

Sea la sucesión $a_n = \frac{2n-1}{3n+2}$ $n \in \mathbb{N}$:

1. Estudiar la monotonía:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-1}{3(n+1)+2} - \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2n+2-1}{3n+3+2} - \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2n+1}{3n+5} - \frac{2n-1}{3n+2} =$$

$$= \frac{(2n+1) \cdot (3n+2) - (2n-1) \cdot (3n+5)}{(3n+5) \cdot (3n+2)} = \frac{6n^2 + 4n + 3n + 2 - 6n^2 - 10n + 3n + 5}{(3n+5) \cdot (3n+2)} =$$

$$\frac{7}{(3n+5) \cdot (3n+2)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{luego la sucesión } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es monótona creciente.}$$

2. Calcular el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)_{IND} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \left(2 - \frac{1}{n} \right)}{n \cdot \left(3 + \frac{2}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2}{3}$

3. ¿A partir de qué término de la sucesión en adelante la distancia entre un término de la sucesión y $2/3$ es menor que 10^{-6} ?

Nota: es lo mismo decir $a_n \in E(l, \varepsilon) \Leftrightarrow d(a_n, l) < \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - l| < \varepsilon$

Planteamos la condición: hemos de obtener el **valor de "n"** (de la posición del término) a partir del cual se cumple:

$$d\left(a_n, \frac{2}{3}\right) < 10^{-6} \Rightarrow \left| \frac{2n-1}{3n+2} - \frac{2}{3} \right| < 10^{-6} \Rightarrow \left| \frac{3 \cdot (2n-1) - 2 \cdot (3n+2)}{3 \cdot (3n+2)} \right| < 10^{-6} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{6n-3-6n-4}{3 \cdot (3n+2)} \right| < 10^{-6} \Rightarrow \left| \frac{-7}{3 \cdot (3n+2)} \right| < 10^{-6}$$

Como $n \in \mathbb{N}$ será el valor absoluto $\left| \frac{-7}{3 \cdot (3n+2)} \right| = \frac{7}{3 \cdot (3n+2)}$ por lo que:

$$\left| \frac{-7}{3 \cdot (3n+2)} \right| < 10^{-6} \Rightarrow \frac{7}{3 \cdot (3n+2)} < 10^{-6} \quad \text{despejamos n:}$$

$$\frac{7}{3 \cdot (3n+2)} < 10^{-6} \Rightarrow \frac{7}{10^{-6} \cdot 3} < (3n+2) \Rightarrow \frac{7}{10^{-6} \cdot 3} - 2 < 3n$$

$$\Rightarrow n > \frac{\frac{7}{10^{-6} \cdot 3} - 2}{3} \Rightarrow n > \frac{7 - 6 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^{-6}} \approx 777777.6666667$$

Esto es, a partir del término a_{777778} se tiene:

$$a_n \in E\left(\frac{2}{3}, 10^{-6}\right) \Leftrightarrow d\left(a_n, \frac{2}{3}\right) < 10^{-6} \Leftrightarrow \left| a_n - \frac{2}{3} \right| < 10^{-6} \quad \forall n \geq 777778$$

Sea la sucesión $a_n = \frac{n^2+1}{n^2-2}$ $n \in \mathbb{N}$:

1. Estudiar la monotonía:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2-2} - \frac{n^2+1}{n^2-2} = \frac{n^2+2n+1+1}{n^2+2n+1-2} - \frac{n^2+1}{n^2-2} = \\ &= \frac{n^2+2n+2}{n^2+2n-1} - \frac{n^2+1}{n^2-2} = \frac{(n^2+2n+2) \cdot (n^2-2) - (n^2+2n-1) \cdot (n^2+1)}{(n^2+2n-1) \cdot (n^2-2)} = \\ &= \frac{n^4-2n^2+2n^3-4n+2n^2-4-n^4-n^2-2n^3-2n+n^2+1}{(n^2+2n-1) \cdot (n^2-2)} = \frac{-6n-3}{(n^2+2n-1) \cdot (n^2-2)} < 0 \quad \forall n \geq 2 \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

luego la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona decreciente. $\forall n \geq 2$

2. Calcular el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2-2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)_{IND} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{2}{n^2}} = 1$$

Por lo tanto: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2-2} = 1$

3. ¿A partir de qué término de la sucesión en adelante la distancia entre un término de la sucesión y 1 es menor que 10^{-4} ?

Planteamos la condición: hemos de obtener el **valor de "n"** (de la posición n del término de la sucesión) a partir del cual se cumple:

$$d(a_n, 1) < 10^{-4} \quad \left| \frac{n^2+1}{n^2-2} - 1 \right| < 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{n^2+1-n^2+2}{n^2-2} \right| < 10^{-4} \quad \Rightarrow$$

$$\left| \frac{3}{n^2-2} \right| < 10^{-4}$$

Como $n \in \mathbb{N}$ será el valor absoluto $\left| \frac{3}{n^2-2} \right| = \frac{3}{n^2-2} \quad \forall n \geq 2 \quad n \in \mathbb{N}$ por lo que:

$$\left| \frac{3}{n^2-2} \right| < 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{n^2-2} < 10^{-4} \quad \text{despejamos n: para } \forall n \geq 2 \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{3}{n^2-2} < 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad 3 < 10^{-4} \cdot (n^2-2) \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{10^{-4}} + 2 < n^2$$

$$\Rightarrow n > \sqrt{\frac{3}{10^{-4}} + 2} \quad \Rightarrow \quad n \approx 106.27$$

Esto es, a partir del término a_{104} se tiene:

$$a_n \in E(1, 10^{-4}) \Leftrightarrow d(a_n, 1) < 10^{-4} \Leftrightarrow |a_n - 1| < 10^{-4} \quad \forall n \geq 107$$

Sea la sucesión $a_n = n^2 - 14n + 49 \quad n \in \mathbb{N}$:

1. Estudiar la monotonía:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (n+1)^2 - 14(n+1) + 49 - (n^2 - 14n + 49) = \\ &= n^2 + 2n + 1 - 14n - 14 + 49 - n^2 + 14n - 49 = 2n - 13 \end{aligned}$$

Veamos cuando es $2n - 13 > 0 \Rightarrow 2n > 13 \Rightarrow n > \frac{13}{2} = 6.5$

luego $a_{n+1} - a_n > 0$ para $\forall n \geq 7 \quad n \in \mathbb{N}$

luego la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona creciente (a partir del término séptimo).

2. Calcular el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - 14n + 49 = (+\infty - \infty)_{IND} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \left(1 - \frac{14}{n} + \frac{49}{n^2}\right) = +\infty$$

Por lo tanto: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - 14n + 49 = +\infty$

3. ¿A partir de qué término de la sucesión en adelante es $a_n > 10^6$?

Planteamos la condición: hemos de obtener el **valor de "n"** (de la posición n del término) a partir del cual se cumple: $n^2 - 14n + 49 > 10^6 \Rightarrow$

despejamos n, para ello, completamos cuadrados en el primer miembro:

$$n^2 - 14n + 49 > 10^6 \Rightarrow (n-7)^2 > 10^6 \Rightarrow \sqrt{(n-7)^2} > \sqrt{10^6}$$

$|n-7| > 10^3$ a partir de $n=7$ es ya $n-7 \geq 0$ por lo que el valor absoluto queda: $n-7 > 10^3$ con $n > 7 \Rightarrow n > 10^3 + 7 \Rightarrow n > 1007$

Esto es, a partir del término a_{1007} es $|a_n| > 10^6 \quad \forall n \geq 1007$

Sea la sucesión $a_n = \frac{-n+13}{4n-36}$ $n \in \mathbb{N}$ $n > 9$:

1. Estudiar la monotonía:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{-(n+1)+13}{4(n+1)-36} - \frac{-n+13}{4n-36} = \frac{-n+12}{4n+4-36} - \frac{-n+13}{4n-36} \\ &= \frac{-n+12}{4n-32} - \frac{-n+13}{4n-36} \\ &= \frac{(-n+12) \cdot (4n-36) - (-n+13) \cdot (4n-32)}{(4n-32) \cdot (4n-36)} = \frac{-4n^2+36n+48n-432+4n^2-32n-52n+416}{(4n-32) \cdot (4n-36)} \\ &= \frac{-16}{(4n-32) \cdot (4n-36)} = \frac{-16}{16(n-8) \cdot (n-9)} = \frac{-1}{(n-8) \cdot (n-9)} \end{aligned}$$

$\frac{-1}{(n-8) \cdot (n-9)} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > 9$ luego la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona decreciente.

2. Calcular el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n+13}{4n-36} = \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right)_{IND} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \left(-1 + \frac{13}{n} \right)}{n \cdot \left(4 - \frac{36}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{13}{n}}{4 - \frac{36}{n}} = \frac{-1}{4}$$

Por lo tanto: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n+13}{4n-36} = \frac{-1}{4}$

3. ¿A partir de qué término de la sucesión en adelante $a_n \in E\left(\frac{-1}{4}, 10^{-3}\right)$?

Planteamos la condición: hemos de obtener el **valor de "n"** (de la posición del término) a partir del cual se cumple:

$$\begin{aligned} a_n \in E\left(\frac{-1}{4}, 10^{-3}\right) &\Rightarrow d\left(a_n, \frac{-1}{4}\right) < 10^{-3} \Rightarrow \left| \frac{-n+13}{4n-36} - \left(\frac{-1}{4}\right) \right| < 10^{-3} \\ &\Rightarrow \left| \frac{-n+13}{4n-36} + \frac{1}{4} \right| < 10^{-3} \Rightarrow \left| \frac{-4n+52+4n-36}{4n-36} \right| < 10^{-3} \Rightarrow \left| \frac{6}{4n-36} \right| < 10^{-3} \end{aligned}$$

Como $n \in \mathbb{N}$ será el valor absoluto $\left| \frac{6}{4n-36} \right| = \frac{6}{4n-36}$ $n > 9$ por lo que:

$$\left| \frac{6}{4n-36} \right| < 10^{-3} \Rightarrow \frac{6}{4n-36} < 10^{-3} \quad \text{despejamos n:}$$

$$\frac{6}{4n-36} < 10^{-3} \Rightarrow 6 < 10^{-3} \cdot (4n-36) \Rightarrow \frac{6}{10^{-3}} < (4n-36)$$

$$\frac{6}{10^{-3}} + 36 < 4n \Rightarrow n > \frac{\frac{6}{10^{-3}} + 36}{4} \Rightarrow n > \frac{6+36 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}} = 1509$$

Esto es, a partir del término a_{1510} se tiene:

$$a_n \in E\left(\frac{-1}{4}, 10^{-3}\right) \Leftrightarrow d\left(a_n, \frac{-1}{4}\right) < 10^{-3} \Leftrightarrow \left| a_n + \frac{1}{4} \right| < 10^{-3} \quad \forall n \geq 1510$$

Sea la sucesión $a_n = \frac{25-2n^2}{1-5n^2}$ $n \in \mathbb{N}$:

1. Estudiar la monotonía:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{25 - 2(n+1)^2}{1 - 5(n+1)^2} - \frac{25 - 2n^2}{1 - 5n^2} = \frac{25 - 2(n^2 + 2n + 1)}{1 - 5(n^2 + 2n + 1)} - \frac{25 - 2n^2}{1 - 5n^2} = \\ &= \frac{25 - 2n^2 - 4n - 2}{1 - 5n^2 - 10n - 5} - \frac{25 - 2n^2}{1 - 5n^2} = \frac{23 - 2n^2 - 4n}{-5n^2 - 10n - 4} - \frac{25 - 2n^2}{1 - 5n^2} = \frac{(23 - 2n^2 - 4n)(1 - 5n^2) - (25 - 2n^2)(-5n^2 - 10n - 4)}{(-5n^2 - 10n - 4)(1 - 5n^2)} = \\ &= \frac{23 - 115n^2 - 2n^2 + 10n^4 - 4n + 20n^3 + 125n^2 + 250n + 100 - 10n^4 - 20n^3 - 8n^2}{(-5n^2 - 10n - 4)(1 - 5n^2)} = \frac{123}{(-5n^2 - 10n - 4)(1 - 5n^2)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

luego la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona creciente $\forall n \in \mathbb{N}$

2. Calcular el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25 - 2n^2}{1 - 5n^2} = \left(\frac{-\infty}{-\infty} \right)_{IND} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot \left(\frac{25}{n^2} - 2 \right)}{n^2 \cdot \left(\frac{1}{n^2} - 5 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{25}{n^2} - 2}{\frac{1}{n^2} - 5} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Por lo tanto: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25 - 2n^2}{1 - 5n^2} = \frac{2}{5}$$

3. ¿A partir de qué término de la sucesión en adelante $a_n \in E\left(\frac{2}{5}, 10^{-5}\right)$?

Planteamos la condición: hemos de obtener el **valor de "n"** (de la posición n del término de la sucesión) a partir del cual se cumple:

$$a_n \in E\left(\frac{2}{5}, 10^{-5}\right) \Rightarrow d\left(a_n, \frac{2}{5}\right) < 10^{-5} \quad \left| \frac{25-2n^2}{1-5n^2} - \frac{2}{5} \right| < 10^{-5} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{5(25 - 2n^2) - 2(1 - 5n^2)}{(1 - 5n^2)5} \right| < 10^{-5} &\Rightarrow \left| \frac{125 - 10n^2 - 2 + 10n^2}{(1 - 5n^2)5} \right| < 10^{-5} \\ &\Rightarrow \left| \frac{123}{(1 - 5n^2)5} \right| < 10^{-5} \end{aligned}$$

Como $n \in \mathbb{N}$ será el valor absoluto $\left| \frac{123}{(1-5n^2)5} \right| = -\frac{123}{(1-5n^2)5} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ por lo que:

$$\left| \frac{123}{(1-5n^2)5} \right| < 10^{-5} \Rightarrow -\frac{123}{(1-5n^2)5} < 10^{-5} \quad \text{despejamos n:}$$

$$-\frac{123}{(1-5n^2)5} < 10^{-5} \Rightarrow \frac{123}{(5n^2-1)5} < 10^{-5} \Rightarrow \frac{123}{5 \cdot 10^{-5}} < (5n^2-1)$$

$$\Rightarrow \frac{123}{5 \cdot 10^{-5}} + 1 < 5n^2 \Rightarrow n > \sqrt{\frac{\frac{123}{5 \cdot 10^{-5}} + 1}{5}} \Rightarrow n > \sqrt{\frac{123 + 5 \cdot 10^{-5}}{25 \cdot 10^{-5}}} \approx \mathbf{246000,1}$$

Esto es, a partir del término a_{246001} se tiene:

$$a_n \in E\left(\frac{2}{5}, 10^{-5}\right) \Leftrightarrow d\left(a_n, \frac{2}{5}\right) < 10^{-5} \Leftrightarrow \left| a_n - \frac{2}{5} \right| < 10^{-5} \quad \forall n \geq 246001$$

Sea la sucesión $a_n = -3n^2 + 5n - 1 \quad n \in \mathbb{N}$:

1. Estudiar la monotonía:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= -3(n+1)^2 + 5(n+1) - 1 - (-3n^2 + 5n - 1) = \\ &= -3n^2 - 6n - 3 + 5n + 5 - 1 + 3n^2 - 5n + 1 = -11n + 2 \end{aligned}$$

Y es $-11n + 2 < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ luego $a_{n+1} - a_n < 0$ para $\forall n \in \mathbb{N}$ la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona decreciente

2. Calcular el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -3n^2 + 5n - 1 = (-\infty + \infty)_{IND} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \left(-3 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = -\infty$$

Por lo tanto: $\lim_{n \rightarrow \infty} -3n^2 + 5n - 1 = -\infty$

3. ¿A partir de qué término de la sucesión en adelante es $a_n < -10^8$?

Planteamos la condición: hemos de obtener el **valor de "n"** (de la posición n del término) a partir del cual se cumple: $-3n^2 + 5n - 1 < -10^8 \Rightarrow$

despejamos n, para ello, multiplicamos -1 y completamos cuadrados en el primer miembro:

$$\begin{aligned} 3n^2 - 5n + 1 &> 10^8 \Rightarrow 3\left(n^2 - \frac{5n}{3} + \frac{1}{3}\right) > 10^8 \Rightarrow \\ 3\left(n^2 - \frac{5n}{3} + \frac{25}{36} - \frac{25}{36} + \frac{1}{3}\right) &> 10^8 \Rightarrow 3\left(\left(n - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{13}{36}\right) > 10^8 \\ 3\left(n - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{13}{12} &> 10^8 \Rightarrow 3\left(n - \frac{5}{6}\right)^2 > 10^8 + \frac{13}{12} \Rightarrow \left(n - \frac{5}{6}\right)^2 > \frac{10^8 + \frac{13}{12}}{3} \\ \Rightarrow \sqrt{\left(n - \frac{5}{6}\right)^2} &> \sqrt{\frac{10^8 + \frac{13}{12}}{3}} \Rightarrow \left(n - \frac{5}{6}\right) > \sqrt{\frac{10^8 + \frac{13}{12}}{3}} \Rightarrow \\ n &> \sqrt{\frac{10^8 + \frac{13}{12}}{3}} + \frac{5}{6} \approx 16666667,68 \end{aligned}$$

Esto es, a partir del término $a_{16666668}$ es $a_n < -10^8 \quad \forall n \geq 16666668$