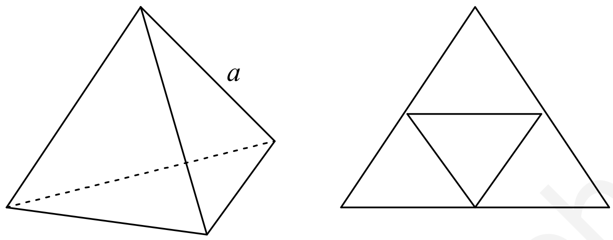
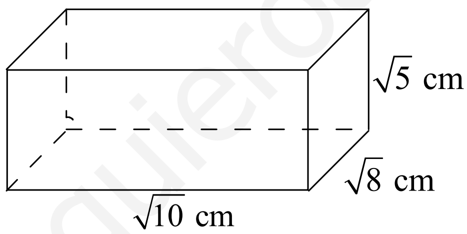
Números reales

1. Explica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
   a) Todo número entero es racional.
   b) Hay números irracionales que son enteros.
   c) Todo número irracional es real.
   d) Todos los números decimales son racionales.
   e) Entre dos números racionales hay infinitos números irracionales.
   f) Los números racionales llenan la recta numérica.

2. Halla la fórmula del área del siguiente tetraedro regular, cuya arista mide a cm.



3. Calcula la medida de la diagonal de un paralelepípedo cuyos lados miden $\sqrt{10}$, $\sqrt{8}$ y $\sqrt{5}$ cm, respectivamente. ¿Qué tipo de número es el resultado? Calcula dicha diagonal de forma exacta y luego aproxima el resultado redondeando a dos decimales y calculando los errores absoluto y relativo cometidos.



4. El valor de una vivienda, cuando han pasado t años desde su adquisición, es $V(t) = k \cdot e^{\alpha \cdot t}$. Si una vivienda se compró por 250 000 euros, y a los 10 años valía 450 000 €.
   a) Calcula el valor de k y α.
   b) Calcula el valor de la vivienda a los 20 años.
   c) ¿Cuánto tiempo ha de pasar desde la compra, para que el valor de la vivienda se triplique?

5. Si $\log_{10} a = -2$, ¿cuánto valdrá el logaritmo decimal de $\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}}$?

Indicación: Trabaja de forma exacta, y utiliza decimales sólo cuando se pida.

Ficha 1 : Números reales

(1) a) Todo entero es racional

Verdadera, ya que si $a \in \mathbb{Z}$ se puede escribir en forma de fracción como $\frac{a}{1} \in \mathbb{Q}$.

b) Hay irracionales que son enteros

Falsa, ya que si un nº es irracional no puede ser racional.

c) Todo irracional es real

Verdadera, los reales están constituidos por los racionales y los irracionales.

d) Todos los decimales son racionales

Falsa, $\pi = 3{,}1415926\ldots$ es decimal y no es racional.

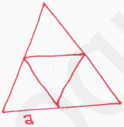
e) Entre dos racionales hay infinitos irracionales

Verdadera

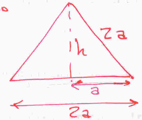
f) Los racionales llenan la recta numérica

Falsa. Para completar la recta numérica hay que incluir los irracionales.

(2)



Todos los triángulos (interiores son iguales) luego podemos considerar el siguiente triángulo



Calculamos h aplicando el tª de Pitágoras:

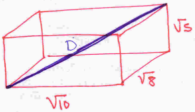
$$(2a)^2 = a^2 + h^2$$

$$4a^2 - a^2 = h^2 \longrightarrow h = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$

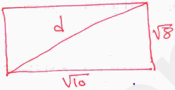
Por tanto, el área del triángulo grande (que coincide con el área total del tetraedro) es:

$$A_{TETRAEDRO} = \frac{2a \cdot a\sqrt{3}}{2} = \boxed{a^2\sqrt{3}\ cm^2}$$

3



Primero necesitamos calcular la diagonal de la base:

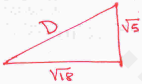


Aplicando el t.ª de Pitágoras $d^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{8})^2$

$$d^2 = 10 + 8$$

$$\boxed{d = \sqrt{18}\ cm}$$

Ahora, tenemos el siguiente triángulo rectángulo:



Aplicando de nuevo el t.ª de Pitágoras:

$$D^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{18})^2$$

$$D^2 = 5 + 18$$

$$\boxed{D = \sqrt{23}\ cm.}$$

Aproximación a las centésimas $D = \sqrt{23} = 4,7958... \simeq \boxed{4,80\ cm}$

Error absoluto: $E_a = |V_{real} - V_{aprox.}| = |\sqrt{23} - 4,80| \simeq \boxed{4,16847669 \cdot 10^{-3}}$

Error relativo: $E_r = \left|\frac{E_a}{V_{real}}\right| \simeq \boxed{8,6918774745 \cdot 10^{-4}}$

4 $V(t) = k \cdot e^{\alpha \cdot t}$

a) $t = 10$ años

$V(0) = 250\,000$ €

$V(10) = 450\,000$ €

$$250\,000 = k \cdot e^{\alpha \cdot 0} \longrightarrow \boxed{k = 250\,000}$$

$$450\,000 = 250\,000 \cdot e^{10\alpha} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{450000}{250000} = e^{10\alpha} \longrightarrow \frac{9}{5} = e^{10\alpha}$$

$$\log_e \frac{9}{5} = 10\alpha \cdot \log_e e$$

③

$0{,}587786664 = 10\,\alpha \longrightarrow \alpha = \boxed{0{,}0587786664 \simeq 0{,}059}$

b) $V(t) = 250\,000 \cdot e^{0{,}059 \cdot t}$

$t = 20$ años

$V(20) = 250\,000 \cdot e^{0{,}059 \cdot 20} = \boxed{813\,593{,}55\ €}$

c) $3 \cdot 250\,000 = 250\,000 \cdot e^{0{,}059 \cdot t}$

$3 = e^{0{,}059 \cdot t}$

$\log_e 3 = \log_e e^{0{,}059 \cdot t}$

$\frac{1{,}098612289}{0{,}059} = \boxed{18{,}6 \text{ años}}$

⑤ $\log_{10} a = -2$

$\log_{10} \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}} = \log_{10}(a\sqrt{a}) - \log_a \sqrt[3]{a^2} =$

$= \log_{10} \sqrt{a^3} - \log_a \sqrt[3]{a^2} = \log_{10} a^{3/2} - \log_{10} a^{2/3} =$

$= \frac{3}{2} \log_{10} a - \frac{2}{3} \log_{10} a = \frac{3}{2} \cdot (-2) - \frac{2}{3} \cdot (-2) = \boxed{-\frac{5}{3}}$