CONICAS Y LUGARES GEOMÉTRICOS (problemas resueltos)

Ejercicio nº 1.-

Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en el punto (2, –3) y que es tangente a la recta $3x - 4y + 5 = 0$.

Solución:

El radio, R, de la circunferencia es igual a la distancia del centro a la recta dada:

$$R = dist\left(C,\ r\right) = \frac{\left|6+12+5\right|}{\sqrt{25}} = \frac{23}{5}$$

La ecuación será:

$$\left(x-2\right)^2 + \left(y+3\right)^2 = \frac{529}{25} \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x + 6y - \frac{204}{25} = 0$$

$$25x^2 + 25\,y^2 - 100x + 150y - 204 = 0$$

Ejercicio nº 2.-

a) Halla el centro y el radio de la circunferencia de ecuación:

$$\mathbf{2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 8 = 0}$$

b) Escribe la ecuación de la circunferencia de radio 5, que es concéntrica a la del apartado anterior.

Solución:

a) $2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$

$$Centro = \left(\frac{4}{2}, \frac{6}{2}\right) = \left(2,\ 3\right)$$

$$Radio = \sqrt{4+9-4} = \sqrt{9} = 3$$

b) La circunferencia tiene radio 5 y centro (2, 3). Su ecuación será:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

Ejercicio nº 3.-

Halla la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $4x + 3y - 25 = 0$ y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $3x - y - 7 = 0$ y $2x + 3y - 1 = 0$.

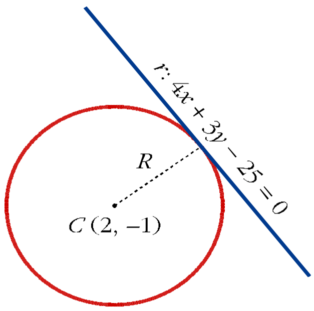
Solución:

Hallamos su centro:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y - 7 = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 3x - 7 \\ 2x + 3(3x - 7) - 1 = 0 \end{array}$$

$$2x + 9x - 21 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad 11x = 22 \quad \rightarrow \quad x = 2 \quad \rightarrow \quad y = -1$$

El centro es $C(2, -1)$.



El radio, R, es igual a la distancia del centro a la recta tangente:

$$R = dist(C, r) = \frac{|8 - 3 - 25|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

La ecuación será:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$$

Ejercicio nº 4.-

Estudia la posición relativa de la recta r: $2x + y = 1$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$.

Solución:

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

  $$\text{Centro} = C = \left(\frac{4}{2}, \frac{2}{2}\right) = (2, 1)$$

  $$\text{Radio} = R = \sqrt{4 + 1 - (-4)} = \sqrt{9} = 3$$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada:

$$dist\left(C,r\right)=\frac{\left|2\cdot 2+1-1\right|}{\sqrt{4+1}}=\frac{4}{\sqrt{5}}\approx 1{,}79<3=\text{radio}$$

Por tanto, la circunferencia y la recta son secantes. Se cortan en dos puntos.

Ejercicio nº 5.-

Halla la posción relativa de la recta $3x+4y-25=0$ con respecto a la circunferencia $x^2+y^2-25=0$. Si se cortan en algún punto, halla sus coordenadas.

Solución:

Como tenemos que hallar los posibles puntos de corte, resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-25=0 \\ 3x+4y-25=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=\dfrac{25-3x}{4} \\ x^2+\left(\dfrac{25-3x}{4}\right)^2-25=0 \end{array}$$

$$x^2+\frac{625-150x+9x^2}{16}-25=0 \;\rightarrow\; 16x^2+625-150x+9x^2-400=0 \;\rightarrow$$

Se cortan en el punto (3, 4). Por tanto, son tangentes.

Ejercicio nº 6.-

Obtén el valor de k para que la recta s: $x+y+k=0$ sea tangente a la circunferencia $x^2+y^2+6x+2y+6=0$.

Solución:

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$x^2+y^2+6x+2y+6=0$$

$$Centro=C=\left(\frac{-6}{2},\frac{-2}{2}\right)=\left(-3,-1\right)$$

$$Radio=r=\sqrt{9+1-6}=\sqrt{4}=2$$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada:

$$dist\left(C,s\right)=\frac{\left|-3-1+k\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|k-4\right|}{\sqrt{2}}$$

• Para que la recta sea tangente a la circunferencia, esta distancia ha de ser igual al radio:

$$\frac{|k-4|}{\sqrt{2}}=2 \rightarrow |k-4|=2\sqrt{2} \begin{cases} k-4=2\sqrt{2} \rightarrow k=4+2\sqrt{2} \\ k-4=-2\sqrt{2} \rightarrow k=4-2\sqrt{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $k_1=4+2\sqrt{2}$; $k_2=4-2\sqrt{2}$

Ejercicio nº 7.-

Halla la posición relativa de la recta r: $x+y=2$ con respecto a la circunferencia $x^2+y^2+2x+4y+1=0$

Solución:

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

$$\text{Centro}=C=\left(\frac{-2}{2}, \frac{-4}{2}\right)=(-1, -2)$$

$$\text{Radio}=R=\sqrt{1+4-1}=\sqrt{4}=2$$

- Hallamos la distancia del centro a la recta dada:

$$dist\ (C,r)=\frac{|-1-2-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{5}{\sqrt{2}}\approx 3{,}53>2=\text{radio}$$

Por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

Ejercicio nº 8.-

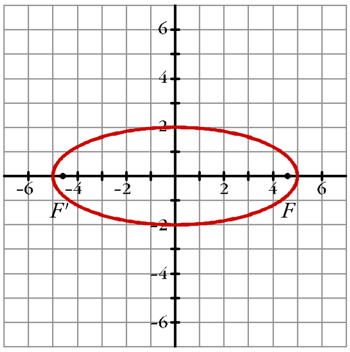
Describe las siguientes cónicas, obtén sus elementos y represéntalas:

a) $4x^2+25y^2=100$ **b)** $4y^2-x^2=4$

Solución:

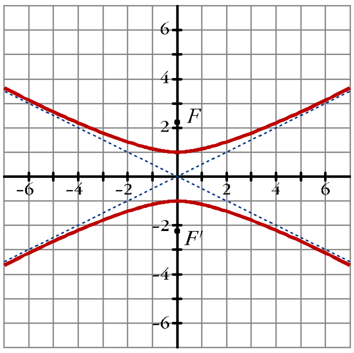
a) $4x^2+25y^2=100 \rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$

$$\text{Es una elipse}: \begin{cases} \text{Semieje mayor}: 5 \\ \text{Semieje menor}: 2 \\ \text{Focos}: F(\sqrt{21}, 0) \text{ y } F'(-\sqrt{21}, 0) \\ \text{Excentricidad}=\frac{\sqrt{21}}{5}\approx 0{,}92 \end{cases}$$



b) $4y^2 - x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad y^2 - \dfrac{x^2}{4} = 1$

$$\text{Es una hipérbola : } \begin{cases} \text{Semieje: } 1 \\ \text{Focos : } F\left(0, \sqrt{5}\right) \text{ y } F'\left(0, -\sqrt{5}\right) \\ \text{Excentricidad} = \dfrac{\sqrt{5}}{1} \approx 2{,}24 \\ \text{Asíntotas: } y = \dfrac{1}{2}x \; ; \quad y = \dfrac{-1}{2}x \end{cases}$$



Ejercicio nº 9.-

Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos, P, del plano tales que su distancia al punto $A(1, 0)$, es el triple de su distancia a la recta $x = 2$. Identifica la figura que obtienes.

Solución:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist\,(P,\ A) = 3\,dist\,(P,\ x = 2)$, es decir :

$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 3\left| x - 2 \right|$. Elevamos al cuadrado y operamos :

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9\left(x^2 - 4x + 4\right)$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9x^2 - 36x + 36$$

$8x^2 - y^2 - 34x + 35 = 0$. Es una hipérbola.

Ejercicio nº 10.-

Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos $A(-4, 0)$ y $B(4, 0)$ es 40. Identifica la figura resultante.

Solución:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, ha de tenerse que:

$\left[dist\ (P, A)\right]^2 + \left[dist\ (P, B)\right]^2 = 40$; es decir :

$$(x+4)^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 = 40$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 + x^2 - 8x + 16 + y^2 = 40$$

$$2x^2 + 2y^2 = 8$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

Obtenemos una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 2.

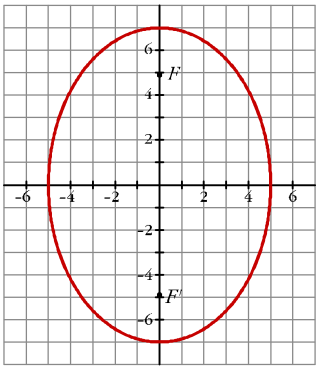
Ejercicio nº11.-

Identifica la siguiente cónica, dibújala y halla sus focos y su excentricidad:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$$

Solución:

$$\text{Es una elipse: } \begin{cases} \text{Semieje mayor: } 7 \\ \text{Semieje menor: } 5 \\ \text{Focos: } F\left(0, \sqrt{24}\right) \text{ y } F'\left(0, -\sqrt{24}\right) \\ \text{Excentricidad} = \dfrac{\sqrt{24}}{7} \approx 0,7 \end{cases}$$



Ejercicio nº 12.-

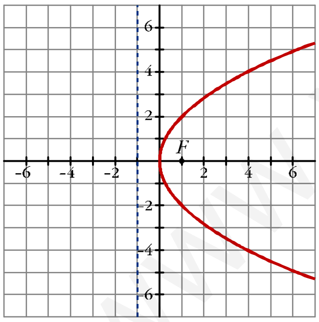
Identifica esta cónica, halla sus elementos y dibújala:

$$y^2 - 4x = 0$$

Solución:

$$y^2 - 4x = 0 \quad \rightarrow \quad y^2 = 4x$$

$$\text{Es una parábola}: \begin{cases} \text{Vértice:} \quad (0,\ 0) \\ \text{Foco:} \quad (1,\ 0) \\ \text{Directriz:} \quad x = -1 \end{cases}$$



Ejercicio nº 13.-

Halla los elementos característicos de las siguientes cónicas, descríbelas y represéntalas gráficamente:

a) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = 1$ **b)** $25x^2 + 100y^2 = 2500$

Solución:

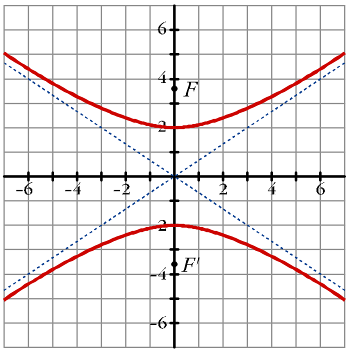
a) Es una hipérbola.

Semieje: 2

Focos: $F\left(0, \sqrt{13}\right)$ y $F'\left(0, -\sqrt{13}\right)$

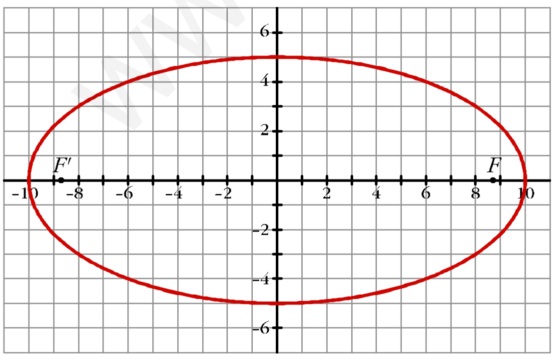
Excentricidad: $\dfrac{\sqrt{13}}{2} \approx 1{,}8$

Asíntotas: $y = \dfrac{2}{3}x$; $y = \dfrac{-2}{3}x$



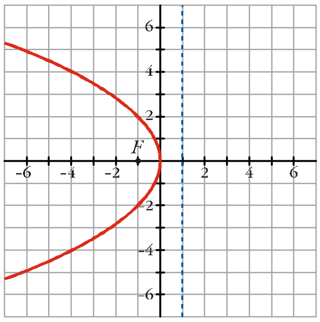
b) $25x^2 + 100y^2 = 2500 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

$$\text{Es una elipse: } \begin{cases} \text{Semieje mayor: } 10; \quad \text{semieje menor: } 5 \\ \text{Focos: } F\left(5\sqrt{3}, 0\right) \text{ y } F'\left(-5\sqrt{3}, 0\right) \\ \text{Excentricidad: } \dfrac{5\sqrt{3}}{10} \approx 0{,}87 \end{cases}$$



Ejercicio nº 14.-

Halla el foco, la directriz y la ecuación de la siguiente parábola:



Solución:

Directriz: $x = 1$. Foco $(-1, 0)$.

Ecuación: $y^2 = -4x$

Ejercicio nº 15.-

Dada la siguiente cónica, identifícala, obtén sus elementos característicos y represéntala gráficamente:

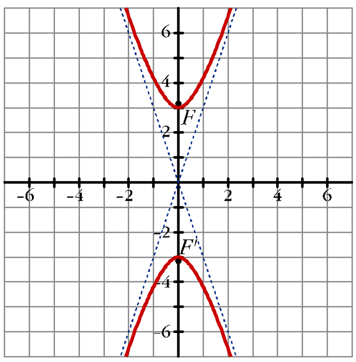
$$y^2 - 9x^2 = 9$$

Solución:

$$y^2 - 9x^2 = 9 \quad \rightarrow \quad \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{1} = 1$$

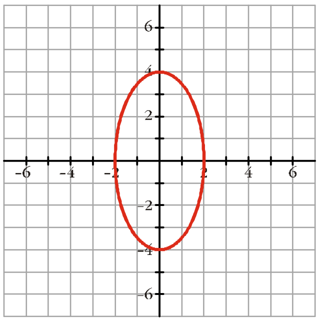
Es una hipérbola:

$$\begin{cases} \text{Semieje: } 3 \\ \text{Focos: } F\left(0, \sqrt{10}\right) \text{ y } F'\left(0, -\sqrt{10}\right) \\ \text{Excentricidad} = \dfrac{\sqrt{10}}{3} \approx 1{,}05 \\ \text{Asíntotas: } y = 3x \;;\quad y = -3x \end{cases}$$



Ejercicio nº 16.-

Halla los semiejes, los focos y la excentricidad de la siguiente elipse. Escribe su ecuación:



Solución:

Semieje mayor: 4; semieje menor: 2

$$\text{Focos: } F\left(0,\ \sqrt{12}\right) \text{ y } F'\left(0,\ -\sqrt{12}\right)$$

$$\text{Excentricidad: } \frac{\sqrt{12}}{4} \approx 0{,}87$$

$$\text{Ecuación: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Ejercicio nº 17.-

Halla la ecuación de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas
r_1: $x + 3y - 1 = 0$ y r_2: $3x - y + 4 = 0$.

Solución:

Los puntos $P(x, y)$ de las bisectrices cumplen que:

$dist\ (P, r_1) = dist\ (P, r_2)$, es decir:

$$\frac{|x + 3y - 1|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x - y + 4|}{\sqrt{10}}$$

$$|x + 3y - 1| = |3x - y + 4| \quad \begin{cases} x + 3y - 1 = 3x - y + 4 \ \rightarrow\ 2x - 4y + 5 = 0 \\ x + 3y - 1 = -3x + y - 4 \ \rightarrow\ 4x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas perpendiculares entre sí, que se cortan en el mismo punto que r_1 y r_2.

Ejercicio nº 18.-

Halla el lugar geométrico de los puntos, P, del plano tales que su distancia a $Q(2, 4)$ sea igual a 3. ¿De qué figura se trata?

Solución:

Es una circunferencia de centro $(2, 4)$ y radio 3. Hallamos su ecuación:
Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist\,(P, Q) = 3$, es decir:

$\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = 3.$ Elevamos al cuadrado y operamos :

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$$

Ejercicio nº 19.-

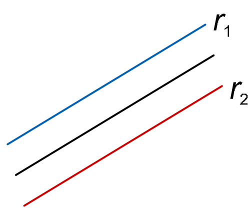
Identifica y halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos, P, del plano tales que su distancia a la recta r_1: $x + y + 1 = 0$ sea igual que su distancia a la recta r_2: $2x + 2y + 4 = 0$.

Solución:

Las dos rectas dadas,

$r_1: x + y + 1 = 0$ y $r_2: x + y + 2 = 0$,

son rectas paralelas. Por tanto, el lugar geométrico pedido será otra recta, paralela a las dos, a igual distancia de ellas:



Hallamos su ecuación:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist\,(P, r_1) = dist\,(P, r_2)$, es decir:

$$\frac{|x+y+1|}{\sqrt{2}} = \frac{|x+y+2|}{\sqrt{2}}$$

$$|x+y+1| = |x+y+2| \quad \begin{cases} x+y+1 = x+y+2 \rightarrow 1=2 \rightarrow \text{Imposible} \\ x+y+1 = -x-y-2 \rightarrow 2x+2y+3=0 \end{cases}$$

Observamos que la recta obtenida es paralela a r_1 y r_2.

<u>Ejercicio nº 20.-</u>

Halla el lugar geométrico de los puntos, *P*, del plano cuya distancia a *A*(2, 0) sea el doble de la distancia a *B*(−1, 0). Identifica la figura resultante.

Solución:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist(P, A) = 2 \cdot dist(P, B)$, es decir:

$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$. Elevamos al cuadrado y operamos:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4\left(x^2 + 2x + 1 + y^2\right)$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4x^2 + 8x + 4 + 4y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 + 12x = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x = 0$$

$(x+2)^2 + y^2 = 4$. Es una circunferencia de centro $(-2, 0)$ y radio 2.