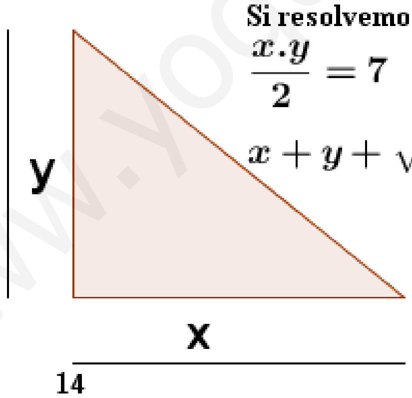
LOS NÚMEROS COMPLEJOS

1. LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Aproximadamente en el año 275 d.c., el matemático griego Diofanto, planteó el siguiente problema:

“Dado un triángulo de área 7 unidades cuadradas y de perímetro 12 unidades, calcular sus lados”.



Si resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\frac{x.y}{2} = 7$$

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 12$$

$$\Rightarrow y = \frac{14}{x}$$

$$\Rightarrow x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 12 \quad \Rightarrow x + \frac{14}{x} + \sqrt{x^2 + \left(\frac{14}{x}\right)^2} = 12$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2 - 12x + 14}{x}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{x^4 + 14}{x^2}}\right)^2 \Rightarrow 4x.\left(6x^2 - 43x + 84 = 0\right)$$

Que con los conocimientos griegos no se podía obtener nigún valor positivo para x, ya que las soluciones de la ecuación son:

$$x = 0;\ x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}$$

Sin embargo, no tenía sentido, **en aquella época**, las raíces cuadradas de números negativos, ni las raíces reales no exactas

El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783), fue posiblemente el primero en utilizar la letra i, para designar $\sqrt{-1}$, de este modo, si tenemos por ejemplo $\sqrt{-3}$, lo expresaremos así:

$$\boldsymbol{designando\ \ i = \sqrt{-1} \qquad entonces:\ \sqrt{-3} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{3}\cdot i}$$

Las soluciones de la ecuación anterior serían:

$$x = \frac{43+\sqrt{167}\cdot i}{12} \quad x = \frac{43-\sqrt{167}\cdot i}{12}$$

De esta forma se define UN NUEVO CONJUNTO DE NÚMEROS, el CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS como los números de la forma:

$$C = \{a+bi \quad / \quad a,b \in R\}$$

Se denomina **forma binómica** del nº complejo a $z = a+bi$ siendo:

$$a = Re(z) = parte\ real \qquad b = Im(z) = parte\ imaginaria$$

"**i**" se le denomina **unidad imaginaria**.

Nota:
Los números reales son números complejos cuya parte imaginaria b es nula, esto es: $R \subset C$
Ejemplo: $3 = 3 + 0 \cdot i$

Los números "imaginarios puros" son los que tienen la parte real nula.
Ejemplo: $4i = 0 + 4 \cdot i$

Relación entre los números complejos y los puntos del plano. Afijo de un nº complejo

Definimos $R^2 = \{(a,b) \quad / \quad a,b \in R\}$ esto es el conjunto de puntos del plano.

Al número complejo $a + bi$ le asociamos la pareja $(a,b) \in R^2$, que se denomina **AFIJO** del nº complejo. De éste modo, podemos representar el número complejo $a + bi$ a través del par **(a, b)** en unos ejes coordenados

Ejemplo: Representa el número complejo z =6+4i → (6,4)

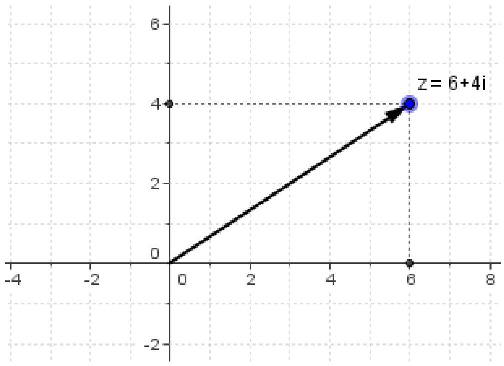
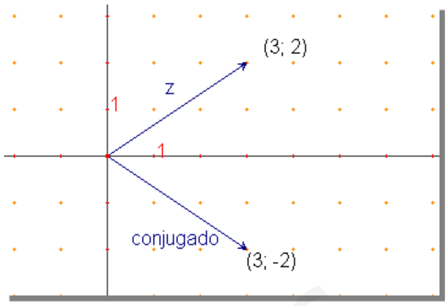


Diagrama de Argand para representar un número complejo z = a + bi → $(a,b) \in R^2$

Conjugado y Opuesto de un número complejo

Dado un número complejo Z, el **número complejo conjugado** y se escribe $\overline{Z}$, tiene la primera componente igual y la segunda cambiada de signo.
Los afijos de un número complejo y su conjugado son simétricos respecto del eje OX.

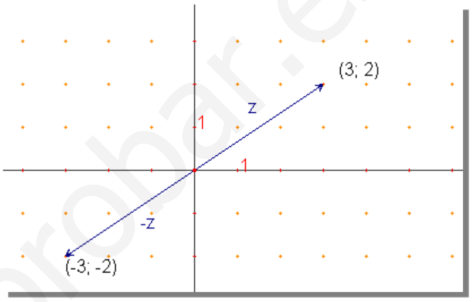


Ejemplo: $z = 3+2i \quad \to (3,2) \qquad \overline{z} = 3-2i \quad \to (3,-2)$

Propiedades del conjugado:

$\overline{\overline{z}} = z$
$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

Dado un número complejo Z, el **número complejo opuesto** y se escribe $-Z$, tiene las dos componentes cambiadas de signo.
Los afijos de un número complejo y su opuesto son simétricos respecto del origen O = (0,0).



Ejemplo:
$z = 3+2i \quad \to (3,2) \qquad -z = -3-2i \quad \to (-3,-2)$

Igualdad de números complejos

Dos números complejos z y z' son iguales si sus respectivas componentes lo son, esto es:

$$z = a+bi \quad \to z = (a,b)$$
$$z' = a'+b'i \quad \to z' = (a',b')$$

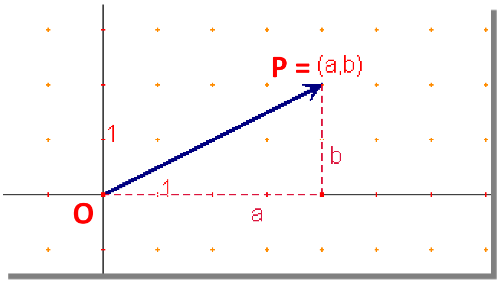
Serán iguales $z = z' \Leftrightarrow a = a' \quad y \quad b = b'$

Módulo de un número complejo

Sea $z = a+bi \quad \to z = (a,b)$, se define el módulo de z como:

El módulo representa la longitud del segmento OP, basta para ello aplicar el Teorema de Pitágoras.

$$|z| = \sqrt{a \ +b^2}$$



El módulo de un número complejo z, de su conjugado $\overline{z}$ y de su opuesto $-z$ son iguales.

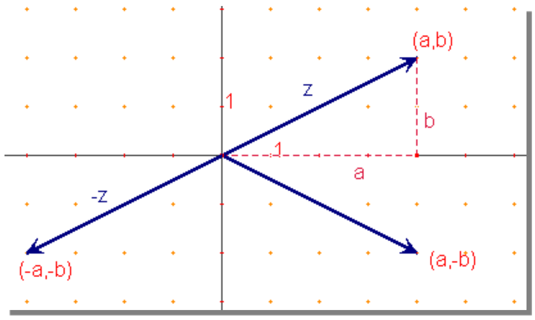
$$|z| = |\overline{z}| = |-z|$$

Ejemplo: Calcular el módulo de $z = (-2,4)$

$$|z| = \sqrt{(-2)^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Propiedades del módulo:

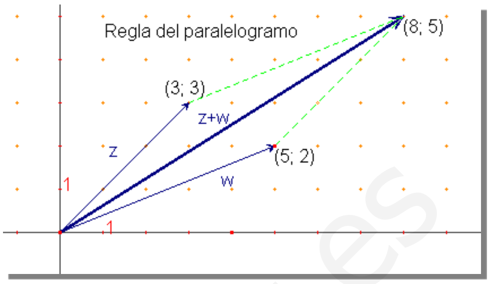
$z \cdot \overline{z} = |z|^2$
$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
$|z+w| \leq |z| + |w|$



Nota: En el caso en que el complejo sea un número real su módulo coincide con su valor absoluto, pues sería $z = a + 0i \rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$ lo que nos permite utilizar el mismo símbolo para ambos conceptos: el módulo de un complejo es una generalización del valor absoluto.

2. OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA

Suma de números complejos



Sean $z = a + bi \quad z' = a' + b'i$ entonces:

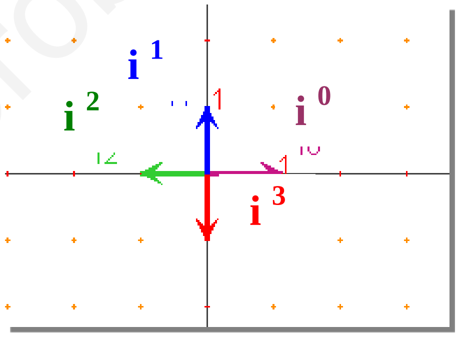
$z + z' = (a + a') + (b + b') \cdot i$

Interpretación geométrica: se suman mediante la regla del paralelogramo.

Producto de un número real por un número complejo

Sean $z = a + bi \quad \alpha \in R$ entonces: $\alpha \cdot z = \alpha \cdot a + \alpha \cdot bi$

Potencias de la unidad imaginaria "i"



$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$

se repite el bloque 1,i,-1,-i

Para hallar la potencia n-ésima de la unidad imaginaria:

i^n se realiza la división entera de "n" entre 4, entonces

$i^n = i^r$ siendo "r" el resto de la división

Ejemplo: calcular $i^{20} = i^0 = 1 \qquad i^{18} = i^2 = -1$

Producto de números complejos en forma binómica

Sean $z_1 = a_1 + b_1 i \quad z_2 = a_2 + b_2 i$ entonces se define:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i - b_1 b_2 =$$
$$= a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i$$

Ejemplo: $(2 + 3i) \cdot (1 - 2i) = 2 - 4i + 3i - 6i^2 = 2 - i - 6(-1) = 2 + 6 - i = 8 - i$

Cociente de números complejos en forma binómica

Sean $z_1 = a_1 + b_1 i \quad z_2 = a_2 + b_2 i$ entonces se define:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1+b_1 i)}{(a_2+b_2 i)} = \frac{(a_1+b_1 i)}{(a_2+b_2 i)} \cdot \frac{(a_2-b_2 i)}{(a_2-b_2 i)} = \frac{a_1a_2 - a_1b_2 i + b_1a_2 i - b_1b_2 i^2}{a_2^2-(b_2 i)^2}$$

$$= \frac{a_1a_2 - a_1b_2 i + b_1a_2 i + b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + (b_1a_2 - a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

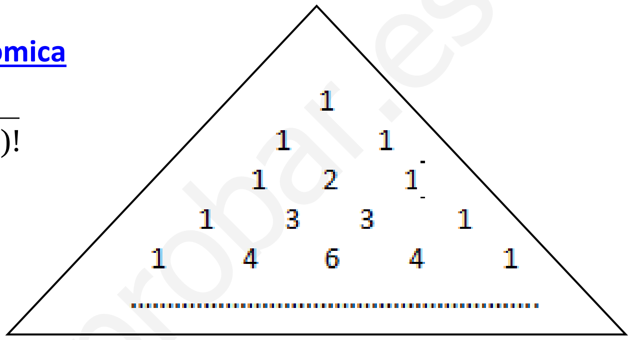
Ejemplo: $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{2-3i} = \frac{3+2i}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{6+9i+4i-6}{4+9} = \frac{13i}{13} = i$$

Potencia de números complejos en forma binómica

Se define el número combinatorio $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$

Ejemplo:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$$



Para obtener los números combinatorios podemos hacer uso del **triángulo de Tartaglia:**
La **potencia de un binomio**:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^{n-0}\, y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1}\, y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2}\, y^2 + \ldots\ldots + \binom{n}{n} x^{n-n}\, y^n$$

en general un sumando será de la forma: $\binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

Ejemplo:

$$(1+2i)^5 = \binom{5}{0} 1^5\,(2i)^0 + \binom{5}{1} 1^4\,(2i)^1 + \binom{5}{2} 1^3\,(2i)^2 + \binom{5}{3} 1^2\,(2i)^3 + \binom{5}{4} 1^1\,(2i)^4$$

$$+ \binom{5}{5} 1\ \ (2\ )^5 = 41-38i$$

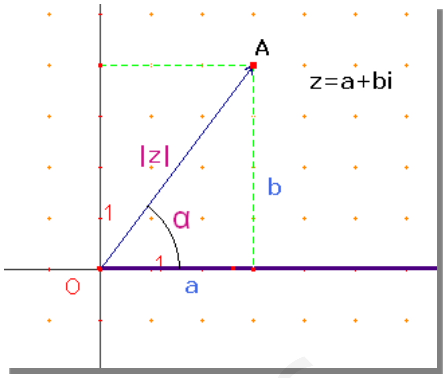
$$(2-3i)^6 = \binom{6}{0} 2^6\,(-3i)^0 + \binom{6}{1} 2^5\,(-3i)^1 + \binom{6}{2} 2^4\,(-3i)^2$$

$$+ \binom{6}{3} 2^3\,(-3i)^3 + \binom{6}{4} 2^2\,(-3i)^4 + \binom{6}{5} 2^1\,(-3i)^5 + \binom{6}{6} 2^0\,(-3i)^6 = 2035+828i$$

$$(-1+2i)^5 = \binom{5}{0}(-1)^5\,(2i)^0 + \binom{5}{1}(-1)^4\,(2i)^1 + \binom{5}{2}(-1)^3\,(2i)^2 + \binom{5}{3}(-1)^2\,(2i)^3 +$$

$$\binom{5}{4}(-1)^1\,(2i)^4 + \binom{}{}(-1)^0\,(2i)^5 = -41-38i$$

3. NÚMERO COMPLEJO EN FORMA POLAR



Sea el número complejo $z=(a,b)\to z=a+bi$

Hemos definido anteriormente el módulo de z:

Módulo del nº complejo z como la distancia del punto (a, b) al origen, viene dado por $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

Ahora además definimos el argumento de z:

Argumento del nº complejo z como el ángulo que forma el vector de posición con el semieje positivo real.

Antes de continuar hay que darse cuenta de que el módulo de un complejo queda unívocamente determinado pero el argumento no del todo, ya que si tenemos que **α** es el argumento de un numero complejo, entonces **α+2kπ,** donde k es un numero entero, es también argumento del complejo.

Es por ello que, lo que vamos a hacer, es quedarnos con un intervalo de longitud 2π, el intervalo **[− π, π]** y al único ángulo que esté en ese intervalo es lo que llamaremos el **argumento principal de z y lo denominamos arg(z) y al conjunto de todos los argumentos Arg(z)**.

El ARGUMENTO PRINCIPAL de un complejo z = a + ib ≠ 0 será:

$$\arg(z)=\propto=\begin{cases} \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) & si \quad a>0 \quad (primer, cuarto\ cuadrante) \\ \dfrac{\pi}{2} & si \quad a=0 \ \ y\ b>0 \quad (sobre\ el\ eje\ imaginario+) \\ -\dfrac{\pi}{2} & si \quad a=0 \ \ y\ b<0 \quad (sobre\ el\ eje\ imaginario\ -) \\ \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)+\pi & si \quad a<0\,, b>0 \quad (segundo\ cuadrante) \\ \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)-\pi & si \quad a<0\,, b<0 \quad (tercer\ cuadrante) \end{cases}$$

Arg(z) = { conjunto de todos los argumentos } =
{α+2kπ donde **α = arg(z)** = argumento principal α ∈ [− π, π] }

Si $z=(a,b)\to z=a+bi$ entonces en forma polar se escribe:

$$z=r_\alpha \quad siendo \quad r=|z| \quad y \quad \alpha \quad \text{el argumento}$$

Ejemplo: pasar a la forma polar los siguientes complejos

$$z=1-i\to z=(1,-1)$$

$$\text{módulo}\to|\ z\ |=\sqrt{1\ \ +(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$\text{argumento principal}\to\alpha=\arctan\frac{-1}{1}=\arctan(-1)=-\frac{\pi}{\ }$$

$$z=\sqrt{2}_{-\frac{\pi}{4}}$$

$$z=-1+\sqrt{3}\,i \rightarrow z=(-1,\sqrt{3})$$

$$módulo \rightarrow |\ z\ |=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})}\ =2$$

$$\text{argumento} \rightarrow \alpha=\arctan\frac{\sqrt{3}}{-1}=\arctan(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}+\quad=\frac{\pi}{3}$$

$$z=2_{\frac{2\pi}{3}}$$

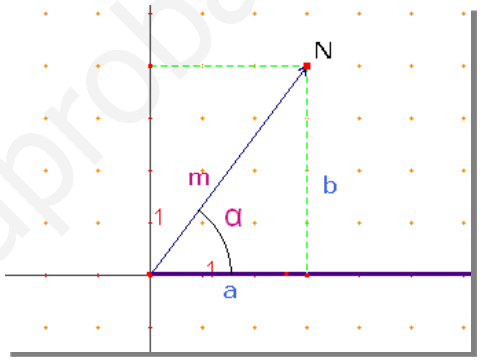
$$z=-2\sqrt{3}-2\,i \rightarrow z=(-2\sqrt{3},-2)$$

$$módulo \rightarrow |\ z\ |=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(-2)}\ =4$$

$$\text{argumento} \rightarrow \alpha=\arctan\frac{-2}{-2\sqrt{3}}=\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\pi}{6}-\quad=\frac{5\pi}{\ }$$

$$z=4_{\frac{-5\pi}{6}}$$

4. COMPLEJO EN FORMA TRIGONOMÉTRICA



Si nos fijamos en la figura observamos que:

$$\cos\alpha=\frac{a}{|z|} \quad\rightarrow\quad a=|z|\cdot\cos\alpha$$

$$\text{sen}\,\alpha=\frac{b}{|z|} \quad\rightarrow\quad b=|z|\cdot\text{sen}\,\alpha$$

Tendremos:

$$z=a+b\,i=(r\cos\alpha)+(r\,sen\,\alpha)i=r\,(\cos\alpha+i\,sen\,\alpha)$$

se denomina **forma trigonométrica.**

Resumiendo, las formas que hemos visto de representar un número complejo son:

1. En forma de **Par**: $z=(a,b)$
2. En forma **Binómica**: $z=a+b\,i$
3. En forma **Polar**:
   $z=r_\alpha \quad donde \quad r=|\ z\ |=\sqrt{a^2+b^2} \quad y \quad \alpha\ el\ argumento\ principal$
4. En forma **Trigonométrica**:
   $z=r(\cos\alpha+i\,sen\alpha) \quad siendo \quad r=módulo\ \ y\ \ \alpha\ el\ argumento\ principal$

Ejemplo: Expresar en todas las formas el número complejo $z=(2,2)$:

Par: $z=(2,2)$ **Binómica:** $z=2+2i$

Polar:

$z = r_\alpha \quad donde \quad r = |z| = \sqrt{2^2+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad y \quad \alpha = \arctan\frac{2}{2}$

$\rightarrow \alpha = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

$por \;\; tanto \;\; z = 2\sqrt{\ }_{\frac{\pi}{4}}$

Trigonométrica: $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \quad i\,sen\frac{\pi}{\ }\right)$

Si se desarrolla la trigonométrica se obtiene la **forma binómica:**

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,sen\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{\ }}{2}i\right) = 2 + 2i$$

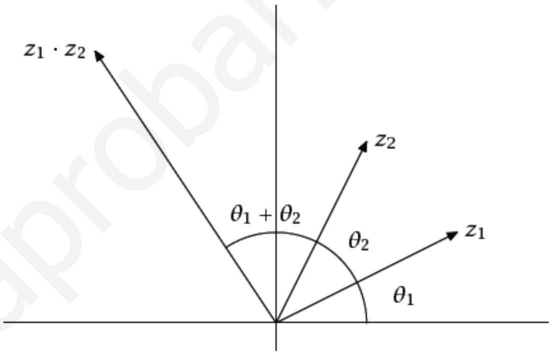
5. PRODUCTO DE NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR

Sean los números complejos

$z = r_\alpha \quad y \quad z_1 = r'_\beta$ entonces el producto

$z \cdot z_1$ es un número complejo que tiene de módulo el producto de los módulos y de argumento la suma de los argumentos, esto es:

$$z \cdot z_1 = (r \cdot r'_{\ \alpha+\beta}$$



Demostración:

Expresemos el producto con los números complejos $z \;\; y \;\; z_1$ expresados en forma trigonométrica y desarrollamos el producto

$$z \cdot z_1 = r(\cos\alpha + i\,sen\alpha) \cdot r\;(\cos\beta + i sen\beta) = r \cdot r'(\cos\alpha + i\,sen\alpha)(\cos\beta + i\,sen\beta) =$$

$$= r \cdot r'(\cos\alpha \cdot \cos\beta + i\cos\alpha \cdot sen\beta + i\,sen\alpha \cdot \cos\beta + i^2 sen\alpha \cdot sen\beta) =$$

$$= r \cdot r'((\cos\alpha \cdot \cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta) + (\cos\alpha \cdot sen\beta + sen\alpha \cdot \cos\beta)i) =$$

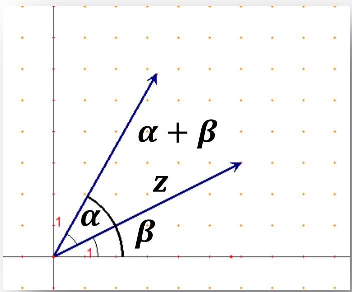
$$= r \cdot r'(\cos(\alpha+\beta) + i\,sen(\alpha+\beta))$$

$$z \cdot z_1 = (r \cdot r'_{\ \alpha+\beta}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Si multiplicamos un nº complejo z = r_β por otro nº complejo de módulo 1 y argumento α, lo que estamos haciendo es GIRAR un ángulo α el nº complejo z, pues recordemos que si realizamos el producto en forma polar tenemos:

$$\mathbf{r_\beta \cdot 1_\alpha = r_{\beta+\alpha}}$$



6. COCIENTE DE NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR

Sean los números complejos $z = r_\alpha \quad y \quad z_1 = r'_\beta$ entonces el cociente $\frac{z}{z_1}$ es un número complejo que tiene de módulo el cociente de los módulos y de argumento la diferencia de los argumentos, esto es:

$$\frac{\quad}{_1} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}$$

Demostración:

Expresemos el cociente con los números complejos $z \; y \; z_1$ expresados en forma trigonomé-trica y multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador:

$$\frac{z}{z_1} = \frac{r(\cos\alpha + i\,sen\alpha)}{r'(\cos\beta + i\,sen\beta)} = \frac{r}{r'}\frac{(\cos\alpha + i\,sen\alpha)}{(\cos\beta + i\,sen\beta)} \cdot \frac{(\cos\beta - i\,sen\beta)}{(\cos\beta - i\,sen\beta)} =$$

$$= \frac{r}{r'}\frac{(\cos\alpha + i\,sen\alpha)(\cos\beta - i\,sen\beta)}{(\cos\beta + i\,sen\beta)(\cos\beta - i\,sen\beta)} =$$

$$= \frac{r}{r'}\frac{(\cos\alpha\cdot\cos\beta - i\cos\alpha\cdot sen\beta + i\,sen\alpha\cos\beta - i^2 sen\alpha\cdot sen\beta)}{(\cos\beta)^2 - (i\,sen\beta)^2} =$$

$$= \frac{r}{r'}\frac{(\cos\alpha\cdot\cos\beta + sen\alpha\cdot sen\beta) + i(sen\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot sen\beta))}{\cos^2\beta - i^2 sen^2\beta} =$$

$$= \frac{r}{r'}\frac{\cos(\alpha-\beta) + i\,sen(\alpha-\beta)}{\cos^2\beta + sen\;\;\beta} \quad \frac{r}{r}\frac{\cos(\alpha-\beta) + i\,sen(\alpha-\beta)}{1}$$

$$= \frac{r}{r'}[\cos(\alpha-\beta) + i\,sen(\alpha-\beta)]$$

$$\frac{\quad}{_1} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}$$

7. POTENCIA DE UN NÚMERO COMPLEJO EN FORMA POLAR

Sea el número complejo $z = r_\alpha$ entonces la potencia z^n es un número complejo que tiene de módulo elevado a "n" el argumento multiplicado por "n", esto es:

$$z^n = \qquad {}_{n\alpha}$$

Demostración:

$$z \quad = r_\alpha \cdot r_\alpha \cdot r_\alpha \cdot \ldots\ldots r_\alpha = r^n{}_{n\alpha}$$

8. RADICACIÓN DE UN Nº COMPLEJO EN FORMA POLAR

Sea el número complejo $z = R_\alpha$ entonces la raíz n-ésima $\sqrt[n]{z}$ en forma polar será un núme-ro complejo m_β tal que:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{R_\alpha} = r_\beta \Leftrightarrow (r_\beta)^n = R_\alpha$$

Entonces para obtener $\rho \; y \; \beta$, teniendo en cuenta lo anterior:

$$\left(r_\beta\right)^n = R_\alpha \Leftrightarrow r^n{}_{n\cdot\beta} = R_\alpha$$

$$de\ \ donde: \quad r^n = R \Rightarrow r = \sqrt[n]{R} \quad el\ \ módulo\ \ "r"\,será\ \ la\ \ raíz\ \ n-ésima\ \ de\ R$$

$$la\ \ diferencia\ \ de\ \ \arg umentos\ \ será\ \ un\ \ múltiplo\ \ entero\ \ de\ \ vueltas:$$

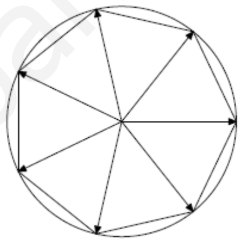
$$n\cdot\beta - \alpha = 2\pi\cdot k \quad k\in Z$$

$$de\ \ donde: \beta = \frac{\alpha + 2\pi\ \ k}{n} \quad k = 0,1,2,\ldots\ldots(n-1)$$

$$existirán\ \ n\ \ raíces\ \ dist\operatorname{int}as\,de\ \ \arg umentos \quad \beta_1, \beta\ ,\ldots..$$

$$para\ \ los\ \ dist\operatorname{int}os\ \ valores\ \ de\ \ k$$

Las n raíces de se obtienen girando la raíz n–ésima principal $z_0 = r_{\frac{\alpha}{n}}$ con giros sucesivos de amplitud 2π/n. Es decir, si representamos todas las raíces n–ésimas de z obtenemos n puntos sobre una circunferencia de centro (0,0) y radio $r = \sqrt[n]{R}$ que forman un polígono regular de n lados $z = R_\alpha$



EJEMPLO: Calcular $\sqrt[3]{z}$ siendo $z = 27_{\frac{\pi}{2}}$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{27_{\frac{\pi}{2}}} = \sqrt[3]{27}_{\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot k}{3} = \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi\cdot k}{3}} = 3_{\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi\cdot k}{3}} \quad k = 0,1,2$$

$$\frac{\frac{\pi}{2}\ \ 2\pi\cdot k}{3} = \frac{\frac{\pi}{2}}{3} + \frac{2\pi\cdot k}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi\cdot k}{3}$$

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi\cdot 0}{3} = \frac{\pi}{6} \to z_1 = 3_{\frac{\pi}{6}} = 3(\cos\frac{\pi}{6} + i\,sen\frac{\pi}{6}) =$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \ \frac{3}{2} \to \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi\cdot 1}{3} = \frac{5\pi}{6} \to z_2 = 3_{\frac{5\pi}{6}} = 3(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,sen\frac{5\pi}{6}) =$$

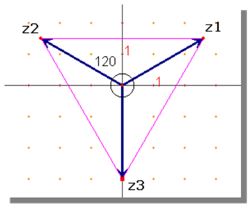
$$= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \ \frac{3}{2} \to \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\ \ \frac{3}{2}\right)$$

$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad \beta_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi\cdot 2}{3} = \frac{3\pi}{2} \to z_3 = 3_{\frac{3\pi}{2}} = 3(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,sen\frac{3\pi}{2}) =$$

$$= 3\left(0 - i\right) = -3i \to \left(0, -3\right)$$

Representemos gráficamente los afijos de las raíces y veamos qué figura forman:

$$\sqrt[3]{z} \qquad \sqrt[3]{27_{\frac{\pi}{2}}} = \sqrt[3]{27}_{\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}}$$



$$\beta_i = \frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3} = \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\cdot k \quad con \quad k=0,1,2$$

Luego cada raíz se obtiene de la anterior girando 120 grados:
Los afijos de las raíces son los vértices de un triángulo equilátero.

9. FÓRMULA DE DE MOIVRE

Sea el número complejo en forma polar $z = M_\alpha$, sabemos que:

$$z^n = (M_\alpha)^n = M^n_{n\alpha} = M^n(\cos n\alpha + i\, sen\, n\alpha)$$

Y por otra parte:

$$z^n = (M_\alpha)^n = M^n(\cos\alpha + i\, sen\alpha)^n$$

De donde resulta:

$$M^n(\cos\alpha + i\, sen\alpha)^n = M^n(\cos n\alpha + i\, sen\, n\alpha)$$

Simplificando se obtiene la fórmula de **De Moivre:**

$$(\cos\alpha + i\, sen\alpha)^n = (\cos n\alpha + i\, sen\, n\alpha)$$

Esta fórmula sirve para calcular razones trigonométricas de ángulos múltiplos de uno dado.