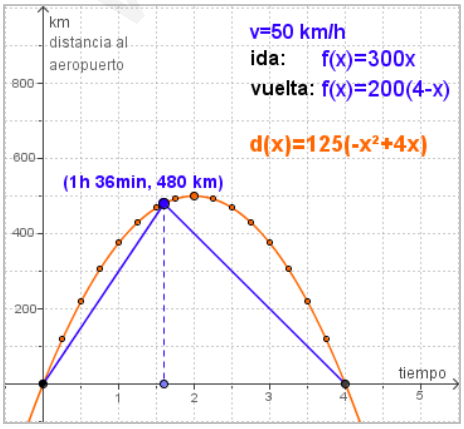
Con un mismo perímetro se pueden construir distintos rectángulos, entre todos ellos deseamos encontrar el de área máxima.

- *Entre todos los rectángulos cuyo perímetro es 2p m., ¿qué dimensiones tiene el de área máxima?.*

  Perímetro=2p $\qquad$ base=x $\qquad$ altura=2-x

  Área=base·altura $\qquad$ $f(x)=x\cdot(p-x)$ $\qquad$ $\mathbf{f(x) = -x^2 + px}$

  Es una parábola de vértice $(\mathbf{p/2},\ (p/2)^2)$, luego se trata de un cuadrado de lado p/2 m.



3) Punto de no retorno

Un avión tiene combustible para 4 horas, viajando a velocidad constante de 250 km/h sin viento. Al despegar el piloto observa que lleva viento a favor de v km/h, ¿cuál es la máxima distancia a que puede viajar con la seguridad de tener suficiente combustible para volver?.

Velocidad ida: 250+v $\qquad$ Distancia al aeropuerto: $f(x)=(250+v)x$

Vel. vuelta: 250-v $\qquad$ Distancia al aeropuerto: $f(x)=(250-v)(4-x)$

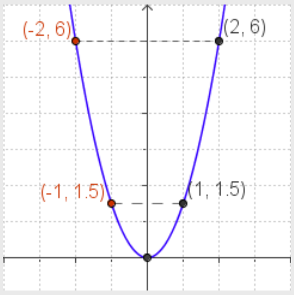
El punto en que se cortan las dos rectas es el punto de no retorno, si el piloto va más allá no tendrá combustible suficiente para volver.

Al variar la velocidad del viento los puntos de no retorno obtenidos están sobre la parábola: $\mathbf{d(x)=125x(4-x)}$

EJERCICIOS resueltos

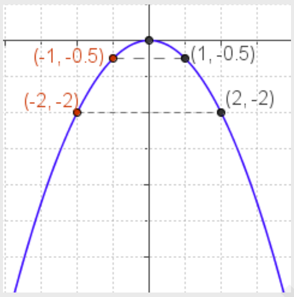
5. Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x)= 1{,}5x^2$



Vértice (0,0)
x=1 f(1)=1,5
x=2 f(2)=6
sus simétricos respecto a OY:
(-1, 1,5)
(-2, 6)

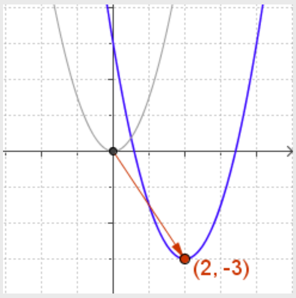
b) $f(x)=-0{,}5x^2$



Vértice (0,0)
x=1 f(1)=-0,5
x=2 f(2)=-2
sus simétricos respecto a OY:
(-1, 0,5)
(-2, -2)

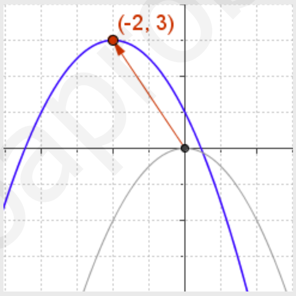
6. Escribe la ecuación de la función que resulta al trasladar el vértice de la parábola al punto indicado.

a) $y= 1{,}5x^2$ a A(2, -3)



Vértice (2,-3)
→2 unidades a la derecha:
$y=1{,}5(x-2)^2$
↓ 3 unidades hacia abajo:
$y=1{,}5(x-2)^2-3$
$y=1{,}5x^2-6x+3$

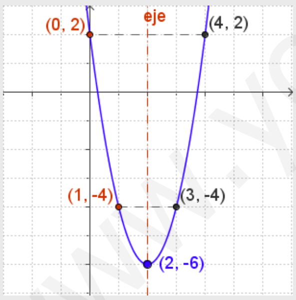
b) $y=-0{,}5x^2$ a B(-2, 3)



Vértice (-2,3)
←2 unidades a la izquierda:
$y=-0{,}5(x+2)^2$
↑ 3 unidades hacia arriba:
$y=-0{,}5(x+2)^2+3$
$y=-0{,}5x^2-2x+1$

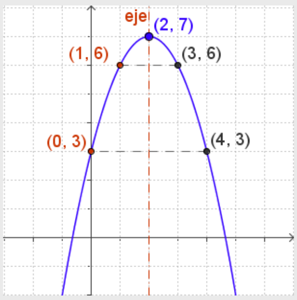
7. Representa gráficamente las parábolas siguientes:

a) $f(x)=2x^2-8x+2$



Vértice (2, -6)
Eje : x=2
x=3 f(3)=-4
x=4 f(4)=2
sus simétricos respecto al eje:
(1, -4)
(0, 2)

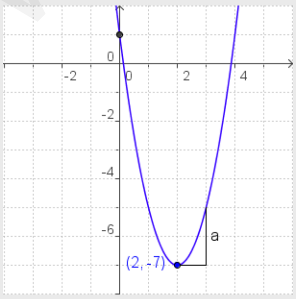
b) $f(x)=-x^2+4x+3$



Vértice (2, 7)
Eje: x=2
x=3 f(3)=6
x=4 f(4)=3
sus simétricos respecto al eje:
(1, 6)
(0, 3)

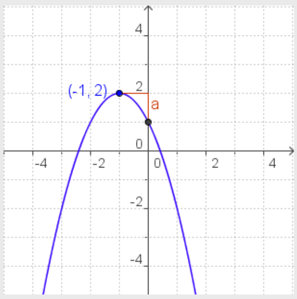
8. Escribe la ecuación $y= ax^2+bx+c$ de la parábola de la gráfica:

a)



a=2
Vértice (2, -7)
2=-b/4 ⇒ **b=-8**
Corte OY en 1
luego **c=1**
$\mathbf{y=2x^2-8x+1}$

b)



a=-1
Vértice (-1, 2)
-1=-b/(-2)
⇒ **b=-2**
Corte OY en 1
luego **c=1**
$\mathbf{y=-x^2-2x+1}$

Para practicar

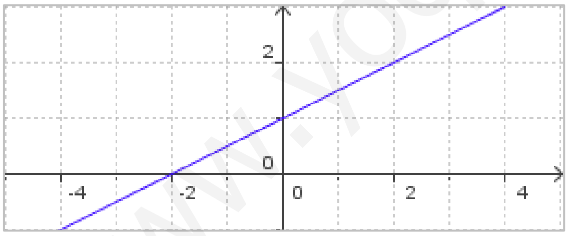
1. Escribe la ecuación de la función que representa el peso de un caballo si nace con 30 kg y aumenta a razón de 1 kg cada 2 días.

2. Escribe la ecuación de la función que representa el precio al finalizar la conexión en un ciber, si el establecimiento de la conexión cuesta 0,10 € y cada minuto vale 0,03 €.

3. Escribe la ecuación de la función que representa el nº de la página del libro que estoy leyendo, sabiendo que todos los días avanzo el mismo nº de páginas, el día 10 iba por la 290, y el día 17 por la 465.

4. Escribe la ecuación de la función que representa la cantidad total en € (IVA incluido) a pagar en una factura, en función del precio sin IVA, sabiendo que el porcentaje de aumento aplicado es del 16%.

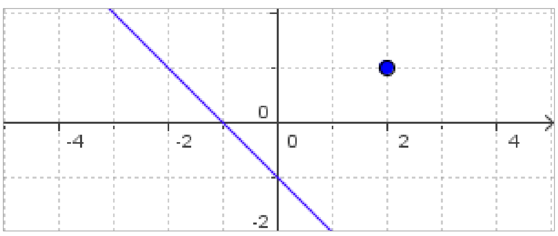
5. Escribe la ecuación de la función de la gráfica. Determina la pendiente de la recta y los cortes con los ejes.



6. Representa gráficamente las funciones:

   a) $f(x)= x-1$ b) $f(x)=\frac{4}{3}x+2$

7. Halla la ecuación de la recta paralela a la de la gráfica que pasa por el punto (2,1)



8. Halla la ecuación de la recta paralela a la $y=2x+1$, que pasa por el punto (-1,5)

9. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

   a) (0,70) (-7, 8)

   b) (0,2) (-1,0)

10. Halla la ecuación de la recta de pendiente 4, que corta al eje de abscisas en -10.

11. Halla la ecuación de la recta de pendiente 5, que corta al eje de ordenadas en 15.

12. ¿Están alineados los tres puntos?

    a) (0, 4) (2, 10) y (3, 11)

    b) (3, 36) (5, 54) y (9, 90)

13. Juan recibe una factura mensual de 160 minutos de teléfono. Decide qué tarifa le interesa más:

    a) Cuota mensual de 10€ más 5 céntimos cada minuto.

    b) Sin cuota mensual y 12 cént. minuto.

14. Cierta compañía ofrece un móvil rebajado según puntos conseguidos tal como indica la tabla, ¿corresponde esta tabla a una función polinómica de primer grado?. En caso afirmativo ¿cuál es la ecuación?

Puntos (x):	3000	5000	6000
Precio €(y):	220	200	190

15. En la factura del teléfono vemos que una llamada de 2 minutos nos cuesta 0,26€ y otra de 5 minutos 0,44€. ¿Cuál es el precio del establecimiento de llamada?. ¿Cuánto se pagará por una llamada de 9 minutos?

16. Calcula el valor de b para que la gráfica de la función $f(x)=2x^2+bx-4$, pase por el punto (-3, 2).

17. Calcula el valor de a para que la gráfica de la función $f(x)=ax^2-5x-2$, pase por el punto (-0,5, 1).

18. Calcula el valor de c para que la gráfica de la función $f(x)=-2x^2+3x+c$, pase por el punto (2, 1).

19. Escribe la ecuación de la parábola que tiene coeficiente a=-2, corta al eje de ordenadas en (0, 2) y su vértice es el punto (-1, 4).

20. Escribe la ecuación de la parábola que tiene coeficiente a=1, corta al eje de ordenadas en (0, -3) y su vértice es el punto (-2, -7).

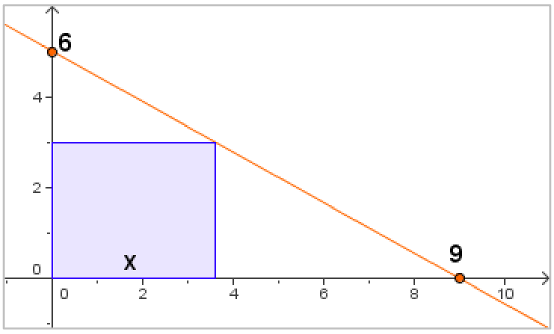
21. Escribe la ecuación de la parábola que pasa por los puntos A(0, 5), B(4, 21) y C(-1, 11)

22. Al lanzar verticalmente hacia arriba un objeto, con velocidad inicial 24 m/seg la altura máxima que alcanza viene dada por: $f(x)=24x-5x^2$ $(g=10\ m/seg^2$ y x:tiempo).
Calcula la altura máxima que alcanza.

23. Con un listón de 194 cm de largo queremos hacer un marco para un cuadro. Calcula la superficie máxima que se puede enmarcar.

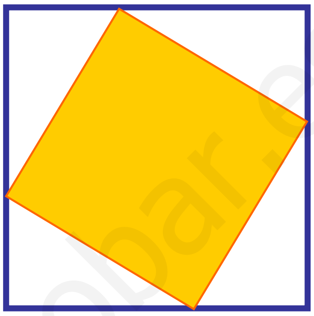
24. En un comercio venden 144 unidades de un producto a 12€ la unidad. Se sabe que por cada euro que aumenta el precio se venden 3 unidades menos. ¿A cuánto se deben vender para obtener el máximo beneficio?

25. Calcula el valor de x para que el área del rectángulo de la figura sea máxima.

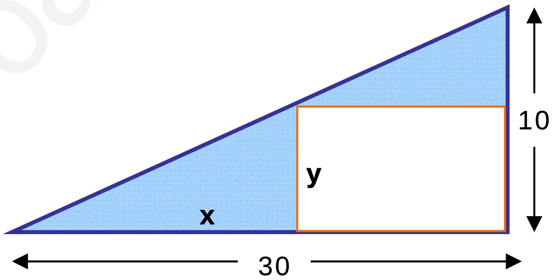


26. Dos números suman 24, calcula cuáles son si la suma de sus cuadrados es mínima.

27. En un cuadrado de lado 20 cm se inscribe otro como indica la figura. ¿Cuánto medirá el lado del cuadrado inscrito para que su área sea mínima?



28. Calcula lo que debe medir x para que el área coloreada en azul en la figura, sea mínima.

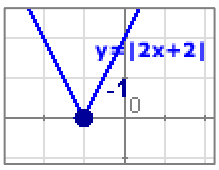


29. Decide si la función f(x) es continua

$$f(x)=\begin{cases} 3x & \text{si } x<0 \\ -x^2+3x+4 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

30. La gráfica del valor absoluto de una función se traza haciendo la simetría de la gráfica de la función, respecto del eje-X, a la parte que queda por debajo de este. Representa gráficamente la función $f(x)=|x^2-6x+8|$

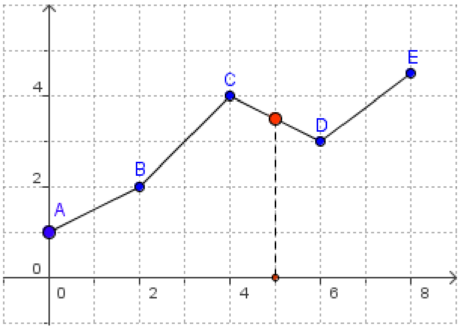
31. El valor absoluto de una función polinómica se puede expresar como una función definida a trozos, en la que cada trozo es un polinomio. Expresa en trozos de funciones polinómicas la función $f(x)=|2x+2|$



Para saber más

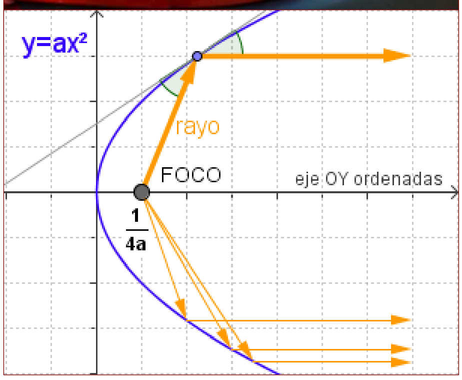
Interpolación

Al estudiar un fenómeno, se obtiene un conjunto de datos, para conocer cómo se comportaría la variable dependiente se suele recurrir a un proceso de **interpolación** que permite conocer de forma aproximada el valor que toma una función desconocida a partir de un conjunto de datos observados.

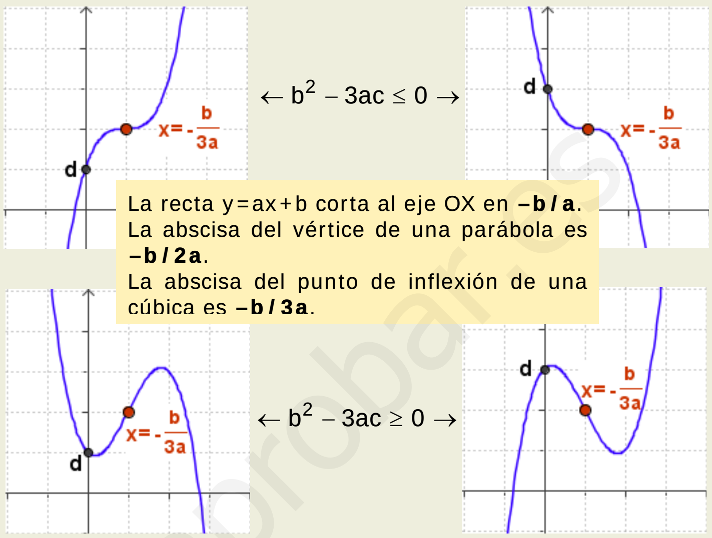


La forma más sencilla es la llamada **interpolación lineal** en la que la función se aproxima mediante una función lineal a trozos, como se ve en la figura.
Si en vez de usar rectas utilizamos parábolas, se habla de interpolación cuadrática, y en general de interpolación polinómica.

En las parábolas todos los rayos que parten del **foco** o inciden en él son reflejados en la misma dirección. De ahí que los faros de los coches o las antenas tengan forma parabólica.



De tercer grado: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$



La recta $y=ax+b$ corta al eje OX en $-b/a$.
La abscisa del vértice de una parábola es $-b/2a$.
La abscisa del punto de inflexión de una cúbica es $-b/3a$.

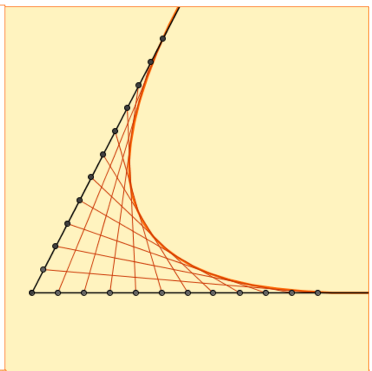
$f(x)=x^2+2x+4$

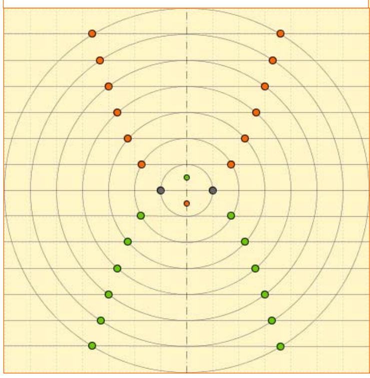
Las diferencias que se obtienen al restar valores consecutivos de f(x) nos dan la tabla de valores de $f(x)=2x+(b-a)$ y sus diferencias la función constante $2a$.

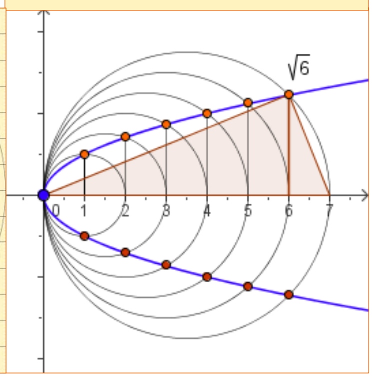
x	f(x)	Diferencias	Diferencias
0	4		
1	7	3	
2	12	5	2
3	19	7	2
4	28	9	2
5	39	11	2
6	52	13	2
7	67	15	2

Otras maneras de dibujar parábolas

Mediante circunferencias concéntricas y rectas paralelas; uniendo puntos trazados a intervalos regulares sobre dos semirrectas o aplicando el Teorema de la altura, son distintas formas de obtener parábolas.

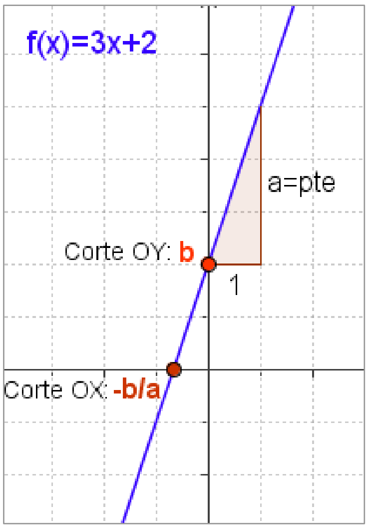


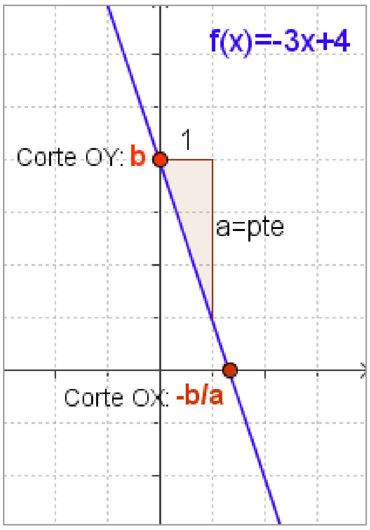




Recuerda lo más importante

Funciones de primer grado, rectas.





$f(x)=ax+b$

La gráfica de las funciones polinómicas de primer grado es una recta.

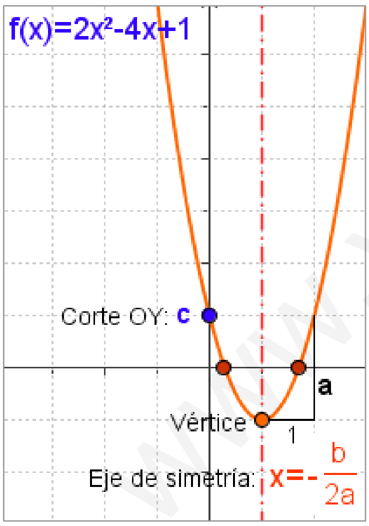
- ✓ **a** es la pendiente
  - Si a>0 creciente.
  - Si a<0 decreciente.
- ✓ Corte eje OY: **b**
- ✓ Corte eje OX: **-b / a**

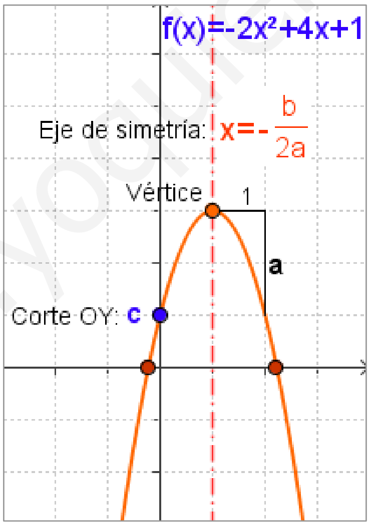
Recta que pasa por dos puntos:

$(x_0,y_0)\quad(x_1,y_1)$

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

Funciones de segundo grado, parábolas





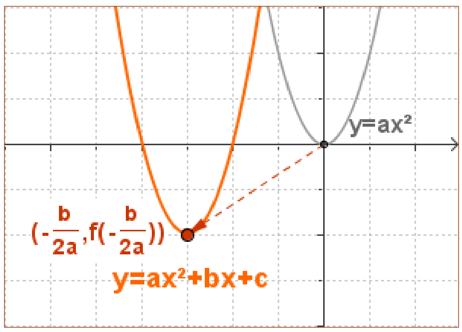
$f(x)=ax^2+bx+c$

La gráfica de las funciones polinómicas de segundo grado es una parábola.

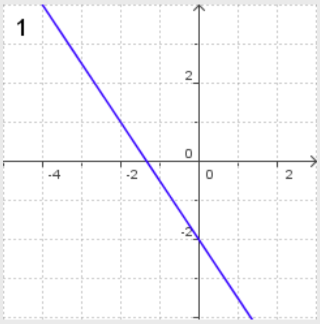
- ✓ **a** indica la concavidad
  - Si a>0 tiene un mínimo.
  - Si a<0 tiene un máximo.
- ✓ Eje de simetría: x=**-b / 2a**
- ✓ Vértice: $\left(-\frac{b}{2a},f(-\frac{b}{2a})\right)$
- ✓ Corte eje OY: **c**
- ✓ Cortes eje OX: $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

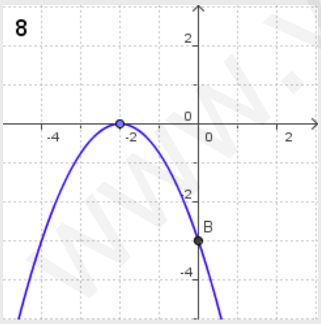
Traslaciones de la parábola

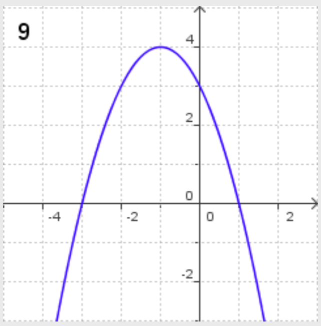
Para dibujar la parábola $y=ax^2+bx+c$, basta trasladar $y=ax^2$ llevando su vértice (0,0) al punto $\left(-\frac{b}{2a},c-\frac{b^2}{4a}\right)$



Autoevaluación







1. ¿Cuál es la pendiente de la recta de la gráfica?

2. Calcula la ecuación de la recta paralela a la $y=-0{,}75x-2$ que pasa por el punto (2, 3)

3. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(2,3) y B(4, 0)

4. Calcula los puntos de corte con los ejes coordenados de la recta $y=-0{,}75x+1{,}5$

5. Calcula el vértice de la parábola $y=-1{,}5x^2-9x-18$

6. Una parábola corta al eje de abscisas en (4, 0) y (9, 0). ¿Cuál es su eje de simetría?

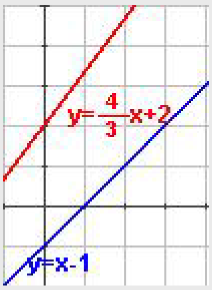
7. Averigua los puntos en que la parábola $f(x)=-2x^2+x+3$ corta al eje de abscisas.

8. La parábola de la gráfica es como la $y=-0{,}75x^2$. Introduce los coeficientes de su ecuación.

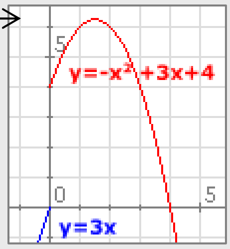
9. La parábola de la gráfica es $y=-x^2-2x+3$. ¿Qué intervalo es la solución de la inecuación $-x^2-2x+3>0$

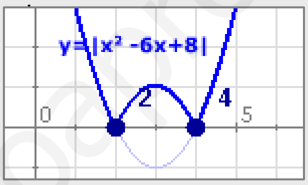
10. Con una cuerda de 35 m de largo se desea vallar una parcela rectangular por tres de sus lados, ya que uno linda con un río. ¿Cuál es la superficie máxima que se puede vallar?

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. x:días y: kg y=0,5x+30
2. x:min y:€ y=0,03x+0,10
3. x:día y:nº pag y=25x+40
4. y=1,16x
5. Pendiente =1/2
   Corte OY =1 Corte OX =-2
   Ec. y = 1/2 x +1
6. 

7. y=-x+3
8. y=2x+7
9. a) y =62/7x+70 b) y =2x+2
10. y=4x+40
11. y=5x+15
12. a) No b)Si
13. Interesa más la a)
14. y=-0,01x+250
15. 0,14€ el establecimiento de llamada 0,68€ una llamada de 9 minutos
16. b=4 **17.** a=2 **18.** c=3
19. $y=-2x^2-4x+2$
20. $y=x^2+4x-3$
21. $y=2x^2-4x+5$
22. 28,8 m **23.** 2352,25 cm^2
24. 18 **25.** 4,5 **26.** 12 y 12
27. $10\sqrt{2}$ **28.** 15
29. No es continua en x=0 →



30. 

31. $|2x+2| = \begin{cases} -2x-2 \text{ si } 2x+2<0 \leftrightarrow x<-1 \\ 2x+2 \text{ si } 2x+2 \geq 0 \leftrightarrow x \geq -1 \end{cases}$

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. pendiente= –1,5
2. y=– 0.75x+4.5
3. y=–1,5x+6
4. (0, 1,5) (2,0)
5. (-3, -4,5)
6. x=6,5
7. En -1 y 1,5
8. $y=-0,75x^2-3x-3$
9. (-3, 1)
10. 153,13 m^2

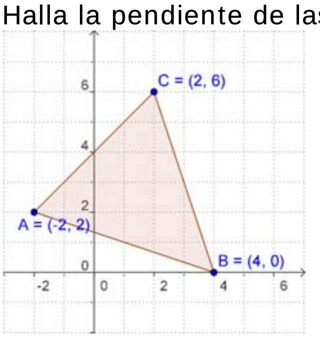
No olvides enviar las actividades al tutor ▶

ACTIVIDADES DE ESO

Nombre y apellidos del alumno:		Curso: 4º
Quincena nº: 9	Asignatura: Matemáticas B	
Fecha:	Profesor de la asignatura:	

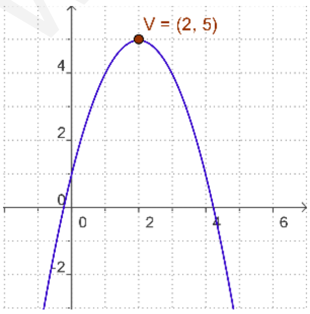
1. Halla la ecuación de la recta paralela a la $y=2x-3$ y que pasa por el punto $(-2,4)$.

2. Halla la pendiente de las rectas correspondientes a los lados del triángulo ABC.



3. Los gastos mensuales, en euros, de una empresa por la fabricación de x ordenadores vienen dados por la función $G(x)=2000+25x$, y los ingresos que se obtienen por las ventas son $I(x)=60x-0{,}01x^2$, también en euros.¿Cuántos ordenadores deben fabricarse para que el beneficio (ingresos-gastos) sea máximo.

4. La parábola de la figura es como la $y=x^2$, escribe su ecuación.



cidead@mec.es

http://cidead.cnice.mec.es

C/ TORRELAGUNA, 58
28027 MADRID
TEL: 91 3778300
FAX: 91 3778314

10 Funciones exponenciales y logarítmicas

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Conocer las características de la función de proporcionalidad inversa y los fenómenos que describen.
- Hallar las asíntotas de una hipérbola.
- Reconocer y representar funciones exponenciales.
- Aplicar las funciones exponenciales al interés compuesto y otras situaciones.
- Calcular el logaritmo de un número.
- Interpretar las gráficas de las funciones logarítmicas.

Antes de empezar

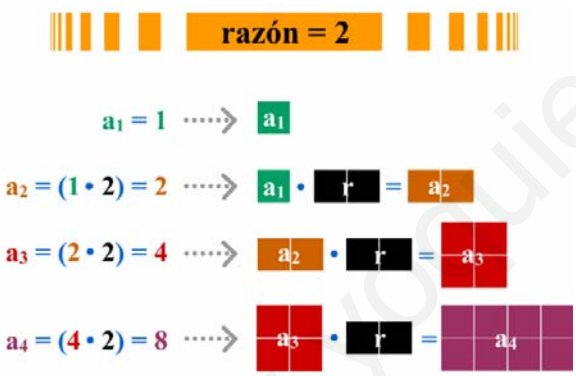
Recuerda

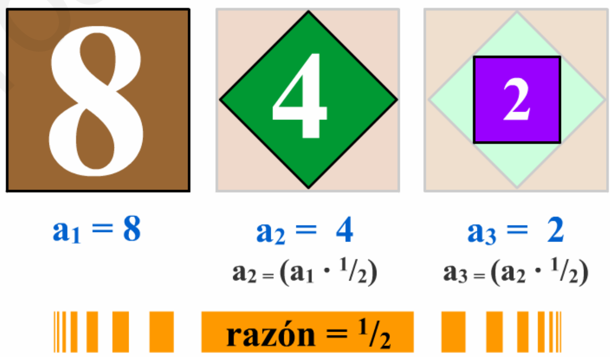
El curso pasado estudiaste las progresiones tanto aritméticas como geométricas, en el cuadro puedes repasar estas últimas, te vendrá bien para comprender mejor la función exponencial.

Progresiones geométricas

Una progresión geométrica está constituida por una secuencia de elementos en la que cada uno se obtiene del anterior multiplicándolo por una constante denominada razón de la progresión.

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5...$	$3, 12, 48, 192...$
razón: d	razón: 4
a_1	$a_1 = 3$
$a_2 = a_1 \cdot d$	$a_2 = 3 \cdot 4 = 12$
$a_3 = a_2 \cdot d$	$a_3 = 12 \cdot 4 = 48$
$a_4 = a_3 \cdot d$	$a_4 = 48 \cdot 4 = 192$
...	...
$a_n = a_{n-1} \cdot d$	





Investiga

Benjamin Franklin, famoso científico y estadista, dejó un legado de 1000 libras a las ciudades de Boston y Filadelfia para que se prestasen a jóvenes aprendices al 5% anual. Según Franklin al cabo de 100 años se habrían convertido en 131000 libras, de las cuales 100000 serían para obras públicas y las 31000 restantes volverían a utilizarse como préstamos otros 100 años. ¿Calculó bien?.

1. Funciones racionales

Función de proporcionalidad inversa

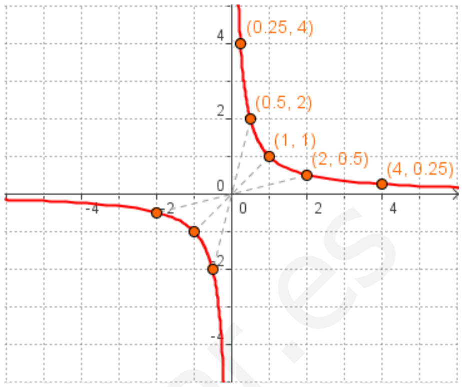
La función de proporcionalidad inversa relaciona dos magnitudes inversamente proporcionales.

Su expresión algebraica es: $\mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{k}}{\mathbf{x}}$

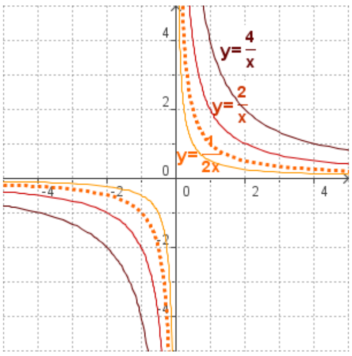
Su gráfica es una **hipérbola**. En la figura se puede ver el trazado de f(x)=1/x.

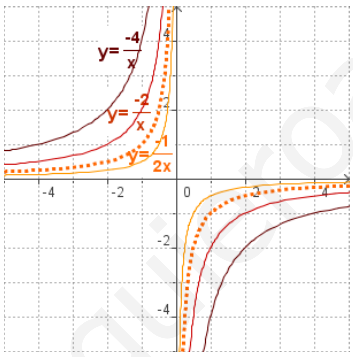
Haciendo una tabla de valores:

x	1	2	0,5	4	0.25	-1	-2	-0.5
f(x)	1	0,5	2	0,25	4	-1	-0,5	-2



A partir de ésta observa cómo cambia la gráfica al variar el valor de la constante k:





- El **dominio** y el **recorrido** son todos los reales excepto el 0.
- Es una función **impar**: f(-x)=k/(-x)=-f(x).
- Si **k>0** la función es **decreciente** y su gráfica aparece en los cuadrantes 1º y 3º.
- Si **k<0** la función es **creciente** y su gráfica está en el 2º y 4º cuadrante.

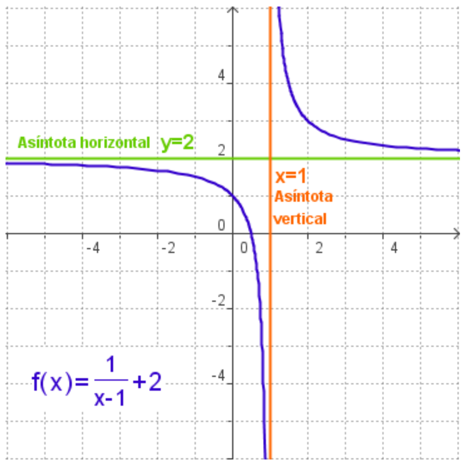
Las asíntotas

En la gráfica de la función f(x)=k/x se puede observar como las ramas de la hipérbola se aproximan a los ejes de coordenadas, son las asíntotas.

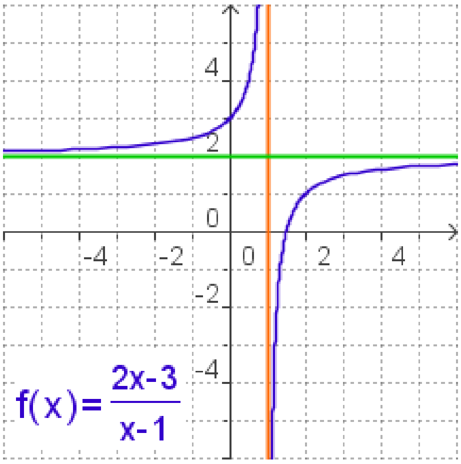
Cuando la gráfica de una función se acerca cada vez más a una recta, confundiéndose con ella, se dice que la recta es una **asíntota**.

Aunque estas rectas pueden llevar cualquier dirección en el plano aquí nos limitaremos a las:

- ✓ **Asíntotas verticales.** La recta **x=a** es una asíntota vertical de la función si se verifica que cuando el valor x tiende al valor a, el valor de f(x) tiende a valores cada vez más grandes, f(x)→+∞, ó más pequeños, f(x)→-∞.
- ✓ **Asíntotas horizontales.** La recta **y=b** es una asíntota horizontal de la función si se verifica que cuando x→+∞ ó x→-∞, el valor de f(x)→b.



- Asíntota vertical **x=1**
  $x\to1^+$ (por la derecha) f(x)→+∞
  $x\to1^-$ (por la izquierda) f(x)→- ∞
- Asíntota horizontal **y=1**
  x→+∞ f(x)→ 2
  x→- ∞ f(x)→ 2



Calcular las asíntotas

- El denominador es 0 si x=1, **AV: x=1**
- Al dividir numerador por denominador

$$\begin{array}{rl} \mathbf{2x\ -3} & \underline{|\ \mathbf{x-1}\quad} \\ \underline{-2x\ +2} & 2 \quad \text{Cociente} \\ \text{Resto:}\quad \mathbf{-1} & \end{array}$$

$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{2x-3}}{\mathbf{x-1}} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{x-1}} + \mathbf{2} \quad \textbf{AH: y=2}$$

Y el resto indica la forma de la hipérbola, como la y=-1/x

Otras funciones racionales

Las funciones racionales son las que su expresión algebraica es un cociente de polinomios.

$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{P(x)}}{\mathbf{Q(x)}}$$

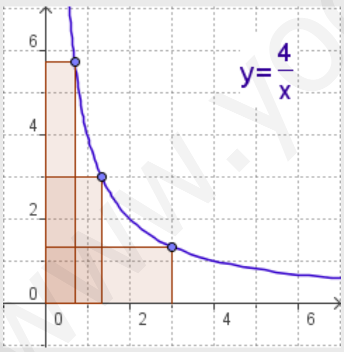
- Su **dominio** son todos los reales excepto los que anulan el denominador. En esos puntos hay una asíntota vertical.
- Si el grado del numerador y del denominador coinciden hay asíntota horizontal.
- Para calcular el punto de corte con el eje OY se calcula f(0), y para calcular los cortes con el eje OX se resuelve la ecuación P(x)=0.

La más sencilla de todas es la función de proporcionalidad inversa con la que se inicia este capítulo.

Calcular y dibujar las asíntotas, cuando tienen, permite saber cómo es la gráfica de la función con bastante facilidad. Para ello se hace el cociente entre numerador y denominador como se indica en el ejemplo de la izquierda.

EJERCICIOS resueltos

1. ¿Cuál es el área de los rectángulos de la figura?



Área = base x altura

En todos los rectángulos así dibujados

Área =x·y=4

2. La siguiente tabla corresponde a cantidades inversamente proporcionales, complétala y escribe la expresión algebraica de la función y=f(x).

x	f(x)
	-3
0.5	-12
	-1,2
-2	3
-3	
-1	

El producto de dos cantidades inversamente proporcionales es constante.

En este caso 0,5·(-12)=(-2)·3=**-6**

La función es $f(x)=\frac{-6}{x}$

x	f(x)
2	-3
0.5	-12
5	-1,2
-2	3
-3	**2**
-1	**6**

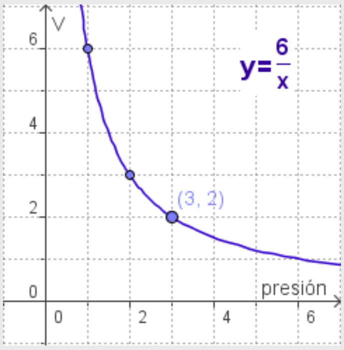
EJERCICIOS resueltos

3. Según la Ley de Boyle-Mariotte, la presión que ejerce un gas y el volumen que ocupa son inversamente proporcionales. A 25º determinada cantidad de gas ocupa un volumen de 2 litros y ejerce una presión de 3 atmósferas.

a) ¿Qué volumen ocupará cuando la presión ejercida sea de 1 atmósfera?.

b) ¿Qué presión ejercerá cuando el volumen sea 3 litros?.

c) Escribe la función presión → volumen y dibuja su gráfica



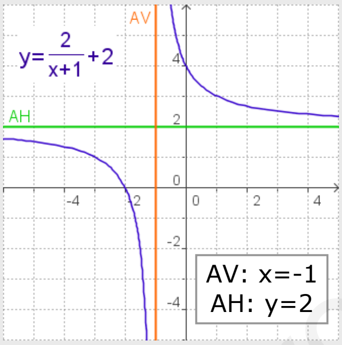
P·V=cte. en este caso P·V=6

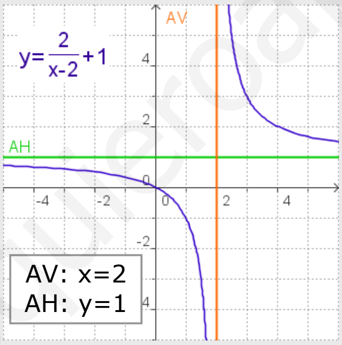
a) P=1 atm. V=6 litros

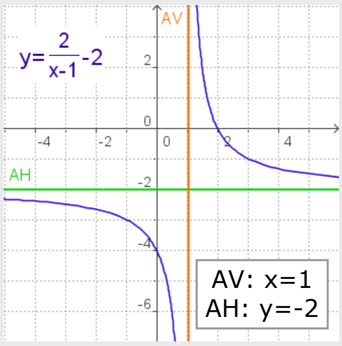
b) V=3 litros P=2 atm.

c) $f(x)=\dfrac{6}{x}$

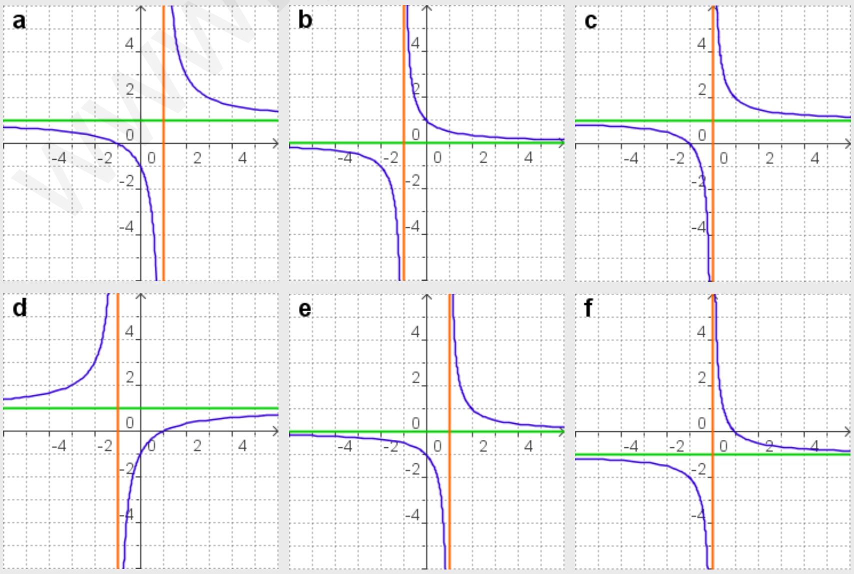
6. En las siguientes funciones, dibujas las asíntotas y escribe su ecuación.







7. Decide qué grafica corresponde a cada función:



1) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ → **e**

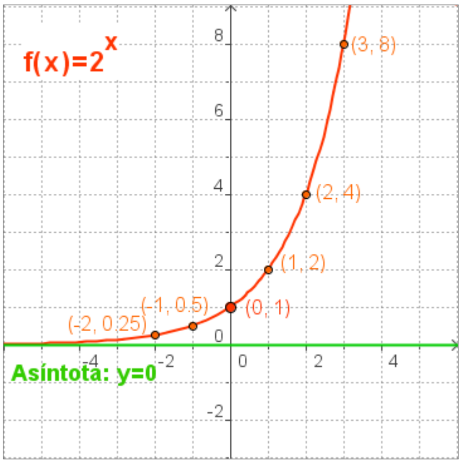
2) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ → **b**

3) $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ → **c**

4) $f(x)=\dfrac{1-x}{x}$ → **f**

5) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ → **a**

6) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ → **d**

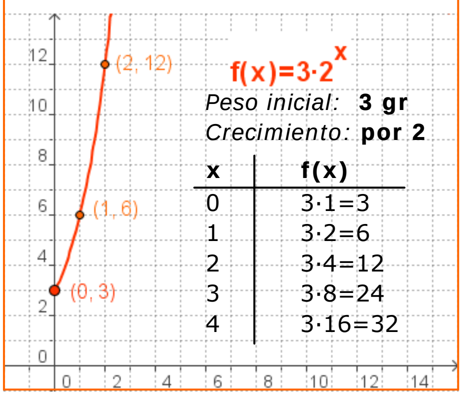


- El **dominio** son todos los reales y el **recorrido** son los reales positivos.
- Es **continua**.
- Si **a>1** la función es **creciente** y si **0<a<1** es **decreciente**.
- Corta al eje OY en (0,1).
- El eje OX es **asíntota**.
- La función es **inyectiva**, esto es si $\mathbf{a^m=a^n}$ entonces **m=n**.

En las gráficas de la derecha se puede ver como al multiplicar por una constante $\mathbf{y=k\cdot a^x}$ el punto de corte con el eje OY es **(0,k)**.

Al sumar (o restar) una constante b la gráfica se desplaza hacia arriba (o hacia abajo) b unidades y la asíntota horizontal pasa a ser **y=b**.

En un laboratorio tienen un cultivo bacteriano, si su peso se multiplica por 2 cada día, ¿cuál es su crecimiento si el peso inicial es 3 gr?



$f(x)=3\cdot 2^x$

Peso inicial: **3 gr**

Crecimiento: **por 2**

x	f(x)
0	3·1=3
1	3·2=6
2	3·4=12
3	3·8=24
4	3·16=32

2. Funciones exponenciales

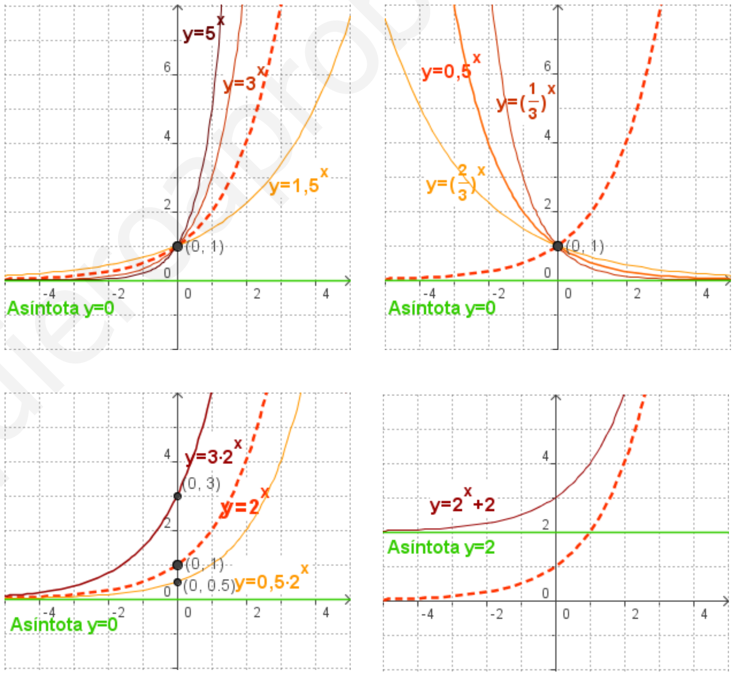
La función exponencial

La función exponencial es de la forma $\mathbf{y=a^x}$, siendo **a** un número real positivo.

En la figura se ve el trazado de la gráfica de $y=2^x$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	-0.5
y	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	-2

En los gráficos inferiores se puede ver como cambia la gráfica al variar a. Observa que las gráficas de $\mathbf{y=a^x}$ y de $\mathbf{y=(1/a)^x=a^{-x}}$ son simétricas respecto del eje OY.



Crecimiento exponencial

La función exponencial se presenta en multitud de fenómenos de crecimiento animal, vegetal, económico, etc. En todos ellos la variable es el tiempo.

En el crecimiento exponencial, cada valor de **y** se obtiene multiplicando el valor anterior por una cantidad constante **a**.

Donde **k** es el valor inicial (para t=0), **t** es el tiempo transcurrido y **a** es el factor por el que se multiplica en cada unidad de tiempo.

Si **0<a<1** se trata de un decrecimiento exponencial.

Aplicaciones

La función exponencial sirve para describir cualquier proceso que evolucione de modo que el aumento (o disminución) en un pequeño intervalo de tiempo sea proporcional a lo que había al comienzo del mismo.

A continuación se ven tres aplicaciones:

- Crecimiento de poblaciones.
- Interés del dinero acumulado.
- Desintegración radioactiva.

✓ Interés compuesto

En el interés compuesto los intereses producidos por un capital, C_0 se van acumulando a éste, de tiempo en tiempo, para producir nuevos intereses.

Los intervalos de tiempo, al cabo de los cuales los intereses se acumulan al capital, se llaman periodos de capitalización o de acumulación. Si son t años, r es el rédito anual (interés anual en %) el capital final obtenido viene dado por la fórmula:

$$C_F = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

Si se consideran n periodos de tiempo, (n=12 si meses, n=4 si trimestres, n=365 si días,...) la fórmula anterior queda:

$$C_F = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n \cdot 100}\right)^{nt}$$

Se colocan 5000 € al 6% anual. ¿En cuánto se convertirán al cabo de 5 años?

- *Si los intereses se acumulan anualmente*

  $C_F = 5000 \cdot 1.06^5 = 6691{,}13$ €

- *Si los intereses se acumulan mensualmente*

  $C_F = 5000 \cdot \left(1 + \frac{6}{1200}\right)^{12 \cdot 5} =$

  $= 5000 \cdot 1{,}005^{60} = 6744{,}25$ €

- *Si los intereses se acumulan trimestralmente*

  $C_F = 5000 \cdot \left(1 + \frac{6}{400}\right)^{4 \cdot 5} =$

  $= 5000 \cdot 1{,}015^{20} = 6734{,}27$ €

✓ Crecimiento de poblaciones

El crecimiento vegetativo de una población viene dado por la diferencia entre nacimientos y defunciones.

Si inicialmente partimos de una población P_0, que tiene un índice de crecimiento i (considerado en tanto por 1), al cabo de t años se habrá convertido en

$$\mathbf{P = P_0 \cdot (1 + i)^t}$$

Un pueblo tiene 600 habitantes y su población crece anualmente un 3%.

- *¿Cuántos habitantes habrá al cabo de 8 años?*

  $P = 600 \cdot 1.03^8 \approx 760$

✓ Desintegración radiactiva

Las sustancias radiactivas se desintegran con el paso del tiempo. La cantidad de una cierta sustancia que va quedando a lo largo del tiempo viene dada por:

$\mathbf{M = M_0 \cdot a^t}$ — $\mathbf{M_0}$ es la masa inicial, $\mathbf{0 < a < 1}$ es una constante que depende de la sustancia y de la unidad de tiempo que tomemos.

La rapidez de desintegración de las sustancias radiactivas se mide por el "*periodo de desintegración*" que es el tiempo en que tarda en reducirse a la mitad.

Un gramo de estroncio-90 se reduce a la mitad en 28 años, si en el año 2000 teníamos 20 gr y tomamos como origen de tiempo el año 2000.

- *La función es:*

  $M(x) = 20 \cdot 0{,}5^{\frac{x}{28}} = 20 \cdot 0{,}9755^x$

- *En el año 2053 quedará:*

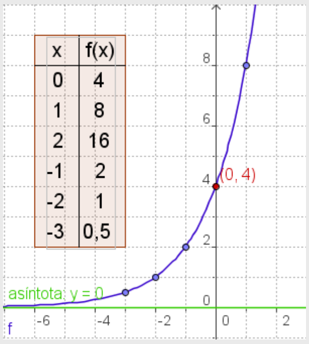
  $M = 20 \cdot 0{,}9755^{53} = 5{,}38$ gr

EJERCICIOS resueltos

8. Representa y estudia las funciones

a) $f(x)=4\cdot 2^x$

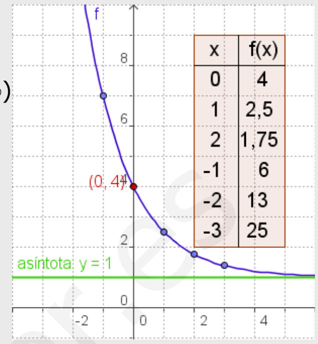
Dominio= IR
Recorrido=$(0,+\infty)$
Asíntota: y=0
Corte OY: (0,4)
Creciente



x	f(x)
0	4
1	8
2	16
-1	2
-2	1
-3	0,5

b) $f(x)=2\cdot 3^{-x}+1$

Dominio= IR
Recorrido=$(1,+\infty)$
Asíntota: y=1
Corte OY: (0,4)
Decreciente



x	f(x)
0	4
1	2,5
2	1,75
-1	6
-2	13
-3	25

9. Construye una tabla de valores de una función exponencial en cada caso y escribe la expresión algebraica.

a) f(-2)=2/9
y constante de crecimiento 3

x	f(x)
-2	**2 / 9**
-1	2/3
0	2
1	6
2	18
3	54

f(-2)=2/9
f(-1)=3·2/9=2/3
f(0)=3·2/3=2
f(1)=3·2=6
y así sucesivamente

$f(x)=2\cdot 3^x$

b) f(0)=3
y constante de decrecimiento 1/4

x	f(x)
-2	48
-1	12
0	**3**
1	3/4
2	3/16
3	3/64

f(0)=3

$f(1)=3\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$f(2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$

y así sucesivamente

$f(x)=3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x=3\cdot 4^{-x}$

10. La tabla corresponde, en cada caso, a una función exponencial. Escribe la fórmula.

a)

x	f(x)
-2	1/9
-1	1/3
0	1
1	3
2	9
3	27

$y=3^x$

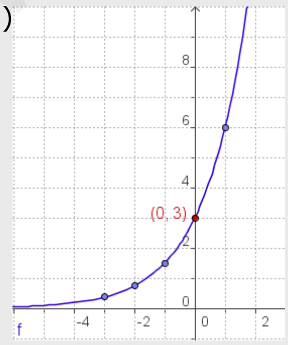
b)

x	f(x)
-2	25
-1	5
0	1
1	1/5
2	1/25
3	1/125

$f(x)=(1/5)^x=5^{-x}$

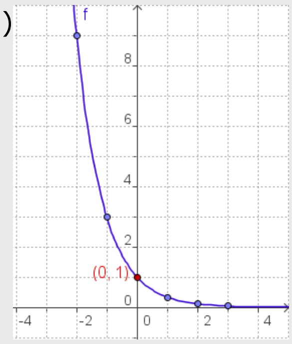
11. Indica si el gráfico corresponde a una función con crecimiento exponencial o con decrecimiento. Escribe la función.

a)



Observa la gráfica
f(0)=3
f(1)=6=3·2
f(-1)=1,5=3/2
La función es:
$f(x)=3\cdot 2^x$
y es creciente

b)

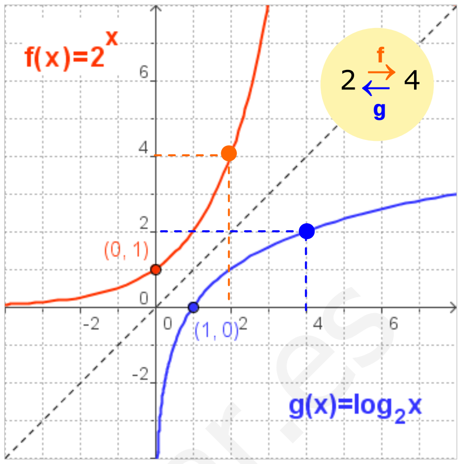


Observa la gráfica
f(0)=1
f(-1)=3
$f(-2)=9=3^2$
La función es:
$f(x)=(1/3)^x=3^{-x}$
y es decreciente

3. Funciones logarítmicas

La función inversa de la exponencial

Dada una función *inyectiva*, y=f(x), se llama **función inversa** de f a otra función, g, tal que g(y)=x. En la figura adjunta se puede ver la inversa de la función exponencial.



Para cada x se obtiene a^x. Al valor obtenido lo llamamos y o f(x). La función inversa de la exponencial es la que cumple que **g(y)=x.**

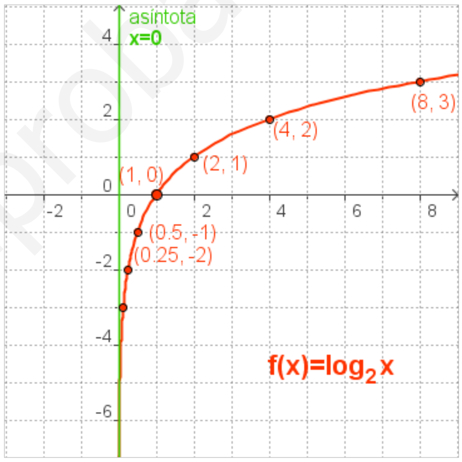
Esta función se llama **función logarítmica** y, como puedes observar, es simétrica de la función exponencial con respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

La función logarítmica

Es la función inversa de la función exponencial y se denota de la siguiente manera:

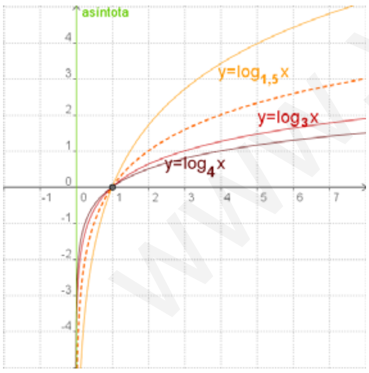
$y = \log_a x$, con a>0 y distinto de 1.

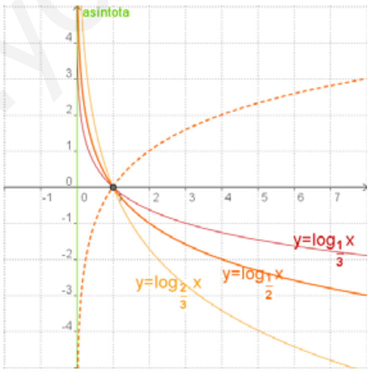
En la figura se representa la gráfica de $y=\log_2 x$ de forma similar a como se hizo con la exponencial. Sus propiedades son "*simétricas*".

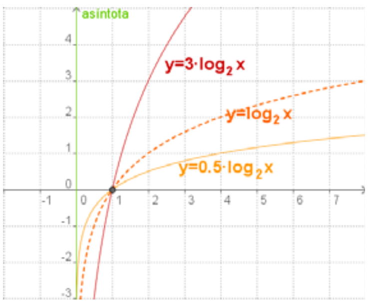


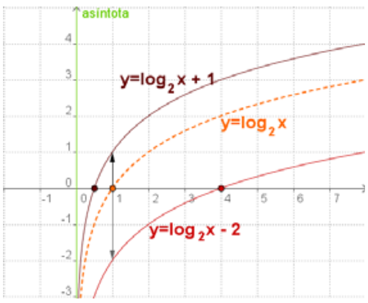
x	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8
f(x)	-3	-2	-1	0	1	2	3

En los gráficos inferiores se puede ver como cambia la gráfica al variar a.









- El **dominio** son los reales positivos y el **recorrido** son todos los reales.
- Es **continua**.
- Si **a>1** la función es **creciente** y si **0<a<1** es **decreciente**.
- Corta al eje OX en (1,0).
- El eje OY es **asíntota**.
- La función es **inyectiva**, esto es si $\mathbf{a^m=a^n}$ entonces **m=n**.

En las gráficas de la derecha se puede ver como al multiplicar por una constante **$y=k\cdot\log_a x$** cambia la rapidez con que la función crece o decrece (k<0).

Al sumar (o restar) una constante b la gráfica se desplaza hacia arriba (o hacia abajo) b unidades, cambiando el punto de corte con el eje de abscisas.

$$\log_2 128 = 7 \longleftrightarrow 2^7 = 128$$

$$\log_3 \frac{1}{243} = -4 \longleftrightarrow 3^{-4} = \frac{1}{243}$$

$$\log_{1/2} 8 = -3 \longleftrightarrow (1/2)^{-3} = 8$$

$$\log_{1/3} \frac{1}{9} = 2 \longleftrightarrow (1/3)^2 = \frac{1}{9}$$

Los logaritmos

Dados dos números reales positivos, **a** y **b** (**a≠1**), llamamos **logaritmo en base a de b** al número al que hay que elevar **a** para obtener **b**.

La definición anterior indica que:

$\log_a b = c$ equivale a $a^c = b$

Fíjate en los ejemplos de la izquierda.

Sean: $x = \log_a b$ $\quad a^x = b$

$y = \log_a c$ $\quad a^y = c$

$z = \log_a (b \cdot c)$ $\quad a^z = b \cdot c$

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y} = a^z \Rightarrow z = x+y$
- $a^x / a^y = a^{x-y} = a^z \Rightarrow z = x-y$
- $(a^x)^m = a^{x \cdot m} = a^z \Rightarrow z = x \cdot m$

Propiedades de los logaritmos

- Logaritmo del producto: $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- Logaritmo del cociente: $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
- Logaritmo de una potencia: $\log_a (b^m) = m \cdot \log_a b$
- En cualquier base: $\log_a 1 = 0$ ya que $a^0 = 1$
  $\log_a a = 1$ ya que $a^1 = a$

Con la calculadora

Para calcular logaritmos

- log 9,043

  Teclea 9 . 043 log

  Aparecerá: 0.9563125

Compruébalo con la tecla 10^x

  Teclea INV 10^x

  Aparecerá: 9.043

Si introduces:

- log 904,3

  Teclea 904 . 3 log

  Aparecerá: 2.9563125

Observa: 904,3=9,043·100

log904,3=log9,043 +2

Cambio de base:

- $\log_3 9043$

  Teclea 9043 log

  Aparecerá: 3.9563125

  Teclea ÷ 3 log

  Aparecerá: 0.4771212

  Teclea = y sale el resultado:

  8,2920484

Logaritmos decimales

Son los de base **10**, son los más usados y por este motivo no suele escribirse la base cuando se utilizan.

$\log 10 = \log 10^1 = 1$

$\log 100 = \log 10^2 = 2$

$\log 1000 = \log 10^3 = 3$

$\log 10000 = \log 10^4 = 4$, ...etc

Observa que entonces el log de un número de 2 cifras, comprendido entre 10 y 100, es 1,... ; el log de los números de 3 cifras será 2,... ; etc.

Por otra parte:

$\log 0{,}1 = \log 10^{-1} = -1$

$\log 0{,}01 = \log 10^{-2} = -2$

$\log 0{,}001 = \log 10^{-3} = -3$, ...etc

Entonces el log de un número comprendido entre 0,01 y 0,1 será -1,...; el de uno comprendido entre 0,001 y 0,01 será -2,..., etc.

Cambio de base

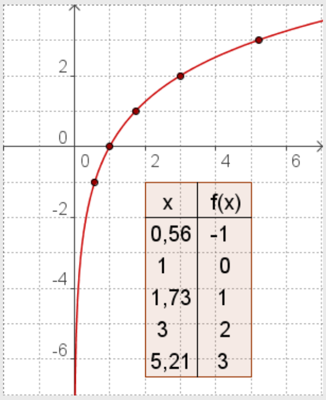
Las calculadoras permiten calcular dos tipos de logaritmos: decimales (base=10) y neperianos o naturales (base=e), que se estudian en cursos posteriores. Cuando queremos calcular logaritmos en cualquier otra base tenemos que recurrir a la fórmula del cambio de base: $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$

EJERCICIOS resueltos

12. Representa y estudia las funciones

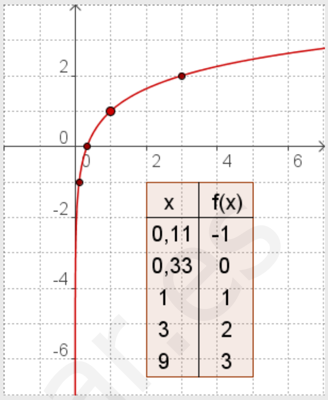
a) $f(x)=2\cdot\log_3 x$

Dominio=$(0,+\infty)$
Recorrido= IR
Asíntota: x=0
Corte OX: (1,0)
Creciente



b) $f(x)=\log_3 x+1$

Dominio=$(0,+\infty)$
Recorrido= IR
Asíntota: x=0
Corte OX: (1/3,0)
Creciente



13. Calcula x en cada caso aplicando la definición de logaritmo:

a) $\log_6(1/6)=x$	x=-1	$6^{-1}=1/6$
b) $\log_4 2=x$	x=1/2	$4^{1/2}=2$
d) $\log_5 125=x$	x=3	$5^3=125$
f) $\log_{1/8} 1=x$	x=0	$(1/8)^0=1$
c) $\log_3 81=x$	x=4	$3^4=81$
g) $\log_{1/5} 25=x$	x=-2	$(1/5)^{-2}=25$
d) $\log_3(1/9)=x$	x=-2	$3^{-2}=1/9$
h) $\log_{1/2}(1/16)=x$	x=4	$(1/2)^4=1/16$

14. Sabiendo que log2=0,301030 calcula sin ayuda de la calculadora:

a) log40 $= \log(4\cdot10) = \log(2^2\cdot10) = \log 2^2+\log 10 = 2\cdot\log 2+\log 10 =$
$= 2\cdot0{,}301030+1 = 1{,}602060$

b) log1,6 $= \log(16/10) = \log(2^4/10) = \log 2^4-\log 10 = 4\log 2-\log 10 =$
$= 4\cdot0{,}301030-1 = 0{,}204120$

c) log 0,125 $= \log(125/1000) = \log 53/1000) = 3(\log 5 - \log 1000 = 3\log(10/2) - 3 =$
$= 3(\log 10-\log 2)-3 = 3-3\log 2-3 = -3\cdot0{,}301030 = -0{,}903090$

15. Con la calculadora halla los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 23{,}721 = \dfrac{\log 23{,}721}{\log 2} = 4{,}5681$

b) $\log_3 25678{,}34561 = \dfrac{\log 2{,}3456}{\log 3} = 0{,}7760$

c) $\log_5 0{,}37906 = \dfrac{\log 0{,}37906}{\log 5} = -0{,}6027$

d) $\log_7 0{,}37906 = \dfrac{\log 0{,}37906}{\log 7} = -0{,}4985$

RECUERDA:
$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$$

Para practicar

1. Envasamos 276 litros de agua en botellas iguales. Escribe la función que relaciona el número de botellas y su capacidad.

2. Un móvil recorre una distancia de 130 km con velocidad constante. Escribe la función velocidad→tiempo, calcula el tiempo invertido a una velocidad de 50 km/h, y la velocidad si el tiempo ha sido 5 horas.

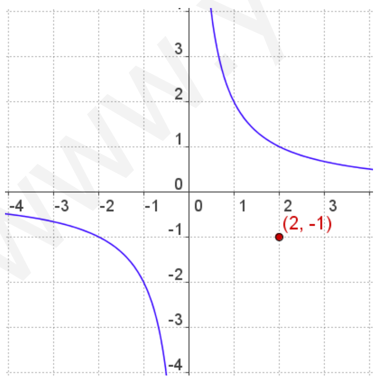
3. Un grifo con un caudal de 8 litros/min tarda 42 minutos en llenar un depósito. ¿Cuánto tardaría si el caudal fuera de 24 litros/min?. Escribe la función caudal→tiempo.

4. Calcula las asíntotas de las funciones siguientes:

   a) $f(x)=\dfrac{2x+4}{x+3}$ b) $f(x)=\dfrac{x-1}{x-3}$

   c) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$ d) $f(x)=\dfrac{-x}{x+2}$

5. Escribe la ecuación de la función cuya gráfica es una hipérbola como la de la figura con el centro de simetría desplazado al punto (2,-1).



6. Los costes de edición, en euros, de x ejemplares de un libro vienen dados por y=21x+24 (x>0). ¿Cuánto cuesta editar 8 ejemplares?, ¿y 80 ejemplares?. Escribe la función que da el coste por ejemplar. Por muchos ejemplares que se publiquen, ¿cuál es el coste unitario como mínimo?.

7. En qué se convierte al cabo de 15 años un capital de 23000€ al 5,5% anual?

8. Un capital colocado a interés compuesto al 2% anual, se ha convertido en 3 años en 9550,87€. ¿Cuál era el capital inicial?

9. Un capital de 29000€ colocado a interés compuesto se ha convertido al cabo de 4 años en 31390,53 €. ¿Cuál es el rédito (interés anual) a que ha estado colocado?

10. Un capital de 7000€, colocado a interés compuesto del 2% anual, se ha convertido al cabo de unos años en 8201,61€. ¿Cuántos años han transcurrido?

11. ¿Cuántos años ha de estar colocado cierto capital, al 3% anual, para que se duplique.

12. El periodo de desintegración del Carbono 14 es 5370 años. ¿En qué cantidad se convierten 10 gr al cabo de 1000 años?

13. ¿Cuántos años han de pasar para que una muestra de 30 gr de C14 se convierta en 20,86 gr.? *(Periodo de desintegración del C14 5370 años).*

14. Una muestra de 60 gr. de una sustancia radiactiva se convierte en 35,67 gr en 30 años. ¿Cuál es el periodo de desintegración?.

15. El tamaño de cierto cultivo de bacterias se multiplica por 2 cada 30 minutos. Si suponemos que el cultivo tiene inicialmente 5 millones de bacterias, ¿dentro de cuántas horas tendrá 320 millones de bacterias?.

16. El tamaño de cierto cultivo de bacterias se multiplica por 2 cada 20 minutos, si al cabo de 3 horas el cultivo tiene 576 millones de bacterias, ¿cuántas había en el instante inicial?

17. Calcula el número:

a) cuyo logaritmo en base 6 es 3.

b) cuyo logaritmo en base 4 es -3.

c) cuyo logaritmo en base 10 es 2.

d) cuyo logaritmo en base 1/2 es -3.

e) cuyo logaritmo en base 1/5 es 2.

18. ¿En qué base?

a) el logaritmo de 0,001 es -3.

b) el logaritmo de 243 es 3.

c) el logaritmo de 8 es 1.

d) el logaritmo de 1/81 es -4.

e) el logaritmo de 49 es 2.

19. Calcula mentalmente:

a) el logaritmo en base 2 de 32.

b) el logaritmo en base 5 de 125.

c) el logaritmo en base 3 de 1/9.

d) el logaritmo en base 7 de 1.

e) el logaritmo en base 6 de 216.

20. Sabiendo que el log2=0,3010 y el log3=0,4771, calcula:

a) log 16

b) log 512

c) log(16/81)

d) log 24

e) log 72

21. Utiliza la calculadora para averiguar el valor de:

a) $\log_7 12456{,}789$

b) $\log_5 5123{,}4345$

c) $\log_9 47658{,}897$

d) $\log_3 23{,}146$

e) $\log_6 1235{,}098$

Cuando la x está en el exponente

- Resuelve la ecuación: $25^{2x-3}=125$
  $25=5^2$ y $125=5^3$, entonces $5^{2(2x-3)}=5^3$
  igualando los exponentes $2(2x-3)=3 \Rightarrow x=9/4$
- Calcula x en $3^x=14$
  Tomando logaritmos: $\log 3^x=\log 14$
  $x\log 3=\log 14$ luego $x=\dfrac{\log 14}{\log 3}=2{,}40$

22. Resuelve las ecuaciones exponenciales:

a) $32^{-9x+9}=16$

b) $27^{2x+3}=9^3$

c) $4^{-3x+8}=8$

d) $9^{8x-7}=1$

e) $25^{-5x-5}=1$

23. Calcula el valor de x:

a) $7^x=5$

b) $5^x=7$

c) $2{,}13^x=4{,}5$

Ecuaciones con logaritmos

Resuelve la ecuación: $4\cdot\log x=2\cdot\log x+\log 4+2$

$4\cdot\log x - 2\cdot\log x=\log 4+\log 100$

$2\cdot\log x = \log 400 \quad \log x^2=\log 400$

$x^2=400 \Rightarrow x=\pm 20$

24. Aplicando las propiedades de los logaritmos resuelve las ecuaciones:

a) $\log(32+x^2) - 2\cdot\log(4-x) = 0$

b) $2\cdot\log x - \log(x-16) = 2$

c) $\log x^2 - \log\dfrac{10x+11}{10} = -2$

d) $5\cdot\log\dfrac{x}{2}+2\cdot\log\dfrac{x}{3}=3\cdot\log x-\log\dfrac{32}{9}$

25. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} 2\cdot\log x-3\cdot\log y=7 \\ \log x+\log y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=70 \\ \log x+\log y=3 \end{cases}$

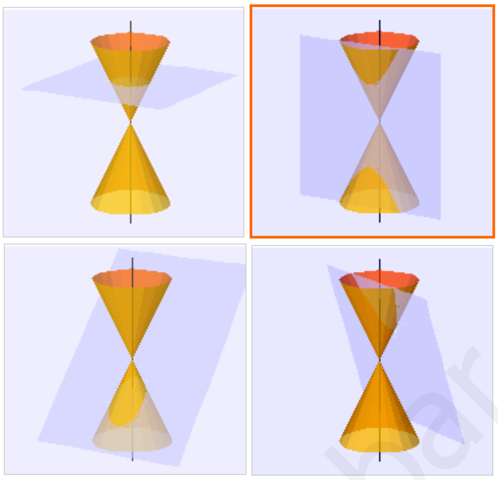
Para saber más

Los cálculos de Franklin

Ahora ya sabes resolver el problema propuesto al principio del tema

1000 libras al **5%** anual durante **100** años se convierten en
1000·1,05100=131.825,67 libras

31000 libras al **5%** anual en **100** años se convierten en
31000·1,05100= 4076539 libras



Otras hipérbolas

La hipérbola es una cónica, junto a la circunferencia, la elipse y la parábola, son curvas que se originan al cortar un cono por un plano.

También es el lugar geométrico de los puntos del plano, cuya diferencia de distancias a dos fijos, los focos, es constante.

El número

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Esta expresión da lugar a uno de los números más importantes de las matemáticas, el **número e**, se trata de un nº irracional, de valor aproximado 2,7182818284590452...

Base de la función exponencial $y=e^x$ y de los logaritmos neperianos o naturales, aparece en muchas situaciones de la vida real.

Una de la curvas en cuya fórmula aparece el **número e** es la catenaria, curva que forma una cadena cuando se cuelga de sus extremos. Puedes verla en los cables del tendido eléctrico y en numerosos elementos arquitectónicos, arcos, puentes,... aunque quizás la confundas con una parábola ya que en los alrededores del vértice sus valores son muy próximos

¿Cuántas veces es mayor la intensidad de un terremoto de magnitud 7,9 en la escala Richter que uno de magnitud 5?.

Las medidas de la escala Richter son logaritmos decimales: 7,9-5=2,9
$10^{2,9}$=794 veces

Terremotos, música y champú

¿Qué tienen en común cosas tan dispares? pues precisamente los logaritmos.

Cuando se pretende representar medidas que toman valores muy dispares, desde muy pequeños a muy grandes, se emplea la escala logarítmica. Algunos ejemplos en que se utiliza:

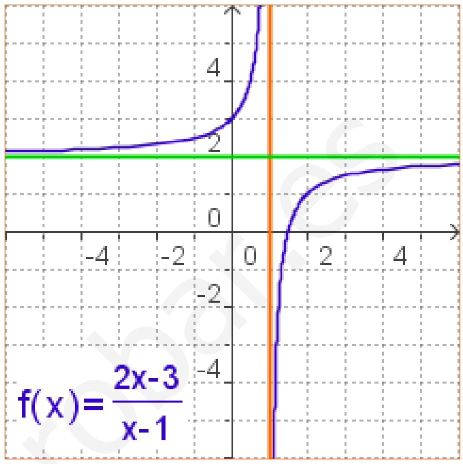
- La escala Richter que mide la intensidad de los terremotos.
- La intensidad del sonido en belios o decibelios, o el mismo pentagrama.
- El ph de una sustancia
- La magnitud de las estrellas.

Recuerda lo más importante

Funciones racionales

Son las que su expresión algebraica es el cociente entre dos polinomios.

✓ Una **función de proporcionalidad inversa**, **y=k/x**, relaciona dos variables inversamente proporcionales. Su gráfica es una **hipérbola**, es discontinua en x=0, decreciente si k>0 y creciente si k<0.



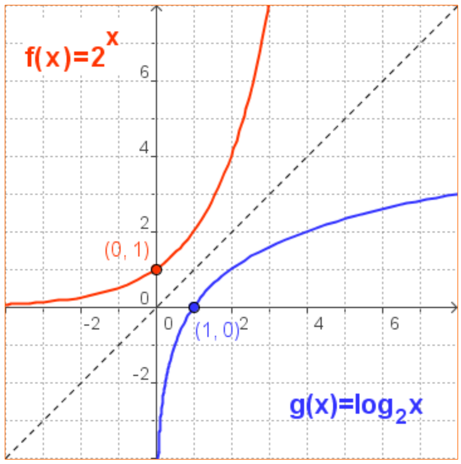
Cuando la gráfica de una función se acerca cada vez más a una recta, confundiéndose con ella, se dice que la recta es una **asíntota**.

✓ Para calcular las asíntotas de una función racional en la que el numerador y denominador tienen el mismo grado, se hace la división, el cociente es la asíntota horizontal. Hay asíntota vertical en los puntos que anulan el denominador siempre que no anulen también el numerador.

Funciones exponenciales

Son de la forma $y=a^x$, con a>0.

- Su dominio es IR.
- Es continua.
- Si a>1 es creciente y decreciente si 0<a<1.
- Corta al eje OY en (0,1) y pasa por (1,a)
- El eje OX es **asíntota** horizontal.



Funciones logarítmicas

Son las que asocian a cada número x su logaritmo en una cierta base, a, $y=\log_a x$.

- Su dominio son los reales positivos y el recorrido es IR
- Es continua
- Si a>1 es creciente y decreciente si 0<a<1.
- Corta al eje OX en (1,0) y pasa por (a,1)
- El eje OY es **asíntota** vertical.

✓ Dados dos números reales positivos, **a** y **b** (**a≠1**), llamamos **logaritmo en base a de b** al número al que hay que elevar **a** para obtener **b**.

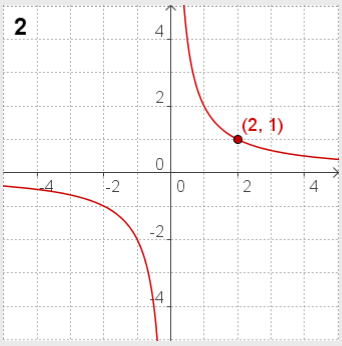
$\log_a b = c$ equivale a $a^c = b$

Propiedades de los logaritmos

- Logaritmo del producto
  $\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$
- Logaritmo del cociente
  $\log_a(b/c)=\log_a b-\log_a c$
- Logaritmo de una potencia
  $\log_a(b^m)=m\cdot\log_a b$
- En cualquier base:
  $\log_a 1=0$ y $\log_a a=1$

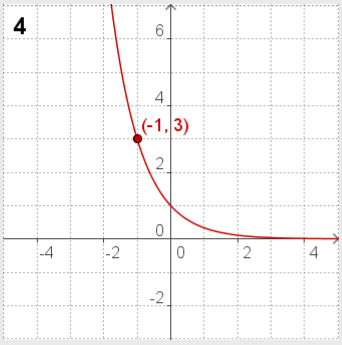
Autoevaluación

1. ¿Cuál es la función de proporcionalidad inversa que a x=1,25 le hace corresponder y=4



2. Escribe la expresión algebraica de la función de la gráfica.

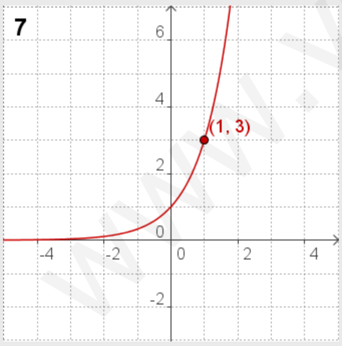
3. Calcula las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{-2x}{x-1}$.



4. Escribe la expresión algebraica de la función exponencial de la gráfica

5. Calcula en cuánto se convierte un capital de 9000 € colocado al 4,5% anual durante 3 años.

6. La población de una especie en extinción se reduce a la mitad cada año. Si al cabo de 9 años quedan 12 ejemplares, ¿cuál era la población inicial?



7. Escribe la expresión de la función logarítmica que es la inversa de la exponencial de la gráfica.

8. Calcula $\log_5 \dfrac{1}{3125}$

9. Sabiendo que log3=0,4771 y sin usar la calculadora, calcula log 8,1

10. Con la calculadora halla el valor de x en $1{,}97^x=215$. Redondea el resultado a centésimas.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. y=276/x
2. y=130/x ; tiempo=2,6 ; v=26
3. 14 min; y=336/x
4. a) x=-3 y=2
   b) x=3 y=1
   c) x=0 y=2
   d) x=-2 y=-1
5. $y=\dfrac{2}{x-2}-1$
6. 8: 184€; 80: 1704€
   f(x)=21+24/x; 21€ mínimo
7. 51347 €
8. 9000 €
9. 2%
10. 15 años
11. 23 años
12. 8,86 gr
13. 3000 años
14. 40 años
15. 3 horas
16. 9 millones
17. a) 216 b) 1/256
    c) 100 d) 8 e) 1/25
18. a) 10 b) 3
    c) 8 d) 3 e) 7
19. a) 5 b) 3 c) -2
    d) 0 e) 3
20. a) 1,2040 b) 2,7090
    c) -0,7044 d) 1,3801 e) 1,8572
21. a) 4,8461 b) 5,3072
    c) 4,9025 d) 2,8598
    e) 3,9731
22. a) x=49/45 b) -3
    c) 13/6 d) 7/8 e) -1
23. a) x=0,827 b) x= 1,209
    c) x=1,989
24. a) x=-2 b) No tiene solución
    c) 80 y 20 d) ±3 (Sólo vale +3)
25. a) x=100 y=0,1
    b) (x=50, y=20) (x=20, y=50)

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. f(x)= 5/x
2. f(x)= 2/x
3. x=1 y=-2
4. $f(x)=(1/3)^x = 3^{-x}$
5. 10270,50 €
6. 6144
7. $y=\log_3 x$
8. -5
9. 0,9084
10. 7,92

No olvides enviar las actividades al tutor

Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia

ACTIVIDADES DE ESO

Nombre y apellidos del alumno:		Curso: **4º**
Quincena nº: **10**	Asignatura: **Matemáticas B**	
Fecha:	Profesor de la asignatura:	

1. ¿Para qué valores de x la función indicada es decreciente?:

a) $f(x) = \frac{3}{x}$

b) $f(x) = -\frac{3}{x}$

2. Calcula las asíntotas de la función $f(x) = \frac{6}{x-4}$

3. Al estudiar cómo afecta la falta de determinado nutriente a un cultivo bacteriano se observa que sigue una función exponencial decreciente que pasa por el punto (2, 1/16). ¿Cuál es la fórmula de la función?

4. Calcula x en cada caso:

a) $\log_x 16 = -2$ x=

b) $\log_2 32 = x$ x=

c) $\log_3 x = -2$ x=

cidead@mec.es

http://cidead.cnice.mec.es

C/ TORRELAGUNA, 58
28027 MADRID
TEL: 91 3778300
FAX: 91 3778314

11 Estadística

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Distinguir los conceptos de población y muestra.
- Diferenciar los tres tipos de variables estadísticas.
- Hacer recuentos y gráficos.
- Calcular e interpretar las medidas estadísticas de centralización más importantes.
- Calcular las principales medidas de dispersión.
- Entender la importancia de la elección de la muestra para que sea representativa.

Antes de empezar

Recuerda

El curso pasado ya estudiaste estadística, y en numerosas ocasiones has hecho estadística aunque no te hayas dado cuentas de ello. Veamos algunos ejemplos.

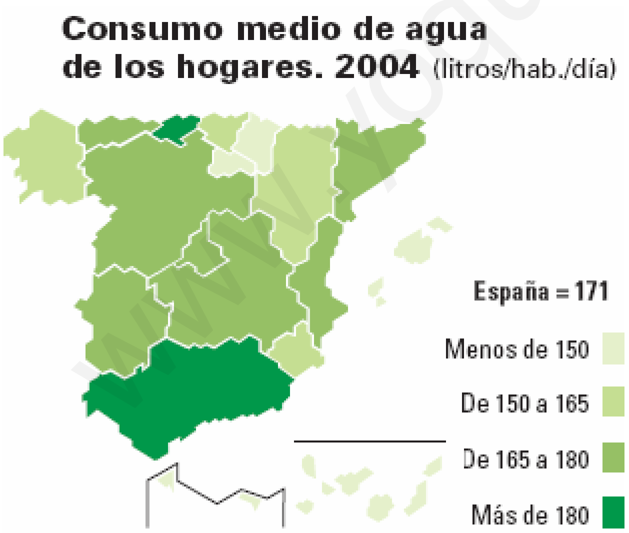
Nota media

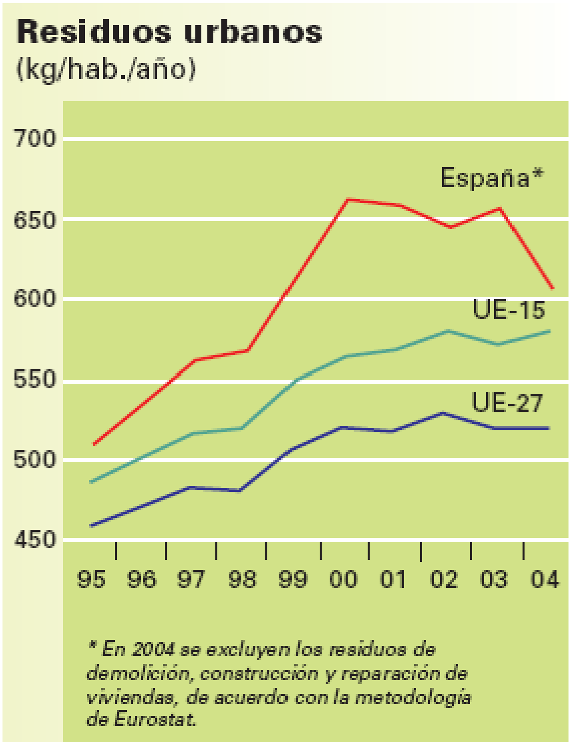
A lo largo de un curso escolar tendrás muchas ocasiones donde calcular este valor. Si una nota depende de dos exámenes y en uno tienes un 4, intentarás sacar al menos un 6 en la otra.

Al final del instituto, las medias del bachillerato y de la prueba selectividad. Comparaciones con la media local o nacional. Las medias de corte para determinadas carreras

Fútbol

El jugador que más goles ha marcado, el portero que menos ha encajado. La clasificación de la liga. La mejor mitad de liga. Los puestos de competiciones europeas, los de descenso, nº de veces internacional, nº de fases finales, minutos jugados, tiros a puerta, faltas.





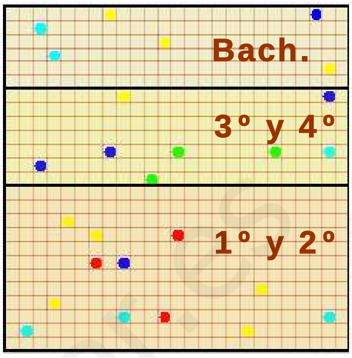
1. Estadística descriptiva

Población y muestra.

Población es el conjunto de individuos, con alguna característica común, sobre el que se hace un estudio estadístico.

La **muestra** es un subconjunto de la población, seleccionada de modo que ponga de manifiesto las características de la misma, de ahí que la propiedad más importante de las muestras es su representatividad.

El proceso seguido en la extracción de la muestra se llama **muestreo**



Si cada cuadrito representa a cada uno de los alumnos de un instituto ficticio y se les pregunta sobre su color favorito, el total de los cuadros es la población, 625 alumnos, y los 26 encuestados constituyen la muestra.

Variables estadísticas

La característica a estudiar en una población es la **variable estadística**.

Las variables estadísticas pueden ser esencialmente de dos tipos **cualitativas** y **cuantitativas.**

Las variables cualitativas son las que no aparecen en forma numérica sino como una categoría o atributo.

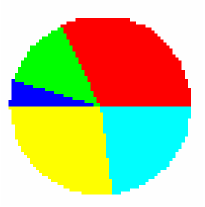
Las variables cuantitativas son las que pueden expresarse numéricamente, y a su vez pueden ser:

- ✓ Cuantitativas discretas, si sólo pueden tomar un número finito de valores.
- ✓ Cuantitativas continuas cuando pueden tomar cualquier valor de un intervalo.

- El color de los ojos, el queso preferido, el continente donde vives, son **variables estadísticas cualitativas.**
- El nº de ordenadores en casa, o de televisores y el nº de habitantes por vivienda, por ejemplo, son variables estadísticas **cuantitativas discretas.**
- El peso, la altura, la velocidad, la densidad, la presión, son **variables estadísticas cuantitativas continuas.**

Los datos:

xi	fi
● (rojo)	7
● (verde)	3
● (azul)	1
● (amarillo)	6
● (celeste)	5
Total	22



Tienen este diagrama de sectores

Gráficos en variables cualitativas.

El diagrama de sectores es el mas indicado para este tipo de información. El porcentaje de datos de cada valor en una muestra se corresponde con el mismo porcentaje de sector de un círculo. Así por ejemplo, si los datos son A, A, A, A, A, B, B, B, C y C. Las frecuencias son (A,5), (B,3) y (C,2), los porcentajes serán (A,50%), (B,30%) y (C,20%) los que corresponde a un gráfico de sectores con (A, 180º), (B,108º) y (C, 72º).

$$\frac{\text{frecuencia}}{\text{nº total de datos}} = \frac{\text{grados del sector}}{360}$$

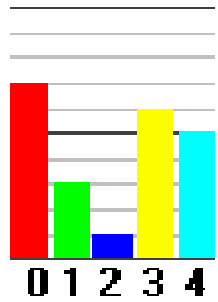
Gráficos en variables discretas.

Diagrama de barras. Bastará que observes un ejemplo.

A los datos,

1 2 4 4 3
3 3 3 0 0
0 4 0 1 0
0 3 4 1 3
0 4

les corresponde el gráfico de la derecha.



Gráficos en variables continuas.

Histograma. Los datos se representan por rectángulos cuya base es la amplitud del intervalo representado y con la altura que nos indica la frecuencia absoluta, si todos los intervalos son de la misma amplitud. Si no es el caso, las alturas se calculan de manera que las áreas sean proporcionales a las frecuencias absolutas. A la izquierda tienes un ejemplo hecho.

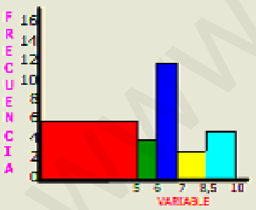
Polígono de frecuencias. Uniremos los centros de la parte superior de todos los rectángulos para obtenerlo.

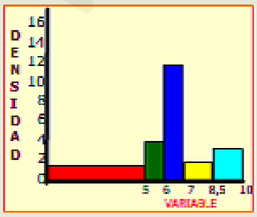
También se suele dibujar el histograma de las **frecuencias acumuladas**, en cada dato se acumula la frecuencia de los datos anteriores.

Intervalos	Recuento	fr.	Dens.
[0 5)	𝍸 |	6	1,2
[5 6)	||||	4	4
[6 7)	𝍸 𝍸 ||	12	12
[7 8,5)	|||	3	2
[8,5 10)	𝍸	5	3,3

RECUENTO DE LAS NOTAS EN 30 EXÁMENES

En el diagrama de frecuencias el área mayor corresponde a la columna roja que no es la de más frecuencia

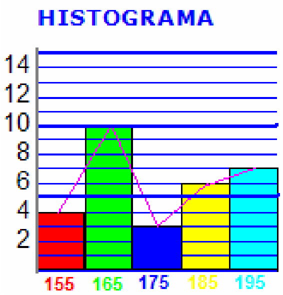


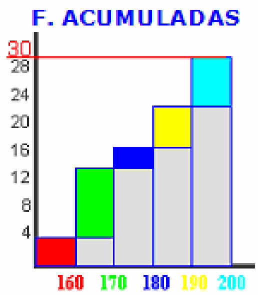


$$\text{Densidad} = \frac{\text{Frecuencia}}{\text{Longitud del intervalo}}$$

Las **áreas** de las barras-densidad resultan **proporcionales a las frecuencias** en el intervalo

[150, 160]→4
[160, 170]→10
[170, 180]→3
[180, 190]→6
[190, 200]→7





EJERCICIOS resueltos

1. Clasifica las los siguientes ejemplos de variables estadísticas: Longitud de un camión, Carga máxima, nº de ruedas, nº de ejes, tipo de camión, marcas de neumáticos, tipo de tapicería, nº de puertas, altura máxima.

Cualitativas: Tipo de camión, marcas de neumáticos, tipo tapicería
C. discretas: Nº de ruedas, nº de ejes, nº de puertas
C. continuas: Longitud de un camión, Carga máxima y altura máxima.

2. Calcula los grados que corresponden a cada valor en un gráfico de sectores hecho a partir de los datos: R, R , V , V , V , V , V , A, A y A

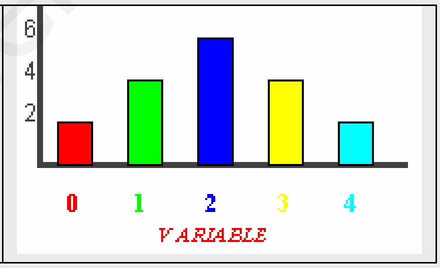
Hacemos el recuento R → 2, V → 5 y A→3 Y calculamos

$\frac{2}{10}=\frac{\text{Grados R}}{360}$, $\frac{5}{10}=\frac{\text{Grados V}}{360}$ y $\frac{3}{10}=\frac{\text{Grados A}}{360}$ y obtenemos

Grados R = 72, Grados V = 180 y Grados A =108

3. Agrupa los datos siguientes y haz un diagrama de barras adecuado. Datos = { 0 1 0 2 3 4 1 2 2 1 2 2 3 4 3 2 1 3 }

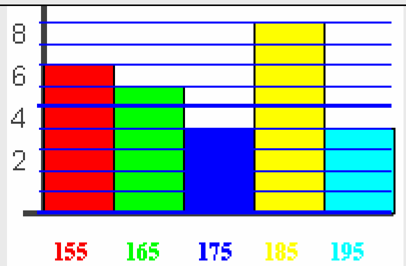
Marca	Frecuencia
0	2
1	4
2	6
3	4
4	2



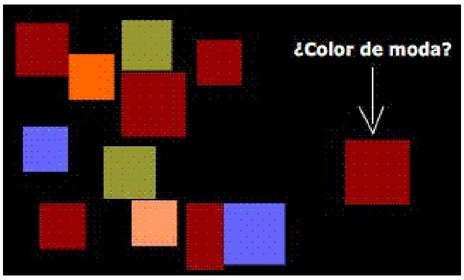
4. Clasifica los datos en intervalos y dibuja un histograma adecuado.

180	197	154	181	189	162	152	162	167	190
189	160	166	197	187	194	152	181	173	154
177	184	186	174	177	159	158	189	160	150

[150, 160]	155→ 7
[160, 170]	165→ 6
[170, 180]	175→ 4
[180, 190]	185→ 9
[190, 200]	195→ 4



2. Medidas de centralización



Por ejemplo, si tenemos las observaciones 6,7,8,6,7,6,8,6,9 y agrupamos los datos vemos claramente que el valor 6 aparece mas que ningún otro. En este caso la **moda** es 6.

xi→fr
6→4
7→2
8→2
9→1

Si ordenamos los datos, y dado que el nº de datos es impar justo el 7 queda en el centro.

6 6 6 6 7 7 8 8 1

Si los datos fueran 6,7,8,6,7,6,8,6,5 una vez ordenados, y como hay una cantidad par de datos, dos de ellos ocuparían el centro:

5 6 6 6 6 7 7 8 8 1

y la mediana será (6+7)/2 = 6.5

Media, mediana y moda.

Un conjunto N de observaciones, N números, puede que por si solo no nos diga nada. En cambio, si además nos dicen que están situados alrededor de uno o varios valores centrales ya tenemos una referencia que sintetiza la información.

Media. La suma de los N números dividida entre N. Por ejemplo, para **3**, **4** y **5**, (**3**+**4**+**5**)/3 = 12/3 = 4; para **1**, **1**, **4**, **8**, **8** y **8**, (**1**·2+**4**+**8**·3)/6=5.

$$\text{Media}=\frac{x_1\cdot f_1+x_2\cdot f_2+\ldots+x_n\cdot f_n}{f_1+f_2+\ldots+f_n}$$

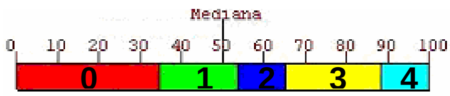
Moda. Si una observación se repite más que cualquier otra, será considerada la moda de esos datos. Por ejemplo, si tenemos las observaciones 6,7,8,6,7,6,8,6,9 y agrupamos los datos 6→4, 7→2, 8→2 y 9→1 vemos claramente que el valor 6 aparece mas que ningún otro. En este caso la moda es 6.

En el caso de variable continua, consideraremos por moda a la marca del intervalo de mayor frecuencia, cuando esto ocurra. También puede ocurrir que haya dos modas o que no haya ninguna que destaque.

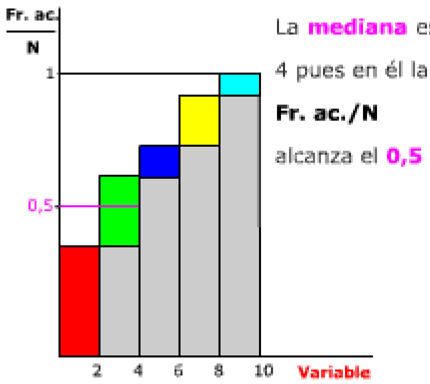
Mediana. El número tal que la mitad de las observaciones son mayores que él y la otra mitad menores.

En general, para pocos datos lo mejor es proceder según el ejemplo de la izquierda, según sea una cantidad para o impar.

Para cantidades mayores, habrá que agrupar los datos primero en una tabla. Y determinar segmentos de longitud proporcional a su frecuencia, disponerlos de forma lineal y marcar el centro como muestra el siguiente ejemplo.



En este otro gráfico vemos indicada la mediana en un diagrama de Frecuencias relativas acumuladas:

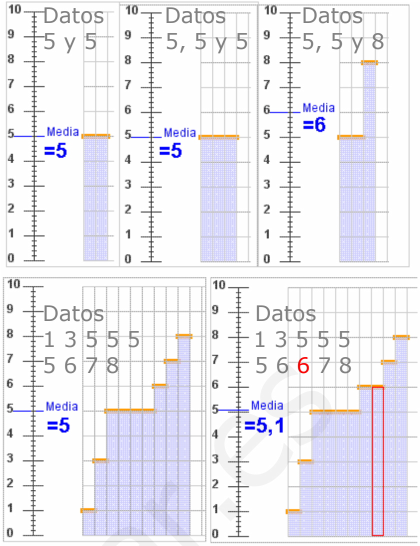


Media. Evolución de esta al añadir y/o cambiar un dato.

1 Para los datos 5 y 5 la media es 5. Si añadimos un 5 se mantiene en 5. Si añadimos un 8 la media pasa a ser 6. (Figura derecha).

2 Si tenemos 9 datos con media 5, necesitamos añadir un 6 para que la media pase a ser 5,1. Si tenemos 19 datos con media 5, necesitamos un dato de valor 7 para que la media suba a 5,1. (Figura derecha).

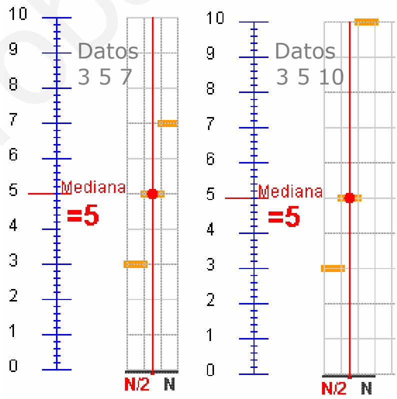
3 Para un conjunto de datos con media 5, si añadimos otro con media 5, por ejemplo 6 y 4, el nuevo conjunto conserva la media.



Mediana. Evolución de esta al añadir y/o cambiar un dato.

1 La mediana, para los datos 2, 3 y 4 es Me=3. Si cambiamos el 4 por 5 o por 6 o por cualquier otro valor mayor sigue siendo Me = 3.

2 En cambio, si añadimos otro dato y tenemos 2, 3, 4 y 4, por ejemplo, la Me = 3,5. Y si ahora añadimos un quinto valor, un 4 o un 5 o un 6 o cualquier otro mayor que 4, la mediana en 2,3, 4, 4 y ?? pasa a ser 4. Da igual el valor ?? es 5, 10 o 25.



Para ver la mediana se traza una vertical desde el eje horizontal en N/2

Media y mediana comparadas

Para los datos 4 y 6 la media y la mediana coinciden en 5. Añadir un 8 o un 11 da lo mismo para la mediana, que pasa a ser en ambos casos 6. Sin embargo la media con un 8 pasa a ser 6 y con un 11 pasa a ser 7. Los valores 8 y 11 se consideran observaciones atípicas, están distanciados del resto de valores, tiran de la media y no afectan a la mediana. Si los datos estuvieran repartidos simétricamente respecto a un valor, ese valor seria a la vez la media y la mediana. En cambio, si los valores a un lado de la mediana están más alejados de ella que los del otro lado, la media se desplaza hacia esos valores alejados que tiran de ella. Hay una asimetría.

Por ejemplo, si tenemos las observaciones

1. 20, 24 y 28.

   Me = 24

2. Y para 20, 24, 28 y 30

   Me = (24+28)/2 = 26

3. Para 20, 24, 28 y 100

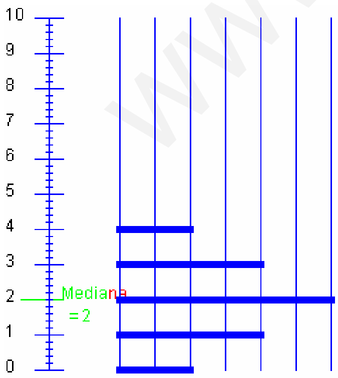
   Me = (24+28)/2 = 26

En cambio la media no se comporta de la misma forma para los mismos datos

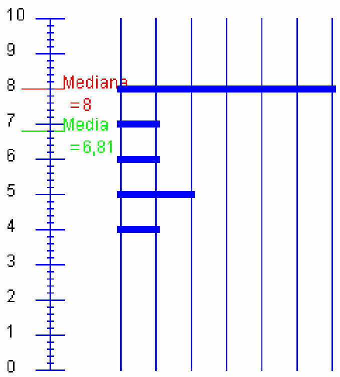
1 $\overline{X} = 24$

2 $\overline{X} = 25{,}5$

3 $\overline{X} = 43$

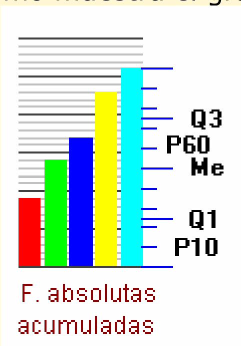


Datos simétricos
Mediana igual a la Media



Datos atípicos
Mediana distinta de la Media

También podemos hacer un diagrama de frecuencias acumuladas y dividir en partes iguales como muestra el gráfico.

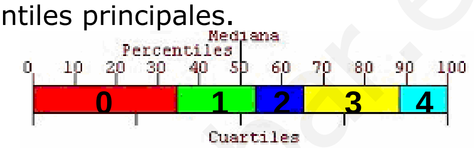


Medidas de posición: cuartiles y percentiles

Dado un conjunto de datos numéricos además de la mediana podemos considerar otras medidas de posición

- Si nos fijamos en el primer valor que supera al 25% o al 75%, estamos hablando del **primer y tercer cuartil, Q_1 y Q_3**.
- Para otros valores como el 10%, o el 80% hablamos de **percentiles, P_{10} y P_{80}** .

Ejemplo. Para la variable de valores 0, 1, 2, 3, 4, y frecuencias 0→9, 1→5, 2→3, 3→6, 4→3, dibujamos barras de longitud proporcional a las frecuencias y dividimos el total en partes iguales: en dos partes para la mediana, cuatro para los cuartiles y 10 para los percentiles principales.



EJERCICIOS resueltos

5. Calcula la media en cada caso:

a) 4, 6, 8
b) 4, 6, 8, 6
c) 100, 120, 180, 200

Soluciones: a) (4+6+8)/3 = 6
b) (4+6+8+6)= 24/4 = 6
c) (100+120+180+200)/4 = 150

6. Calcula la media en cada caso:

a

Marca	Fr
10	2
20	4
30	3
40	2

b

Marca	Fr
100	2
200	4
300	3
400	2

a) $\overline{X} = \dfrac{10\cdot 2 + 20\cdot 4 + 30\cdot 3 + 40\cdot 2}{11} = 24{,}54$

b) $\overline{X} = \dfrac{100\cdot 2 + 200\cdot 4 + 300\cdot 3 + 400\cdot 2}{11} = 245{,}45$

7. Determina la moda y la mediana

a) 5,6,6 c) 1,2,3,4,2
b) 1,1,2,3 d) 3,2,3,2,2,2

Soluciones: a) Me=6, Mo=6 c) Me=2 Mo=2
b) Me=1,5 Mo=1 d) Me=2 Mo=2

8. Calcula la moda y la mediana en cada caso:

a

Marca	Fr
10	2
20	4
30	3
40	2

b

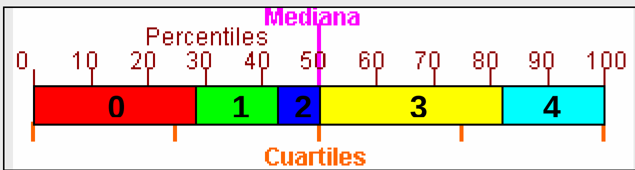
Marca	Fr
100	2
200	3
300	4
400	1

Soluciones:
a) Me=20 Mo=4
b) b) Me=250 Mo=300

9. Calcula la mediana, cuartiles primer y 3º, y el percentil 30 60 y 90 de los datos.

4 1 3 3 2 3 1 3 3 4 0 0 0 4 4 3 0 3 0 3 2 1 0 0 4 3 0 1

Hacemos el recuento: 0→8, 1→4, 2→2, 3→9 y 4→5 y barras de longitud proporcional a la frecuencia para cada valor. Además partimos la longitud total de la barra en 2, 4 y 10 trozos para obtener la mediana, cuartiles y percentiles, tal y como muestra la imagen.



Vemos que la mediana está entre el azul y el amarillo, (3+2)/2 = 2.5, Q1 entre rojo y verde, Q1=0, Q3=3, p30=1, P60=3 y P90=4

3. Medidas de dispersión.

Varianza, Desviación típica y rango

"La estadística es una ciencia según la cual, si yo me como un pollo y tú no te comes ninguno, nos hemos comido como promedio medio pollo cada uno".

La estadística indicará que todos comen lo mismo cuando las medidas de dispersión sean todas nulas.

Rango. El intervalo definido por el menor y el mayor dato. También se llama rango a la diferencia entre el mayor y el menor de los datos.

Varianza. La media aritmética de los cuadrados de las diferencias de los datos con la media.

$$\sigma^2 = \frac{\sum fi\cdot(Xi-\overline{X})^2}{n} \quad \text{que equivale a} \quad \sigma^2 = \frac{\sum fi\cdot(Xi)^2}{n} - (\overline{X})^2$$

Desviación típica. La raíz cuadrada positiva de la varianza.

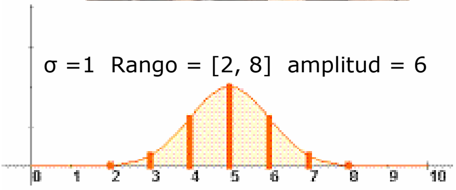
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fi\cdot(Xi-\overline{X})^2}{n}} \quad \text{o} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum fi\cdot Xi^2}{n} - \overline{X}^2}$$

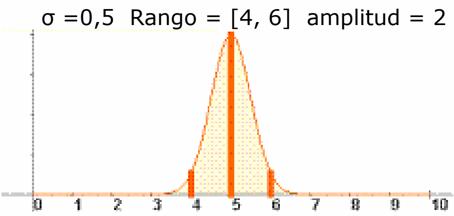
Medir la dispersión

Ese es el objetivo de estas medidas. Por ejemplo, los datos A= {20, 20}, B={15, 20, 20, 25} tienen la misma media, moda y mediana. En todos los casos igual a 20. Sin embargo, puedes comprobar que en ninguna de las tres medidas de dispersión definidas arriba coinciden.

Media y desviación típica.

Para muestras unimodales (una sola moda) y casi simétricas, alrededor de la media podemos considerar un intervalo que contenga la mayoría de los datos. Por ejemplo, para una muestra con media 100 y desviación típica 10, la mayor parte de los datos estarán entre 90 y 110, aproximadamente el 68% ; entre 80 y 120 estará el 95% aproximadamente. Y casi todos entre 70 y 130. Hay una forma de distribución de datos llamada **normal** que cumple con lo anterior, y de una manera u otra, de todas las poblaciones grandes se pueden extraer datos que se ajustan a ella. En cursos superiores verás la importancia de estas distribuciones.





En ambos gráficos la media, mediana y moda valen 5

En la práctica se suele usar la fórmula reducida para el cálculo de la desviación típica.

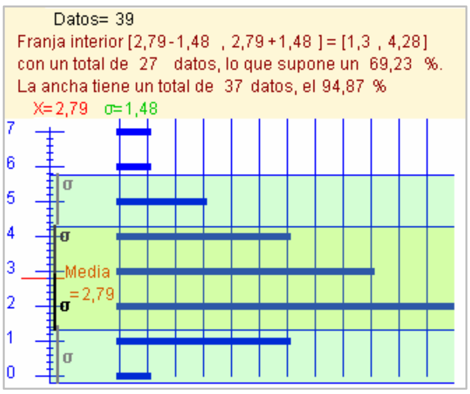
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fi\cdot Xi^2}{n} - \overline{X}^2}$$

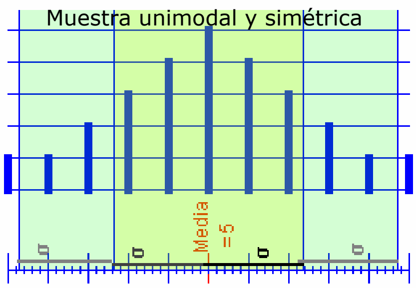
Así, para

Marca	Fr
4	3
5	3
6	2

Se tiene que la media $\overline{X} = 4,85$ y

$$\sigma = \sqrt{\frac{3\cdot 4^2 + 3\cdot 5^2 + 2\cdot 6^2}{8} - 4,85^2}$$





EJERCICIOS resueltos

10. Calcula la media y la desviación típica en

a) 200, 250
b) 175, 275
c) 250, 250

a) $\overline{X} = \dfrac{250+200}{2} = 225 \qquad \sigma = \sqrt{\dfrac{(250-225)^2+(200-225)^2}{2}} = \sqrt{\dfrac{25^2+25^2}{2}} = 25$

b) $\overline{X} = \dfrac{175+275}{2} = 225 \qquad \sigma = \sqrt{\dfrac{(175-225)^2+(275-225)^2}{2}} = \sqrt{\dfrac{50^2+50^2}{2}} = 50$

c) $\overline{X} = \dfrac{250+250}{2} = 250 \qquad \sigma = \sqrt{\dfrac{(250-250)^2+(250-250)^2}{2}} = \sqrt{\dfrac{0^2+0^2}{2}} = 25$

11. Calcula la media y la desviación típica en:

a) 7, 5 , 3, 2, 4, 5
b) 20, 25, 20, 22, 21

a) $\overline{X} = \dfrac{7+5+3+2+4+5}{6} = \dfrac{26}{6} = 4,33$

$$\sigma = \sqrt{\frac{7^2+5^2+3^2+2^2+4^2+5^2}{6} - 4,33^2} = \sqrt{\frac{128}{6} - 18,75} = 1,59$$

b) $\overline{X} = \dfrac{20+25+20+22+21}{5} = \dfrac{108}{5} = 21,6$

$$\sigma = \sqrt{\frac{20^2+25^2+20^2+22^2+21^2}{5} - 21,6^2} = \sqrt{\frac{2350}{5} - 466,56} = 1,85$$

(Nota.- Observa la fórmula utilizada para la desviación)

12. Organiza los datos siguientes en intervalos de 10 cm desde 150 a 200. Amplia la tabla con dos columnas, una para el producto de las marcas con las frecuencias y otra para el producto de las frecuencias con los cuadrados de las diferencias con la media. Calcula la media y la desviación típica.

174	158	150	185	186	178	166	185	199
183	175	173	175	164	173	178	179	164
176	159	190	173	189	163	156	169	

	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$f_i \cdot (x_i-\overline{X})^2$
[150,160)	155	5	775	1733,65
[160,170)	165	5	825	371,58
[170,180)	175	10	1750	19,02
[180,190)	185	7	1295	906,42
[190,200)	195	2	390	914,14
Total		29	5035	3944,82

Con los datos de la tabla es mas fácil, y se tiene:

Media y Desviación típica

$\overline{X} = \dfrac{5035}{29} = 173,62 \qquad \sigma = \sqrt{\dfrac{3944,82}{29}} = 11,66$

4. Representatividad

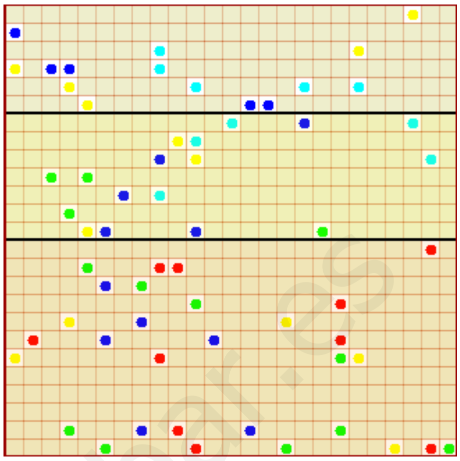
Representatividad. Muestreo estratificado.

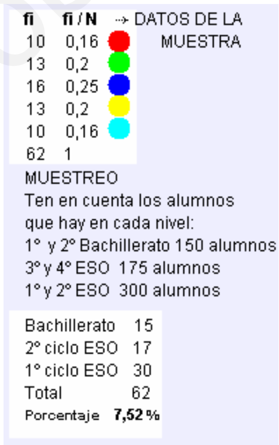
REPRESENTATIVIDAD. Una muestra es representativa de la población cuando en ella podemos encontrar las mismas proporciones de las características de estudio que en el conjunto de la población. El proceso de elegir una muestra, a qué individuos elegimos como representantes de la población, es el punto importante y de ello va a depender que el estudio sea útil o no (representativo o no).

Elegir bien la muestra no es sinónimo de representatividad, pero elegirla mal casi si es sinónimo de no representatividad.

Por ejemplo, si queremos estudiar el poder adquisitivo de una población, y solo elegimos a individuos de una determinada zona, o principalmente de una determinada zona, la muestra con toda seguridad no será representativa. La muestra se ha de elegir tomando muestras de individuos proporcionales a la población de cada zona. Si hay tres zonas con 12.000, 18.000 y 20.000 habitantes, la muestra deberá tener un 24% de la primera zona, 36% de la segunda y 40% de la última.

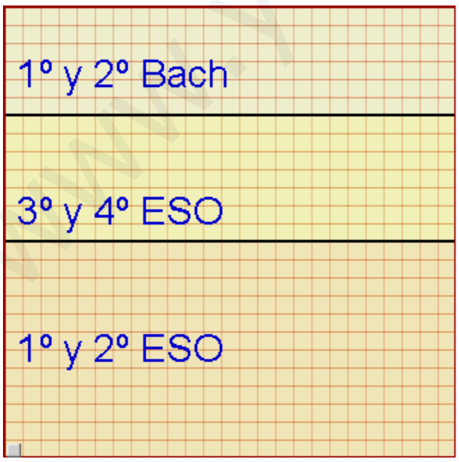
Este tipo de **muestreo**, escogiendo un reparto proporcional a los estratos, se llama **estratificado.**

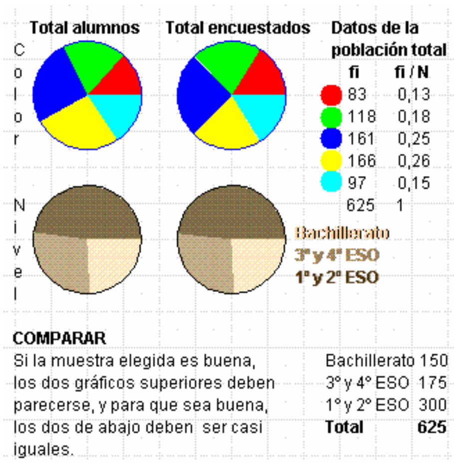




Ejemplo

En la imagen tienes 625 cuadros que representan a los alumnos de un instituto ficticio





A la derecha vemos la muestra estratificada que se ha elegido y el resultado de la encuesta. Los últimos diagramas de sectores comparan la realidad con los resultados de la encuesta.

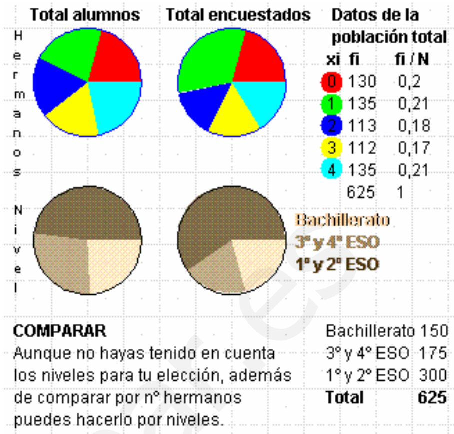
Sesgo. Muestreo aleatorio

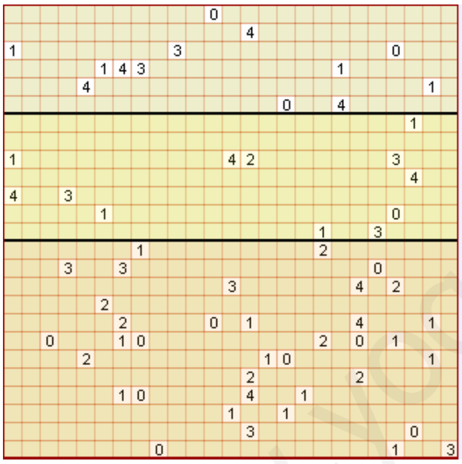
Sesgo. Se dice que la muestra está sesgada cuando hay diferencia entre los datos de la muestra y los datos de toda la población.

Ejemplo: Llamadas telefónicas voluntarias. Estas encuestas tienen varias fuentes de sesgo. Hay familias que no tienen teléfono, el coste de la llamada no todo el mundo está dispuesto a asumirlo. Pero sobre todo, el factor de respuesta voluntaria, los encuestados se auto-seleccionan. Suelen contestar aquellos con una fuerte opinión negativa sobre el tema. El enojo les anima a participar.

Muestreo aleatorio total. A diferencia del estratificado, que guarda las proporciones, esta forma de elegir la muestra considera a toda la población y elige individuos aleatoriamente. Se considera una buena forma de proceder.

En el siguiente ejemplo se ha escogido con ordenador una muestra aleatoria total entre los 625 alumnos de un instituto, este muestreo puede salir estratificado o no, en el ejemplo no salió muy bien estratificado.





xi	fi	fi / N
0	13	0,2
1	20	0,32
2	9	0,14
3	10	0,16
4	10	0,16
	62	1

→ DATOS DE LA MUESTRA

EN ESTE MUESTREO
No tienes que tener en cuenta los niveles, solo que cada alumno sea elegido de entre todos aleatoriamente. Aún así habrá correlacion en los niveles entre muestra y poblacion.

Bachillerato	13
2º ciclo ESO	12
1º ciclo ESO	37
Total	62
Porcentaje	**7,84%**

xi	fi	fi / N
0	13	0,2
1	20	0,32
2	9	0,14
3	10	0,16
4	10	0,16
	62	1

→ DATOS DE LA MUESTRA

EN ESTE MUESTREO
No tienes que tener en cuenta los niveles, solo que cada alumno sea elegido de entre todos aleatoriamente. Aún así habrá correlacion en los niveles entre muestra y poblacion.

Bachillerato	13
2º ciclo ESO	12
1º ciclo ESO	37
Total	62
Porcentaje	**7,84%**

EJERCICIOS resueltos

13. Una gran empresa tiene trabajadores en cuatro áreas. Operarios, Representantes, administración y dirección. Las condiciones de trabajo son bastantes diferentes en cada área, por lo que el grado de satisfacción no es igual en cada una de ellas. Para averiguarlo, si hay 1000, 500, 300 y 200 trabajadores en las áreas de operarios, representantes, administrativos y directivos, ¿cuántos hay que seleccionar de cada área para una muestra de tamaño?

a) 200
b) 100
c) 300

a) De un total de 2000 empleados, los porcentajes para operarios, repartidores, administrativos y directivos son del 50%, 25%, 15% y 10%. Lo cual hace que la muestra tome 100 operarios, 50 repartidores, 30 administrativos y 20 directivos.
b) 50, 25, 15 y 10.
c) 150, 75, 45 y 30

Algunos de los ejercicios propuestos a continuación están elaborados a partir de esta publicación de INE. Puedes ver artículos similares en
http://www.ine.es/prodyser/pubfolletos.htm

4/2007

cifras INE

Boletín Informativo del Instituto Nacional de Estadística

Encuesta de Empleo del Tiempo

Encuesta de Empleo del Tiempo

Qué hacemos y durante cuánto tiempo

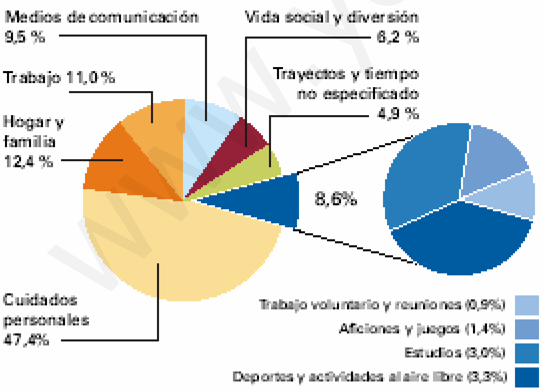
El Instituto Nacional de Estadística (INE) presenta en esta publicación algunos de los principales resultados de la **Encuesta de Empleo del Tiempo**, **primera y única encuesta de ámbito nacional sobre la utilización del tiempo**. Se realizó en España entre los años 2002 y 2003 de manera armonizada con las de otros países europeos, siguiendo las recomendaciones de la Oficina Estadística de la Unión Europea (Eurostat). Entre los años 1998 y 2004 otros países de la Unión llevaron a cabo investigaciones similares.

La encuesta facilita información, entre otras cosas, del **porcentaje de personas que realizan una determinada actividad en el transcurso del día y la duración media diaria dedicada a esa actividad por dichas personas**. Esta información primaria nos permite analizar con rigor la dimensión del trabajo no remunerado realizado por los hogares, la distribución de las responsabilidades familiares en el hogar, la participación de la población en actividades culturales y de ocio, etc. Por otra parte, la información recogida también permite comparar **datos nacionales** de uso del tiempo **en relación con los demás países europeos** que han realizado la encuesta.

Como principales resultados, cabe destacar el dato de que **las tareas domésticas y el cuidado de niños y ancianos son tareas eminentemente femeninas, ya que el 93% de las mujeres las realizan, frente al 70% de los varones**. En el contexto europeo, es de señalar **la primera posición de España en tiempo dedicado a caminar y pasear; pero también el último lugar por lo que se refiere a tiempo dedicado a la lectura**.

El INE quiere aprovechar esta ocasión para expresar su **agradecimiento a los cerca de 24.000 hogares de la muestra**, y pone a su disposición los resultados obtenidos.

Distribución del tiempo por actividades



NOTA: Los informantes de 10 y más años han anotado las actividades realizadas en un día concreto (de lunes a domingo) elegido al azar. El tiempo así estimado se refiere a un "día promedio" obtenido al concentrar todas las actividades de todos los informantes en un solo día. Los datos que aquí se presentan se refieren a toda la población investigada, salvo que se indique expresamente lo contrario.

INEbase — Más información en: **www.ine.es**

DEPÓSITO LEGAL: M-13947-2001 ISSN: 1579-2277 NIPO: 606-07-006-1

Fuentes estadísticas utilizadas:
Procedentes del INE: Encuesta de Empleo del Tiempo. La información internacional procede de **Eurostat**.

Para practicar

1. Agrupa las siguientes variables: a)Peso, b)densidad, c)nº de plantas de los edificios, d)Tipo de fachada de los edificios, e)nº de ventanas, f)metros de fachada, g)nº de habitantes por edificio, h)tipo de puerta principal.

2. Escribe tres variables cualitativas que tengan que ver con embarcaciones.

3. Escribe tres variables cuantitativas discretas que tengan que ver con aviones.

4. Escribe tres variables cuantitativas continuas que tengan que ver con trenes.

5. Si las frecuencias para R, V, A y T son R→3, V→2, A→4 y T→1 ¿Cuántos grados le corresponde a cada letra en un gráfico de sectores?

6. Haz una tabla y un gráfico de sectores de los datos: R R A A R A R V N V R N

7. Haz una tabla y un gráfico de barras con los datos:
3 3 4 5 4 5 3 2 1 2 3 4 5 4 5 4 3 3 4 4

8. Agrupa los datos siguientes en intervalos

195	194	194	182	168	179	191	154	177	189
184	187	155	167	177	187	161	171	190	162
190	152	166	180	156	186	184	167	184	162

9. Haz un histograma de los datos del ejercicio anterior

10. Calcula la media en cada caso:
    a) 4, 6, 8
    b) 4, 6, 8, 6
    c) 100, 120, 180, 200

11. Calcula la media en cada caso:

a)

Marca	Fr
1	3
2	5
3	3
4	2

b)

Marca	Fr
1000	3
2000	5
3000	3
4000	2

12. Determina la moda y la mediana
    a) 50,60,60
    b) 12,12,22,32
    c) 10,20,30,40,20
    d) 35,25,35,25,25,25

13. Calcula la moda y la mediana en cada caso:

a)

Marca	Fr
100	5
200	4
300	6
400	3

b)

Marca	Fr
100	2
200	7
300	9
400	2

14. ¿Cuál o cuáles de los datos siguientes se puede considerar una observación atípica en cada una de las dos series?
    a) 4 5 6 5 7 8 4 5 8 7 5 12 6 7 6 5 4
    b) 8 9 1 9 8 9 7 9 6 7 8

15. Calcula la mediana, primer y tercer cuartil y el percentil 90 de
    1 1 4 3 3 4 2 2 5 3 1 2 1 2 2 4 2 2 4 3 1

16. Calcula la mediana, primer y tercer cuartil y el percentil 20 de
    3 1 1 1 4 1 5 3 1 3 3 4 5 5 4 4 2 1 4 4

17. Calcula la media y la desviación típica en cada uno de los siguientes casos:
    100 y 100
    99 y 101
    110 y 90
    120 y 80

18. Completa la tabla con los datos:

190	151	193	187	158	175	165	158	184	172
197	161	157	157	183	180	150	161	182	169
162	177	160	155	188	157	189	167	186	157

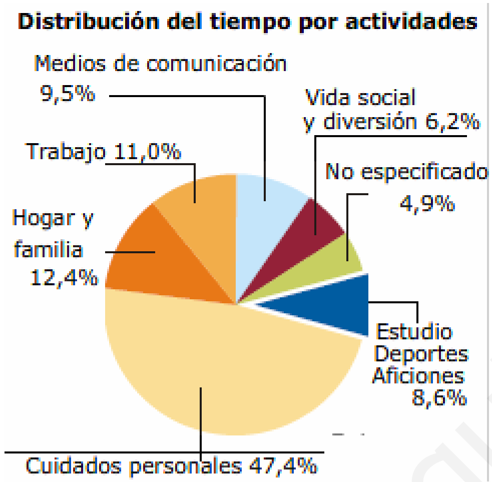
Intervalo	Marca x_i	Frec. f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i (X-x_i)^2$
[150,160)	155			
[160,170)	165			
[170,180)	175			
[180,190)	185			
[190,200)	195			

19. Determina la media y la desviación típica, de los datos de la tabla anterior.

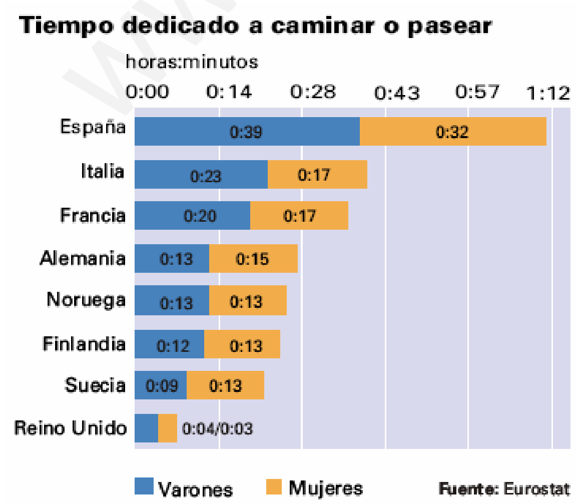
20. Determina los intervalos $\left(\bar{X}-\sigma, \bar{X}+\sigma\right)$ y $\left(\bar{X}-2\sigma, \bar{X}+2\sigma\right)$ y el número de elementos que hay en cada uno.

Marca	Fr
0	5
1	4
2	7
3	3
4	2

21. Observa los siguientes gráficos y responde a las preguntas de cada uno

a) 

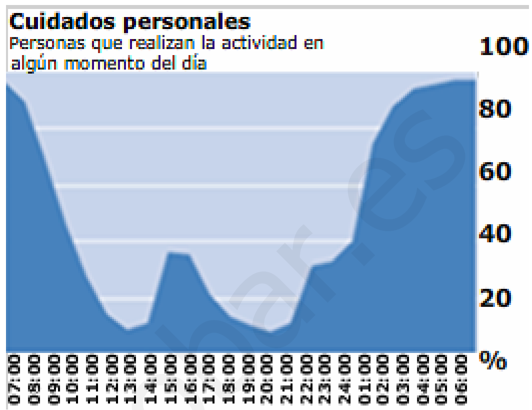
a1. ¿Cuál es la variable estudiada? ¿ y la frecuencia?
a2. ¿A qué grupo de actividades dedicamos más tiempo los españoles?
a3. Calcula cuánto tiempo dedicamos al hogar y la familia ¿cuántos grados ocupa este sector en el diagrama?

b) 

b1. ¿En qué países pasean más las mujeres que los hombres?

b2. Calcula el tiempo medio que se dedica en cada país a pasear.

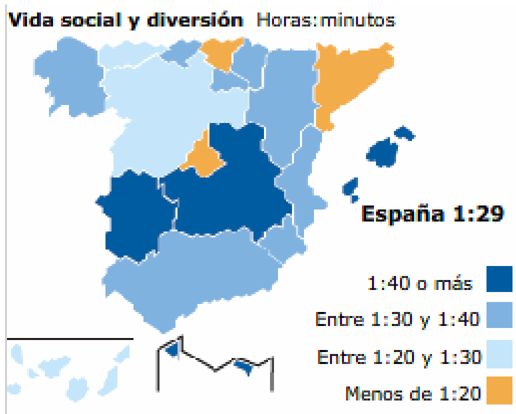
b3. ¿Qué país está en el percentil 50?

c) 

c1. ¿Crees que el dormir se ha contado como actividad de cuidado personal?

c2. A las 15:00 hay un máximo local en la gráfica ¿a qué se debe?

c3. A la hora de la comida el 38% de las personas se dedica al cuidado personal. Significa esto que un 62% de las personas no come?

d) 

d1. ¿Cuáles son las comunidades en las que se dedica menos tiempo a la vida social y a la diversión

d2. ¿Cuánto tiempo dedican a la diversión o a la vida social la mayor parte de las comunidades?

d3. ¿Cuál es el tiempo medio que se dedica en España a esta actividad?

Para saber más

La profesión de enfermería.

Florence Nightingale (1820-1910), conocida por ser la fundadora de la profesión de enfermería. Durante la guerra de Crimea se percató de que la causa principal de las muertes de heridos en combate era la falta de medidas sanitarias. Al aplicarlas, la tasa de mortalidad pasó de un 42,7% a un 2,2%. Gracias a un uso eficaz de los datos consiguió modificar el sistema de atención sanitaria a su vuelta a Gran Bretaña. Cambió el sistema de registro de datos y fue una de las primeras personas en utilizar los gráficos estadísticos para representar los datos de una forma sencilla de forma que hasta los parlamentarios y generales pudieran entender.

Para Florence, los datos no eran algo abstracto, eran una forma de poder salvar vidas humanas.

El padre de la estadística.

Sir Ronald A. Fisher (1890-1962) está considerado el padre de la estadística. Los escritos de Fisher ayudaron a organizar la estadística como campo de estudio preciso cuyos métodos se aplican a problemas prácticos de muchas disciplinas. Como casi todos los pioneros en la estadística, sus trabajos nacieron de la necesidad de resolver problemas prácticos.

Inferencia estadística

La estadística desarrollada en este tema es lo que se conoce como estadística descriptiva, en ella se recoge información y se hacen cálculos que describen como están repartidos. Pongamos el caso que una muestra elegida al azar nos da una media. ¿La verdadera media está próxima a la de la muestra? Si considero un intervalo alrededor de la media muestral, la verdadera ¿con qué probabilidad estará o no en él? De estas preguntas y otras se encarga la inferencia estadística.

Principales campos de aplicación de la estadística

La estadística se aplica en muchos campos como en **Industria y empresas**. Para el control de calidad en la producción en cadena, para el análisis de mercados, para el estudio de precio de venta al público de los artículos fabricados, en gestión financiera,...

En la parte derecha se citan algunas otras de sus aplicaciones.

Algunos campos de aplicación de la estadística

Administración pública

A través de las Delegaciones territoriales y provinciales, se recogen datos para analizarlos y someterlos a procesos estadísticos. De esta forma se conocen datos referidos a nacimientos, defunciones, matrimonios, precios, salarios, trabajo, enseñanza, sanidad,... Todos estos datos se suelen publicar por el INE.

Economía.

En este campo es imprescindible, sobre todo en macro-magnitudes.

Psicología.

La mayor parte de los trabajos científicos en psicología experimental tienen como principal herramienta de trabajo la estadística.

Medicina.

En cualquier estudio experimental de estas áreas Existe una asignatura específica llamada Bioestadística para cubrir esos estudios experimentales. En Genética y antropometría encontramos dos de los campos de mayor aplicación.

Recuerda lo más importante

Población. Alumnos de un instituto ficticio.

Muestra. Alumnos encuestados

Variables estadísticas: Cualitativa, color preferido; Cuantitativa discreta, nº de hermanos y cuantitativa continua, altura.

Consideremos las dos muestras siguientes:

Nº de hermanos: 4 3 2 3 1 2 0 2 0 1 2 3 1 2 4 0 1 1 4 1 1 4 0 4 2 0 4 1

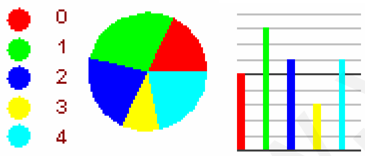
Altura: 182 172 157 194 150 166 163 196 167 199 172 185 172 168 173 160 162 173 161 192 156 164 173 180 193 172

Recuento de datos:

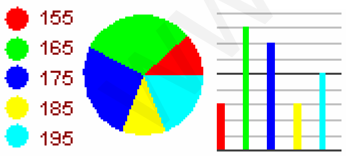
Marca	
0	5
1	8
2	6
3	3
4	6
	28

Intervalo	Xi	Fi
[150,160[	155	3
[160,170[	165	8
[170,180[	175	7
[180,190[	185	3
[190,200[	195	5
Total		26

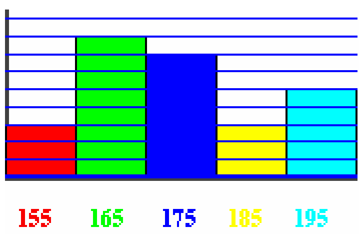
Gráficos de **sectores** y **barras**
Nº de hermanos



Altura.



Histograma



Media y **moda** y **desviación típica**

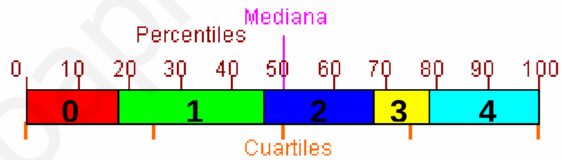
	xi	fi	xi·fi	$f_i \cdot (x_i - \bar{X})^2$
●	0	5	0	0
●	1	8	8	6,37
●	2	6	12	0,06
●	3	3	9	3,67
●	4	6	24	26,64
	Total	28	53	54,67

Media $= \bar{X} = \dfrac{53}{28} = 1.89$

Moda=Mo=1

$\sigma = \sqrt{\dfrac{54.67}{28}} = 1.39$

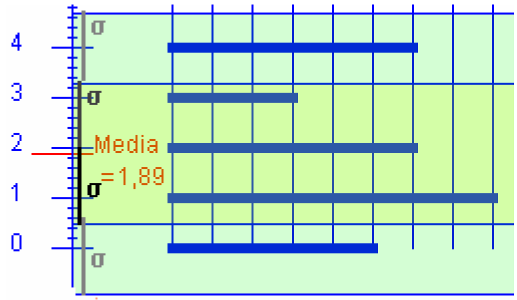
Cuartil, mediana, percentil



Me=2, Q1=1, Q3=3, P20=1, P60=2, P90=4

Recorrido. De 0 a 4, de amplitud 4

Media y desviación En nuestro ejemplo, 17 de 28 datos no se alejan de la media mas de la desviación típica, son el 60,7%, y el 100% no se alejan de la media mas de dos veces la desviación.



Representatividad
Una muestra es representativa de la población cuando en ella podemos encontrar las mismas proporciones de las características de estudio que en el conjunto de la población.

Autoevaluación

1 ¿Cuántos grados corresponden en un diagrama de sectores a la marca 2?

Xi	Fi
1	4
2	4
3	7
4	5

2 ¿La frecuencia mayor, en la tabla anterior, corresponde a la marca?

3 ¿Cuál es la moda ?

Xi	Fi
15	40
25	45
35	37
45	51

4 ¿Cuál es la mediana ?

Xi	Fi
100	4
200	4
300	7
400	5

5 ¿Cuál es el percentil 30 ?

Xi	Fi
1	4
2	4
3	7
4	5

6 ¿Cuál es la media de los datos anteriores?

7 ¿Cuál es la desviación típica del los datos del nº5?

8 ¿Cuál es la media?

Xi	Fi
180	40
200	25
220	27
240	50

9 ¿Cuál es la desviación típica de los datos anteriores?

10 ¿Cuál es el percentil 70?

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. Cualitativas: d) h)
   Cuantitativas discretas c) e) g)
   C. continuas: a) b) f)

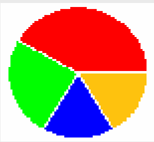
2. Propulsión, Carga, Tipo de travesía

3. Nº de pasajeros, nº ruedas, nº ventanas

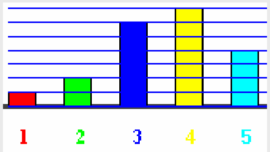
4. Velocidad máxima, carga máxima, potencia.

5. R→108º, V→72º, A→144º y T→36º

6. R→5, A→3, V→2, N→2



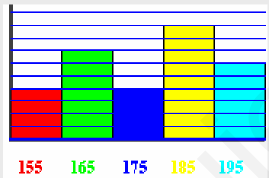
7. 1→1, 2→2, 3→6, 4→ 7, 5→4)



8. Intevalo Xi

[150,160)	155	4
[160,170)	165	7
[170,180)	175	4
[180,190)	185	9
[190,200)	195	6

9. ----------------→



10. a) 6 b) 6 c) 150

11. a) 2.3 b) 2307

12. a)Mo=60, Me=60 b)Mo=12, Me=17
    c)Mo=20, Me=20 d)Mo=25 Me=25

13. a) Mo=300, Me=250 b) Mo=300, Me=300

14. a) 12 b) 1

15. Me= 2, Q1=2, Q3=3, P90=4

16. Me=3, Q1=1, Q3=4 y P20=1

17. La media es 100 en los 4 , y la desviación 0, 1, 10 y 20.

18.

Intervalo	Marca xi	Frec. fi	fi·xi	$fi(X-xi)^2$
[150,160)	155	9	1395	2401
[160,170)	165	7	1155	280,77
[170,180)	175	3	525	40,33
[180,190)	185	8	1480	1494,22
[190,200)	195	3	585	1680,33
		30	5140	5896,66

19. $\bar{x} = 171,\hat{3}$ $\sigma \approx 14.02$

20. En (0.42, 2.9) hay 11, y en (-0.88, 4.14) todos

21. a1)variable:actividades. Fr:porcentaje de tiempo diario que se dedica a cada actividad
    a2)cuidados personales
    a3) 2h 58m 34s 44,64grados
    b1) Alemania, Suecia y Finlandia
    b2) E35,5 I20, F18,5 A14 N13 F12,5 S11 R3,5 en minutos
    b3) Francia
    c1) Sí. c2) Comida y Siesta
    c3) No, el pico ocupa dos horas y algunos comen en media hora
    d1) País Vasco, Cataluña y Madrid
    d2) entre 1:30 y 1:40 horas:minutos
    d3) 1:29

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. Sol 72º
2. Sol 3
3. Sol 51
4. Sol 300
5. Sol 2
6. Sol 2.65
7. Sol 1.06
8. Sol 212.25
9. Sol 24.53
10. Sol 240

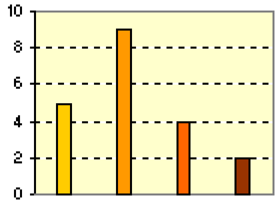
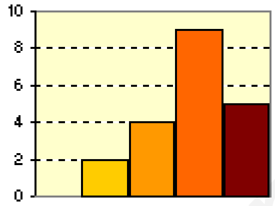
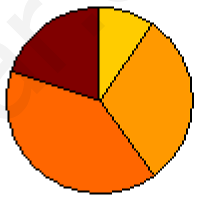
No olvides enviar las actividades al tutor ▶

Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia

ACTIVIDADES DE ESO

Nombre y apellidos del alumno:		Curso: **4º**
Quincena nº: **11**	Asignatura: **Matemáticas B**	
Fecha:	Profesor de la asignatura:	

1. Para los datos de cada apartado elige el gráfico mas adecuado a ellos.

1) Trucha, merluza, sardina, emperador, merluza, merluza, sardina, emperador, sardina y merluza.	2) 1 2 1 2 2 2 3 4 1 2 1 2 3 1 2 2 3 4 2 3	3) 28,1 25,2 28,7 25,7 26 26,4 23,7 22,5 27,5 25,4 27,1 25,9 24,2 28,1 26,3 25,5 24,3 21,8 25,5 24
a) 	b) 	c) 

2. Determina la moda en la distribución 1, la mediana en la 2 y la media en la 3.

a) b) c)

3. Determina la desviación típica en la distribución 1.

4. Calcula los cuartiles 1º y 3º de la distribución 2.

cidead@mec.es

http://cidead.cnice.mec.es

C/ TORRELAGUNA, 58
28027 MADRID
TEL: 91 3778300
FAX: 91 3778314

12 Probabilidad

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Hallar los sucesos de un experimento aleatorio y realizar operaciones con ellos.
- Determinar si dos sucesos son compatibles o incompatibles.
- Calcular la probabilidad de un suceso mediante la regla de Laplace.
- Conocer las propiedades de la probabilidad.
- Hallar la probabilidad de un suceso en un experimento compuesto.
- Hallar probabilidades de sucesos dependientes e independientes.
- Aplicar la probabilidad a situaciones de la vida cotidiana.

Antes de empezar

Seguro que de una forma u otra en muchas ocasiones has manejado probabilidades y no siempre en la escuela. Expresiones como "probablemente lloverá mañana" o como "es probable que lo que diga sea verdad" son bastante comunes en el lenguaje cotidiano.

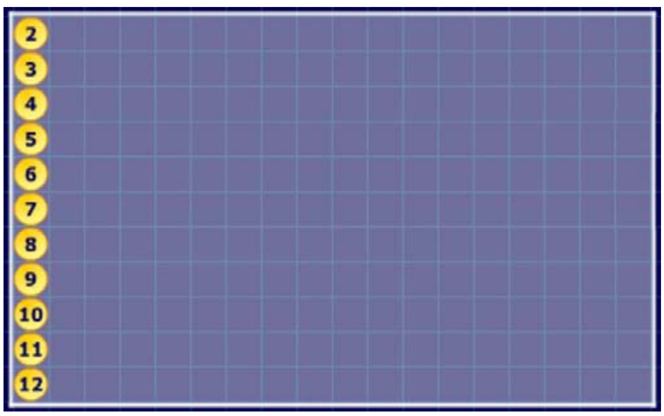
Transmisión hereditaria. Por ejemplo la sordera, una pareja de sordos , para cada hijo que tengan, la probabilidad de que sea también sordo es de 0.25. El grupo sanguíneo de los hijos depende del de los padres con unas probabilidades que se pueden calcular. Las enfermedades sanguíneas genéticas supera las 3500, y continuamente se descubren más.

Probabilidad en el lenguaje ordinario: Casual, accidental, eventual, fortuito, impensado, imprevisible, inesperado, inopinado, ocasional, por suerte, por chiripa, por rebote, de rechazo, sin querer, sin intención.

Los juegos de azar. Al jugar al dominó, a las cartas, a los dados, hay muchas ocasiones en las que "nos la jugamos", y de seguro barajamos si es más o menos probable que hagamos bien o mal.

Investiga

Se tiran dos dados la ficha cuyo número coincide con la suma de los resultados avanza una casilla. ¿Todas tienen la misma probabilidad de ganar? , ¿por cuál apostarías?



1. Experimentos aleatorios

Espacio muestral y sucesos.

Al extraer una carta de una baraja, lanzar una moneda, tirar un dado, y en otros ejemplos análogos, no podemos saber de antemano el resultado que se va a obtener. Son experimentos **aleatorios**, aquellos en los que no se puede predecir el resultado y de ellos se trata aquí.

El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se llama **espacio muestral**, y cada uno de esos posibles resultados es un **suceso elemental**.

✓ Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral, se verifica cuando ocurre cualquiera de los sucesos elementales que lo forman.

Hay un suceso que se verifica siempre, el **suceso seguro** que es el mismo espacio muestral.

Operaciones con sucesos

Con los sucesos de un experimento aleatorio se pueden realizar distintas operaciones. Dados dos sucesos A y B:

- La **unión** de A y B, **AUB**, es el suceso formado por todos los sucesos elementales de A y de B. Ocurre cuando sucede A ó sucede B ó ambos.
- La **intersección**, **A∩B**, es el suceso formado por los sucesos elementales comunes a A y B. Se verifica cuando ocurren A y B a la vez.
- La **diferencia** de A y B, **A\B**, es el suceso formado por los sucesos elementales de A que no están en B. Ocurre si sucede A pero no B.

El suceso **contrario** a uno dado A, está formado por todos los sucesos del espacio muestral que no están en A. Es el que ocurre cuando no sucede A y se indica **Ā**.

- El suceso **contrario** del **seguro** es el **suceso imposible**, que no se verifica nunca, se indica con **Ø**.

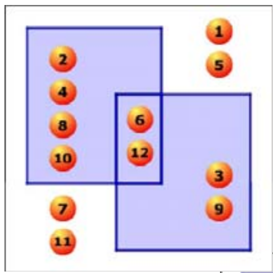
- Al tirar una moneda y un dado, una forma de representar el espacio muestral es:

O bien: (cara, 1) (cara, 2),...

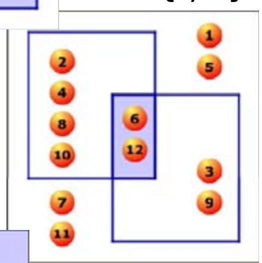
- Al tirar tres monedas (o una moneda tres veces) el espacio muestral es:

E={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

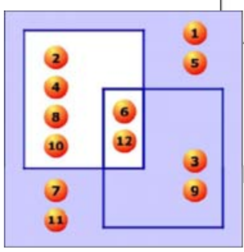
A∪B={2,3,4,6,8,9,10,12}



A∩B={6,12}

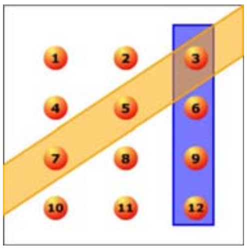


Ā={1,3,5,7,9,11}

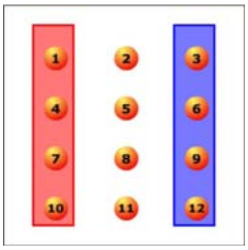


A= "salir par"

B="múltiplo de 3"



Sucesos compatibles
Cuando sale 3 ocurren ambos.



Sucesos incompatibles
No ocurren a la vez, pero no son contrarios

Sucesos compatibles e incompatibles

En un experimento aleatorio hay sucesos que pueden ocurrir a la vez y sucesos que no.

- Dos sucesos se dicen **compatibles** si tienen algún suceso elemental común. En este caso **A∩B≠Ø**, pueden ocurrir a la vez.
- Dos sucesos se dicen **incompatibles** si no tienen ningún suceso elemental común, en este caso **A∩B=Ø** y no pueden ocurrir a la vez

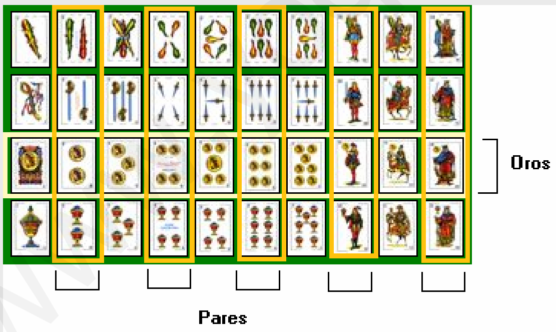
Un suceso y su contrario son siempre incompatibles, pero dos sucesos incompatibles no siempre son contrarios, como se puede ver en el ejemplo de la izquierda.

EJERCICIOS resueltos

1. En una bolsa tenemos tres bolas numeradas como 1, 2 y 3. Consideramos el experimento de extraer una bola y anotar su número. Escribe todos los sucesos posibles. Indica cuáles de ellos son los elementales.

{},{1,2,3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1}, {2} y {3}. Los tres últimos son los elementales.

2. En una baraja, bajo el experimento de extraer una carta, considera los sucesos a) par, b) oros, c) par y oros, d) par u oros, e) par menos oros, f) oros menos par y g) no par



Observa la imagen,
a) hay 20 cartas rodeadas de naranja, las pares,
g) otras 20 que no, las impares,
b) 10 oros.
c) El 2, 4, 6,10 y 12 de oros son pares.
d) Todos los oros y pares juntos son 25 cartas (todas las rodeadas por amarillo o naranja)
e) A los 2, 4, 6, 10 y 12 hay que quitar el 2, 4, 6, 10 y 12 de oros, a 20 cartas se le quitan 5 quedan 15
f) El 1, 3, 5, 7 y 11 de oros.

3. Al tirar un dado consideramos los sucesos: A={Par}, B={mayor de 3}, y C={impar}. De los tres pares de sucesos posibles AB, AC y BC, indica cuáles son compatibles y/o incompatibles:

AB compatibles, cuando salga el 4 o el 6.
AC incompatibles, si es par no puede ser impar.
BC compatibles, cuando salga el 5.

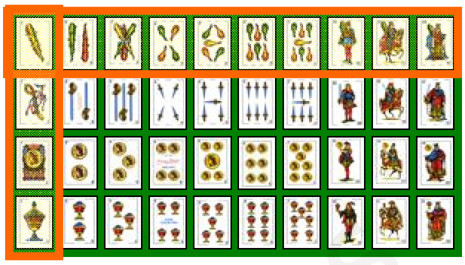
2. Probabilidad de un suceso

La regla de Laplace

Cuando un experimento aleatorio es regular, es decir que todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad de ocurrir ó son **equiprobables**, para calcular la probabilidad de un suceso cualquiera A, basta contar y hacer el cociente entre el nº de sucesos elementales que componen A (**casos favorables**) y el nº de sucesos elementales del espacio muestral (**casos posibles**).

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\textbf{nº casos favorables}}{\textbf{nº casos posibles}}$$

Este resultado se conoce como **regla de Laplace**. Observa que para poder aplicarla es necesario que todos los casos posibles sean igualmente probables.



Extraemos una carta de una baraja de 40:

P(bastos)=10/40=0,25

P(as)=4/40=0,1

P(as de bastos)=1/40=0,025

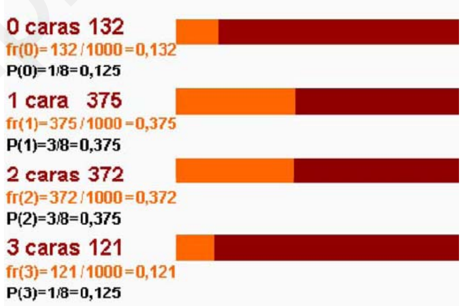
Frecuencia y probabilidad

Como sabes la **frecuencia absoluta** de un suceso es el número de veces que aparece cuando se repite un experimento aleatorio, y la **frecuencia relativa** es la frecuencia absoluta dividida por el número de veces, **n**, que se repite el experimento aleatorio.

Cuando este número **n** es muy grande, la frecuencia relativa con que aparece un suceso tiende a estabilizarse hacia un valor fijo.

Este resultado, conocido como **ley de los grandes números**, nos lleva a definir la probabilidad de un suceso como ese número hacia el que tiende la frecuencia relativa al repetir el experimento muchas veces.

Resultados obtenidos en la simulación del lanzamiento de tres monedas 1000 veces



Sospechamos que un dado está trucado y nos entretenemos en tirarlo 100 veces y anotar los resultados, obteniendo:

	1	2	3	4	5	6
F	20	30	15	15	10	10
Fr	0.2	0.3	0.15	0.15	0.1	0.1

Concluiremos, P(1)=P(2)=··· ya no es 1/6, sino aproximadamente P(1)=0,2; P(2)=0.3 etc. Aquí estaremos usando la frecuencia relativa como probabilidad, en lo sucesivo lo tendremos en cuenta al jugar con ese dado.

Propiedades de la probabilidad

Vista la relación entre frecuencia relativa y probabilidad, se cumple que:

- La probabilidad de un suceso es un número entre 0 y 1.
- La probabilidad del suceso seguro es 1 y la del suceso imposible 0.
- La probabilidad de la unión de dos sucesos **incompatibles** A y B es **P(AUB)=P(A)+P(B)**.

Y de éstas se deduce además que:

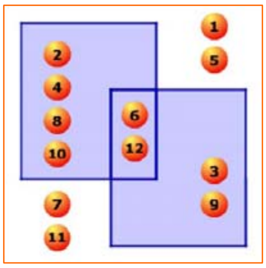
- La probabilidad del contrario es **p(A)=1-P(A)**
- La probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles es **p(AUB)=p(A)+p(B)-p(A∩B)**

A="par" B="múltiplo de 3"

P(A)=6/12=1/2 **P(B)=4/12=1/3**

P($\bar{A}$)=1/2 **p(B)=2/3**

$$\mathbf{P(A \cup B)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$



EJERCICIOS resueltos

4. Tenemos un dado de 20 caras {1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,6,6,6,6,6} perfectamente equilibrado ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada uno de los resultados posibles}

P(1)=1/20=0,05 P(2)=2/20=0,1 P(3)=3/20=0,15
P(4)=4/20=0,2 P(5)=5/20=0,25 P(6)=5/20=0,25

5. Si lanzamos el dado anterior 1000 veces, ¿Cuántas veces se espera que salga cada resultado aproximadamente?

El 1 saldrá alrededor de 50 veces. El 2, alrededor de 100. El 3 alrededor de 150, el 4 alrededor de 200, el 5 alrededor de 250 y el 6 alrededor de 250.

6. Para el dado {1,1,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,4,5,5,5,5,5,5} de 20 caras calcula las probabilidades siguientes:

a) P(par)= 8/20 =0,4 — Hay tres 2 y cinco 4, 8 pares
b) P(mayor de 3)= 11/20=0,55 — 11 posibles entre 20
c) P(par y mayor de 3)=5/20=0,25 — Solo el 4 es par y mayor de 3, y hay 5
d) P(par o mayor de 3)=14/20=0,7 — Si sale 2, 4 ó 5
e) P(par menos mayor de 3)=3/20=0,15 — Solo si sale 2
f) P(mayor de 3 menos par)=6/20=0,3 — Si sale 5
g) P(no par)=12/20=0,6 — Si sale 1, 3 ó 5

7. En una bolsa tenemos 7 bolas rojas, 9 bolas azules y 4 verdes. Extraemos una bola, calcula la probabilidad de que

a) No sea roja	P(no R)=13/20=0,65	Hay 20 bolas, 7 rojas, 13 no rojas
b) Sea verde	P(V)=4/20=0,2	4 verdes
c) Sea roja o azul	P(RUA)=16/20=0,8	7+9=16 rojas ó azules

8. En un grupo, el 40% juega baloncesto y el 60% fútbol, sabiendo que el 85% practica alguno de los dos deportes, ¿qué porcentaje juega a los dos?

P(F)=0,60 P(B)=0,40 P(FUB)=0,85
P(FUB)= P(F)+P(B) - P(F∩B)
0,85=0,60+0,40-P(F∩B) P(F∩B)=0,15 15%

9. En el grupo A hay 18 personas de las que 10 hablan inglés y 8 no; en el B hay 12 personas de las que 3 hablan ingles y 9 no; en el C hay 10 personas 3 que hablan inglés y 7 que no. Se elige al azar una persona de cada grupo, calcula la probabilidad de que de las tres, al menos una hable ingles.

En los siete sucesos de la derecha hay al menos una persona que habla inglés, en vez de mirar sus probabilidades, es más cómodo calcular la **del contrario**, **que ninguno de los tres hable inglés**, para escoger al del A cuento con 8 personas que no hablan inglés, para el del B con 9 y para el del C con 7, así los casos favorables de que ninguno hable inglés son 8·9·7 y los casos posibles 18·12·10

P(al menos uno hable inglés)=
=**1-P(ninguno** habla inglés)=
=1-8·9·7/18·12·10=1-7/30=**23/30**

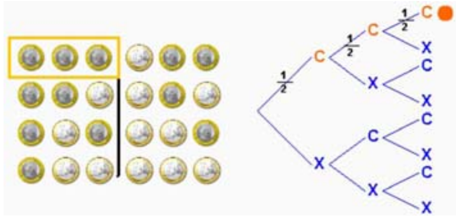
3. Experimentos compuestos

Sucesos compuestos

Un **experimento compuesto** es el que está formado por varios experimentos simples realizados de forma consecutiva.

Para calcular el espacio muestral de un experimento compuesto conviene, en muchas ocasiones, hacer un diagrama de árbol que represente todas las opciones. Cada resultado viene dado por un camino del diagrama. Observa en el ejemplo cómo construir el diagrama de árbol.

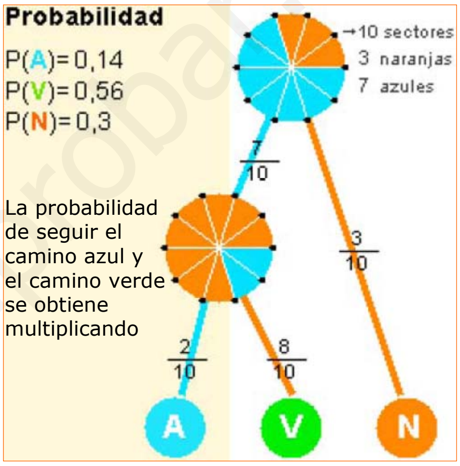
Tiramos una moneda tres veces seguidas, ¿cuál es la probabilidad de obtener tres caras?



8 casos posibles
1 caso favorable

La probabilidad de C en cada moneda 1/2

$$P(CCC) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$



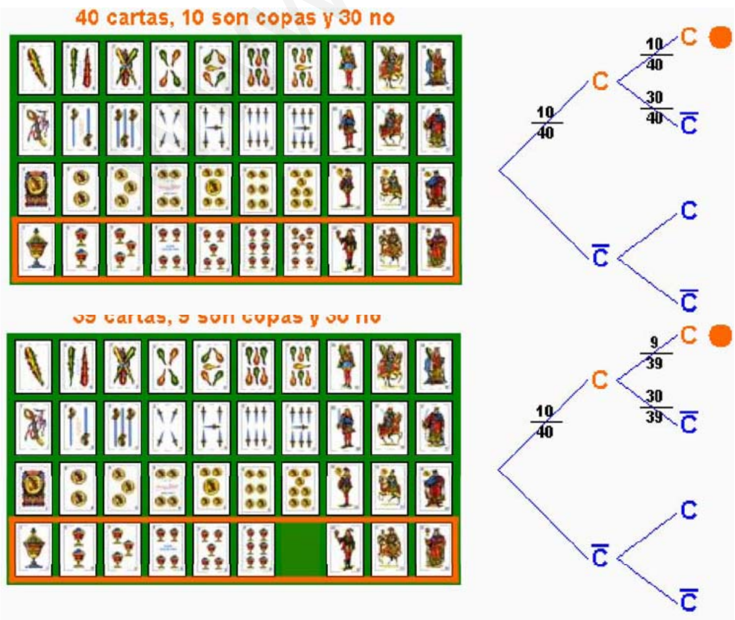
Regla de la multiplicación

Si te fijas en el ejemplo anterior, al indicar la probabilidad de cada rama del camino, se obtiene la probabilidad de cada suceso compuesto calculando el producto de los respectivos sucesos simples.

Para calcular la probabilidad de un suceso en un experimento compuesto se **multiplican las probabilidades** de los sucesos simples que lo forman.

Extracciones con devolución y sin devolución

Un ejemplo de experimento compuesto lo encontramos en la extracción sucesiva de cartas o de bolas de una urna, ... , en estos casos hay que considerar si se devuelve la carta, bola, etc. antes de sacar la siguiente o no.



Sacamos sucesivamente dos cartas de una baraja de 40, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean de copas?

La probabilidad de que la primera carta sea de copas es 10/40.

Para la segunda la probabilidad depende de que devolvamos la primera carta al mazo o no.

Con devolución

$$P(CC) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{16}$$

Sin devolución

$$P(CC) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{3}{52}$$

4. Probabilidad condicionada

Sucesos dependientes e independientes

Cuando se realizan observaciones de varios sucesos puede que uno dependa del otro.

La probabilidad de que ocurra un suceso B cuando está ocurriendo otro, A, se llama **condicionada**, y se expresa **p(B/A)**.

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Dados dos sucesos, se dice que son **independientes** si la presencia del uno no influye en la probabilidad del otro, es decir, **si P(B/A)=P(B)**; en caso contrario son **dependientes**.

- A y B independientes: **P(B/A)=P(B)** y al tener en cuenta la formula anterior para p(B/A),
  A y B independientes: **P(A∩B)=P(A)·P(B)**

$$P(B/A)=\frac{\text{Casos favorables de B ocurriendo A}}{\text{Casos posibles ocurriendo A}}=$$

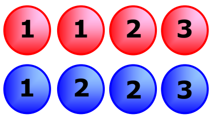
$$=\frac{\text{Casos favorables de A y B}}{\text{Casos favorables de A}}=$$

$$=\frac{\boxed{\dfrac{\text{Casos favorables de A y B}}{\text{Casos favorables en total}}}}{\boxed{\dfrac{\text{Casos favorables de A}}{\text{Casos favorables en total}}}}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Los sucesos "el día está gris" y "llevar paraguas" influyen entre sí. Los sucesos "estudiar" y "aprobar", son sucesos que se favorecen; cuando se estudia, aumenta la probabilidad de aprobar.

En una urna tenemos bolas rojas y azules numeradas como en la figura. ¿Cuál es la probabilidad de sacar cada número?

P(1)=3/8
P(2)=3/8
P(3)=2/8



Si sabemos que la bola es roja

P(1/R)=2/4 (de 4 rojas hay 2 con 1)
P(1)<P(1/R) se favorecen
P(2/R)=1/4 (de 4 rojas hay 1 con 2)
P(2)>P(2/R) se desfavorecen
P(3/R)=1/4 (de 4 rojas hay 1 con 3)
P(3)=P(3/R) son independientes.

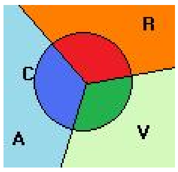
Probabilidad total

Como has podido ver, en los experimentos compuestos se puede hacer un diagrama en árbol, y cada resultado viene dado por un camino en dicho árbol. Para calcular una probabilidad solo hay que dibujar el camino correspondiente, y el producto de las probabilidades de todas la ramas que lo forman será el valor que buscamos.

Así si ocurre A y luego B: **P(A y B)=P(A)·P(B/A)**

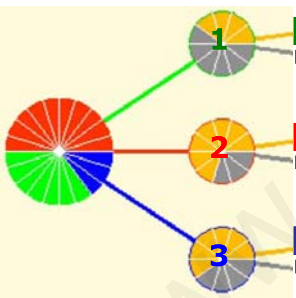
- La suma de las probabilidades de todos los caminos es igual a **1**

Consideremos los sucesos representados por la imagen; R="Rojo", V="Verde" y A="Azul" son tres sucesos incompatibles y tales que la unión forma todo el espacio muestral. Sea C="círculo" un suceso cualquiera. Entonces:



$$P(C)=P(R)\cdot P(C/R)+P(V)\cdot P(C/V)+P(A)\cdot P(C/A)$$

Este resultado es lo que se conoce como **probabilidad total**.



P(VN)=0,35·0,4
P(VG)=0,35·0,6
P(RN)=0,50·0,7
P(RG)=0,50·0,3
P(AN)=0,15·0,6
P(AG)=0,15·0,4

Suma = 1

P(N)=P(V)·P(N/V)+P(R)·P(N/R)+P(A)·P(N/A)=

=**0,35·0,4**+**0,50·0,7**+**0,15·0,6**=**0,58**

Probabilidad "a posteriori"

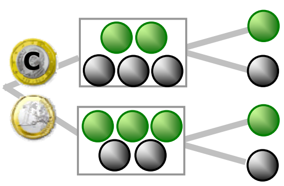
En ocasiones interesa conocer la P(A/S), es decir cuando ya sabemos que ha ocurrido S en la segunda experiencia, nos preguntamos la probabilidad de que se haya llegado a través de A.

Se trata de una probabilidad condicionada:

$$P(A/S)=\frac{P(A\cap S)}{p(S)}$$

Expresión conocida como **Fórmula de Bayes**.

Se tira una moneda, según salga cara o cruz se saca una bola de la urna indicada. Si la bola salió verde, ¿cuál es la probabilidad de que saliese cara?



0,5·0,4=0,20

0,5·0,6=0,30

P(V)=0,20+0,30=0,50

$$P(C/V)=\frac{0{,}5\cdot 0{,}4}{0{,}5\cdot 0{,}4+0{,}5\cdot 0{,}6}=\frac{0{,}2}{0{,}5}=0{,}4$$

EJERCICIOS resueltos

10. Lanzamos un dado de 4 caras {1,2,3,4} y otro de 10 {1,2,2,3,3,3,4,4,4,4}. Cuál es la probabilidad de obtener dos tres. ¿Y dos cuatros?

P(3 y 3) = 1/4 · 3/10 = 3/40 = 0.075
P(4 y 4) = 1/4 · 4/10 = 4/40 = 0.1

11. En una bolsa tenemos 5 bolas numeradas del 1 al 5. Extraemos dos bolas, a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 2 y un 3 si no devolvemos las bolas sacadas? b) ¿y cuál si las devolvemos?

Sin devolución P = 1/5 · 1/4 = 0.05
Con devolución P = 1/5 · 1/5 = 1/25 = 0.04

12. Al tirar dos dados, ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos 10 puntos?.

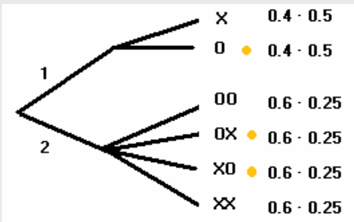
Se obtienen 10 o más puntos en 46 64 55 56 65 y 66.
Son 6 casos, cada uno de ellos con probabilidad 1/6 · 1/6 = 1/36.
P(al menos 10 puntos) = 6 · 1/36 = 1/6
O bien, hay seis casos favorables de entre los 36 posibles, P = 6/36 = 1/6

13. Tiramos una moneda trucada en la que P(C)=0,6 y P(X)=0,4. Si sale cara tiramos un dado {1,2,3,4} de 4 caras y si sale cruz uno {1,2,3,4,5,6} de seis. ¿Tenemos la misma probabilidad de que salga 1 después de que salga cara o cruz?. ¿Cuánto vale en cada caso?. ¿Cuál es la probabilidad de que salga 1?

No, P(C1)=0,6 · 1/4 = 3/20   P(X1) = 0,4 · 1/6 = 2/30
P(1) = P(C1) + P(X1) = 3/20 + 2/30 = 13/60

14. Tenemos un dado {1,1,1,1,2,2,2,2,2,2} de 10 caras. Si sacamos un 1 tiramos una moneda, y dos si sacamos un 2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una cara?

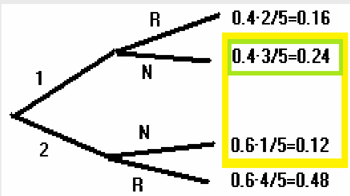
Los casos 1O, 2OX y 2XO tienen una cara.
La suma de las probabilidades es la solución:
P = 0.2 + 0.15 + 0.15 = 0.5



15. Tenemos un dado {1,1,1,1,2,2,2,2,2,2} de 10 caras. Tiramos el dado, si sale 1 sacamos una bola de {RRNNN} y si sacamos un 2 sacamos una de {RRRRN}. Salió N, ¿Cuál es la probabilidad de que fuera con un 1 del dado?

Observa la figura, la probabilidad de que haya salido 1N entre lo que puede ser que haya salido 1N ó 2N es:

$$P(1/N) = \frac{0.24}{0.24+0.12} = \frac{0.24}{0.36} = 0.666$$



16. La probabilidad de acertar en amarillo en la diana de la figura es 0,3, en verde 0,4 y en naranja 0,3. Además si se acierta en amarillo la probabilidad de que sea en brillo es 0,7; la probabilidad de brillo en verde es 0,6 y en naranja 0,3.

a) ¿Cuál es la probabilidad de acertar en la zona brillante?

P(Brillo)=P(A)·P(Brillo/A)+P(V)·(P(Brillo/V)+P(N)·P(Brillo/N)
P(Brillo)=0,3·0,7+0,4·0,6+0,3·0,5=0,21+0,24+0,15=0,60

b) Si se acertó en la zona brillante, ¿cuál es la probabilidad de que fuese en amarillo.

P(A/Brillo)=P(A y Brillo)/P(Brillo)=0,3·0,7/0,60=0,21/0,60=0,35

Para practicar

1. Existen en el mercado varios tipos de dados, aunque el más normal sea el cúbico de seis caras. Los hay de 4, 6, 10, 12, y 20 caras. En general, van numerados del 1 al nº de caras que tienen. Escribe el suceso "Par" para cada uno de ellos.

2. Tenemos un dado de 4 caras numeradas del 1 al 4. Lo tiramos una vez. Escribe el suceso seguro, el imposible, y todos los posibles clasificados por su tamaño.

3. Tenemos un dado de 6 caras blanco, en el que se han escrito en sus caras los siguientes números {1,1,1,2,2,3}. Escribe todos los sucesos posibles.

4. En la escuela municipal de un pueblo hay clases para deportes de equipo de baloncesto, fútbol y voleibol. Hay 100 inscritos en deportes de equipo, 70 van a clases de fútbol, 60 de baloncesto y 40 a fútbol y baloncesto. ¿Cuántos van sólo a voleibol?

5. Determina el número de cartas, en una baraja española de 40, que:

a) Con numeración menor que 4.

b) De bastos y mayores que 4.

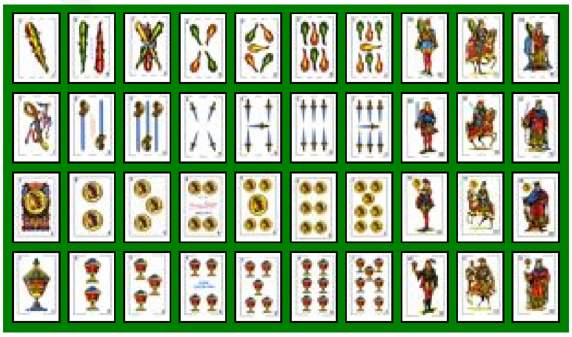
c) Figuras de oros o bastos.

6. En una baraja española, cuenta las cartas de los sucesos :

a) Oros y sietes b) Oros o sietes

c) Siete de oros d) Figuras

e) Oros o figuras f) Oros y figuras



7. Para un dado de seis caras {1,2,3,4,5,6}, escribe los sucesos:

a) Par

b) No par

c) Par y mayor que 3

d) Par o mayor que 3

e) Par menos mayor que 3

f) El contrario de (par y mayor que 3)

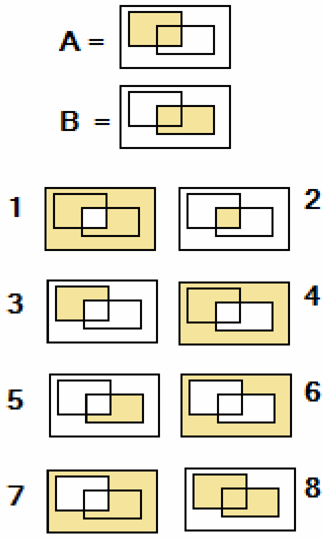
8. Tenemos un dado con los números {1,1,1,2}. Si lo lanzamos 100 veces, alrededor de que cantidad de veces saldrá cada uno de los posibles resultados.

9. Tenemos un dado de diez caras numeradas como {1,2,2,3,3,3,4,4,4,4}. ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales?.

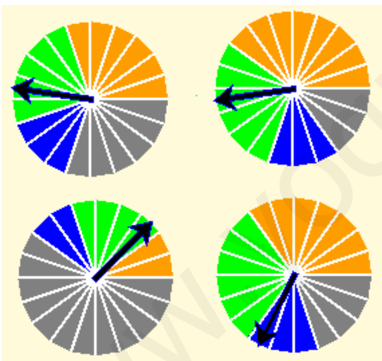
10. Tenemos una ruleta de 10 posiciones, 3 rojas, 4 verdes, 2 negras y una azul. ¿Cuál es la probabilidad de que al girarla se obtenga cada uno de los colores?

11. Si lanzamos dos monedas podremos obtener uno de estos 4 resultados {OO, XO, OX, XX}. Puedes escribir de esta forma los posibles para tres monedas. Y para 4. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras en cada uno de los experimentos?

12. Sabiendo que P(A)=0.5 , p(B)=0.7 y P(2)=0.3, calcula P(1), P(3), P(4), P(5), P(6), P(7) y P(8),



13. ¿Cuál es la probabilidad de obtener naranja, verde, azul o gris en cada una de las siguientes ruletas?



14. Tenemos un dado de 10 caras de esta forma{1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2}. Y dos urnas, una A={R, R, R, V, V} y B={R, V, V, V, V}. Lanzamos el dado, si sale 1 extraemos una bola de A, y si sale 2 de B. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una roja de A? ¿Y una roja de B? ¿Y una verde de A?.

15. En una bolsa hay las siguientes bolas {1,2,2,3,3}. Extraemos primero una bola y la devolvemos para extraer otra. Calcula la probabilidades siguientes: P(1,1), P(1,2), P(1,3).

16. Si para la segunda extracción del ejercicio anterior no devolvemos la 1º bola, ¿Cuál es el valor de las probabilidades ahora?

17. Calcula las probabilidades de obtener 2 oros al extraer dos cartas de una baraja española en los casos de devolver y de no devolver la 1º carta a la baraja antes de extraer la 2ª.

18. Tenemos un dado de 10 caras de la forma {1,1,1,1,2,2,2,2,2,2}, y dos urnas, una A={R,R,R,V,V} y otra B={R,V,V,V,V}. Lanzamos el dado, si sale 1 extraemos una bola de A, y si sale 2 de B. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una R? ¿Y una V?.

19. Tenemos una urna con bolas numeradas como se indica {1,1,2,2,2} y dos urnas I={R,V} y II={N,N,R,V}. Extraemos una bola para decidir de que urna escogemos otra. ¿Cuál es la probabilidad de obtener R ó N?

20. Realizado el experimento del ejercicio anterior, resultó ser V. ¿Cuál es la probabilidad de que fuera extraída de la urna A? ¿Y de la B?

21. Se lanza dos monedas. Si salen dos caras se tira el dado {1,1,1,2,2,2} y si y si no el dado {1,1,2,2,3,3}. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1? ¿Cuándo sale uno con que probabilidad salió también dos caras?

22. Diez amigos organizan un viaje y elige el destino uno de ellos por sorteo. Seis quieren ir a la costa y cuatro al interior. De los primeros, dos quieren ir al norte y cuatro al sur. De los de interior, la mitad prefieren el norte y la otra mitad el sur.

a) Halla la probabilidad de ir a la costa del norte.

b) ¿Cuál es la probabilidad de ir al norte?

c) Si van al norte, ¿cuál es la probabilidad de que sea en la costa?

Para saber más

Un poco de historia

La probabilidad nació en torno a los juegos de azar. En las civilizaciones antiguas (Egipto, Grecia, Roma) se usaba un hueso a modo de dado para diversos juegos donde intervenía el azar (de ahí proviene un juego tradicional: las tabas). Pero incluso restos arqueológicos de hace mas de 40.000 años se han interpretado como elementos de juegos de azar.

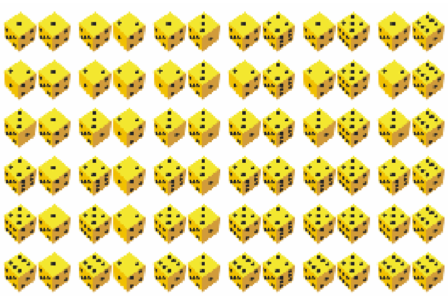
En Grecia y Roma se practicaban con verdadero celo y pasión. Homero (900 a. C.) cuenta que cuando Patroclo era pequeño, se enfadó tanto con un oponente jugando con el astrágalo que casi le mató.

Fue Girolamo Cardano (1501-1576) quien escribió la primera obra importante relacionada con el cálculo de probabilidades en los juegos de azar. Fue en 1565 y se llamaba *Libro de los juegos de azar*. Jacob Bernoulli (1654-1705), Abraham de Moivre (1667-1754), el reverendo Thomas Bayes (1702-1761) y Joseph Lagrange (1736-1813) desarrollaron fórmulas y técnicas para el cálculo de la probabilidad. En el siglo XIX, Pierre Simon, marqués de Laplace (1749--1827), unificó todas estas primeras ideas y compiló la primera teoría general de la probabilidad.

La probabilidad ha seguido evolucionando con matemáticos como Poisson (1781-1840), P.Chebyshev(1821-1894), Émile Borel (1871-1956), A. Markov (1856-1922), y creando escuela para superar estancamientos; Andrei N. Kolmogorov de la escuela rusa, (1903-1987), Nortber Wiener (1894-1964) de la americana. En la actualidad estadística y la probabilidad se unen y se desarrollan juntas.

Carrera con dados

Comprueba que la ficha con más probabilidad de ganar es la nº **7**



P(2)=1/36
P(3)=2/36
P(4)=3/36
P(5)=4/36
P(6)=5/36
P(7)=6/36
P(8)=5/36
P(9)=4/36
P(10)=3/36
P(11)=2/36
P(12)=1/36

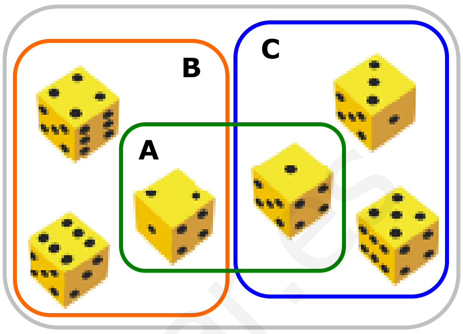
Recuerda lo más importante

Experimentos aleatorios

No puede predecirse el resultado por mucho que lo hayamos experimentado.

Por ejemplo, lanzar un dado.

- Espacio **muestral** E={1,2,3,4,5,6}
- Sucesos elementales: {1}, {2},{3},{4},{5} y{6}
- Otros **sucesos**: A={1,2}, B={2,4,6}, C={1,3,5}
- Suceso **seguro**: E={1.2.3.4.5.6}
- Suceso **imposible**: Ø={ }
- Suceso **contrario** de A: $\overline{A}=\{3,4,5,6\}$



Sucesos **compatibles**: Son los que pueden ocurrir a la vez, como A y B ó A y C.
Sucesos **incompatibles**: Si no pueden ocurrir a la vez, como par e impar, B y C.

Operaciones con sucesos

Unión: A U B = {1,2,4,6}
Intersección: A ∩ B = {2}
Diferencia: A–B={1}

Probabilidad de sucesos

P(S. seguro) = P(E) = 1
P(S. imposible) = P(Ø) = 0
$0 \le P(\text{suceso}) \le 1$
Probabilidad de la Unión:
P(A U B) = P(A) + P(B) si A y B son incompatibles
P(A U B) = P(A) + P(B)–P(A ∩ B) A y B compatibles.

Regla de Laplace:

Cuando los sucesos elementales son equiprobables:

$$P=\frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}}$$

Experimentos compuestos

Están formados por varios experimentos simples realizados de forma consecutiva. Para calcular la probabilidad de multiplican las de los sucesos simples que lo forman.

Probabilidad condicionada

En sucesos consecutivos pueden producirse dos situaciones:
1) **Independientes**, no influyen en el otro.
Como en las extracciones con devolución
2) **Dependientes**, cada suceso está condicionado por el anterior
Como en las extracciones sin devolución.

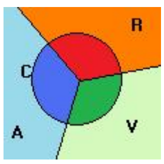
$$\mathbf{P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$$

P(A y B)=P(A)·P(B/A)

Probabilidad total

P(A)+P(V)+P(R)=1

P(C)=P(R)·P(C/R)+P(R)·P(C/A)+P(V)·P(C/V)



$$P(R/C)=\frac{P(R)\cdot P(C/R)}{P(R)\cdot P(C/R)+P(A)\cdot P(C/A)+P(V)\cdot P(C/V)}$$

Para calcular la probabilidad de un suceso anterior, sabiendo lo que ha ocurrido después, emplearemos la **fórmula de Bayes**.

Autoevaluación

1. Tiramos un dado de 10 caras. P(obtener<7)=

2. En una bolsa tenemos 6 bolas rojas 9 bolas azules y 5 bolas verdes. Extraemos una bola. ¿cuál es la probabilidad de obtener una bola roja?

3. Disponemos de una baraja de 100 cartas, de cuatro colores y numeradas del 1 al 25. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 23?

4. Sucesos elementales ={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,…20}, A={1,2,3,4,5}, C={1,2,3,4,···,14,15}. ¿Cuál es la probabilidad de AUC?

5. Lanzamos dos dados normales. ¿Qué probabilidad hay de obtener menos de 8?

6. ¿Qué probabilidad hay de no sacar ni copas ni figuras al extraer una carta de una baraja española?

7. Extraemos una carta de una bajara española. la devolvemos y extraemos otra, ¿Qué probabilidad hay de sacar alguna figura?

8. Tiramos dos monedas. Si salen dos cruces extraemos una bola de una urna con 3 bolas blancas y 7 negras, y en caso contrario de una urna con 4 bolas blancas y 6 negras ¿cuál es la probabilidad de sacar una bola blanca?

9. Tiramos un dado de 10 caras. Si sale menor que 7 extraemos una carta, y en caso contrario dos devolviendo la 1ª antes de sacar la 2ª. ¿Qué probabilidad hay de obtener algún oro?

10. En un colegio el 60% de los alumnos practican fútbol, el 50 % Baloncesto, y el 90% uno o los dos. ¿Qué probabilidad hay de que un estudiante del colegio practique los dos deportes?

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. D4={2,4}, D6={2,4,6}, D10={2,4,6,8}, D12={2,4,6,8,10,12} y D20={2,4,6,8,10,12,14,16,18,20}

2. S imposible ={},{1}, {2}, {3}. {4}, {1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3} {2,4}, {3,4}, {1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4}, {2,3,4}, S seguro = {1,2,3,4}

3. {}, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}

4. 10

5. a. 12 b. 6 c. 6

6. a. 1 carta b. 13 c. 1 d. 12 e. 19 f. 3

7. a. {2,4,6} b. {1,3,5} c. {4,6} d. {2,4,5,6} e. {2} f. {1,2,3,5}

8. Alrededor de 75 el 1 y 25 veces el 2

9. P(1)=0,1; P(2)=0,2; P(3)=0,3 y P(4)=0,4

10. P(rojo)=0,3; P(verde)=0,4; P(negro)=0,2 y P(azul)=0,1

11. En 3, P(dos caras)=3/8 y en 4, P(dos caras)= 6/16=3/8

12. P(1)=0,7; P(3)=0,2; P(4)=0,3; P(5)=0,4; P(6)=0,1; P(7)=0,5 y P(8)=0,9

13. Sol:

Ruleta	Naranja	Verde	Azul	Gris
1	0,3	0,25	0,15	0,3
2	0,4	0,3	0,15	0,15
3	0,1	0,2	0,1	0,6
4	0,35	0,3	0,15	0,2

14. P(RA)=0,4·0,6 =0,24, P(RB)=0,6·0,2=0,12 P(VA)=0,4·0,4=0,16

15. P(1,1)= 1/5 · 1/5 = 1/25, P(1,2) = 1/5 · 2/5 = 2/25 P(1,3) = 1/5 · 2/5 = 2/25

16. P(1,1) = 0, P(1,2) = 1/5 · 1/2 = 0,1 P(1,3) = 1/5 · 1/2 = 0,1

17. Con devolución P(2 oros) = 1/4 · 1/4 = 1/16, sin devolución P(2 oros) = 1/4 · 9/39

18. P(R) =P(1)·P(R/A)+P(2)·P(R/B)= =0,4·0,6+0,6·0,2=0,36 P(Verde) = P(1)·P(V/A)+P(2)·P(V/B) = 0,4·0,4+0,6·0·0,8=0,64

19. P(R ó N)= P(R) +P(N) = (0,4·0,5+0,6·0,25)+(0+0,6·0,5) = 0,65.

20. P(A/V)= 0,2/0,35 = 0,57 P(B/V) = 0,15/0,35=0,43

21. p(1) = 1/4· 1/2 + 3/4 · 2/6 = 3/8, P(dos caras/1) = 1/3

22. a) 0,2 b) 0,4 b) 0,5

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 6/10=0,6
2. 6/20=0,3
3. 4/100=0,04
4. 15/20=0,75
5. 21/36=7/12
6. 21/40
7. 816/1600=0,051
8. 0,375
9. 17/40
10. 0,2

No olvides enviar las actividades al tutor

cidead
Centro para la Innovación y Desarrollo de la Educación a Distancia

ACTIVIDADES DE ESO

Nombre y apellidos del alumno:		Curso: 4º
Quincena nº: 12	Asignatura: Matemáticas B	
Fecha:	Profesor de la asignatura:	

1. En una bolsa hay nueve bolas numeradas del 1 al 9. Se extrae una bola al azar y se mira el número.

a) Escribe el espacio muestral.

b) Escribe los sucesos A={salir mayor que cinco}, B={ salir par }.

c) Escribe los sucesos contrarios a los anteriores.

2. De una baraja de 40 cartas se extrae una carta, calcula la probabilidad de que sea.

a) De oros   b) Un rey   c) Rey o de oros

3. Se extraen dos cartas de una baraja española de cuarenta, calcula la probabilidad de que sean dos reyes.

a) Con devolución   b) Sin devolución

4. Tiramos un dado, si sale múltiplo de 3 sacamos una bola de una bolsa en la que hay 5 bolas rojas y 3 verdes; si no sale múltiplo de tres la sacamos de otra bolsa en la que hay 3 bolas rojas y 3 verdes, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea verde?.

cidead@mec.es

http://cidead.cnice.mec.es

C/ TORRELAGUNA, 58
28027 MADRID
TEL: 91 3778300
FAX: 91 3778314