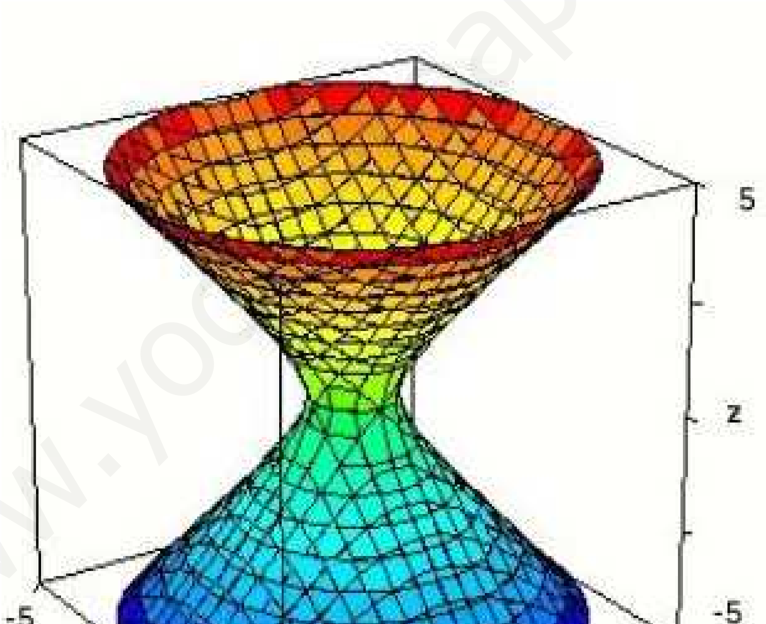
CUADERNO DE ACTIVIDADES

MATEMÁTICAS I
1º Bachillerato CC.NN.



NÚMEROS REALES, POLINOMIOS, ECUACIONES e INECUACIONES

Números reales. Intervalos:

1. Separar los siguientes números en racionales o irracionales, indicando, de la forma más sencilla posible, el porqué:

$$\frac{1}{8} \qquad \frac{\pi}{3} \qquad \sqrt{5} \qquad 2{,}6 \qquad 0 \qquad -3 \qquad -\frac{25}{3} \qquad \sqrt{13} \qquad 0{,}1 \qquad 6{,}\widehat{4} \qquad 534 \qquad 1{,}41421356\,2\ldots$$

(Soluc: $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$)

2. **a)** Representar sobre la misma recta real los siguientes racionales:

$$\frac{3}{2} \qquad -3 \qquad 0{,}\widehat{6} \qquad \frac{5}{6} \qquad -\frac{3}{4} \qquad \frac{11}{5} \qquad 2{,}25 \qquad \frac{19}{6} \qquad 3{,}\widehat{9}$$

b) Construir $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$ y $\sqrt{10}$ sobre la recta real (no necesariamente sobre la misma), mediante regla y compás, y la aplicación del teorema de Pitágoras.

3. Completar:

	REPRES. GRÁFICA	INTERVALO	DEF. MATEMÁTICA
1		[-1,3]	
2			
3			
4		[-2,1)	
5			{x∈IR/ 1<x≤5}
6			
7			{x∈IR/ x<2}
8		(0,∞)	
9			
10		(-1,5)	
11			{x∈R/ x≤0}
12		[2/3,∞)	

	REPRES. GRÁFICA	INTERVALO	DEF. MATEMÁTICA
13			{x∈IR/ -2<x≤2}
14			{x∈IR/ |x|<3}
15			{x∈IR/ |x|≥3}
16			
17		[-1,1]	
18			{x∈IR/ x<-1}
19			
20		(-∞,-2)U(2,∞)	
21		(-∞,2)U(2,∞)	
22			{x∈IR/ |x|≤5}
23		[-2,2]	
24			

Repaso fracciones, potencias y raíces:

4. Operar, simplificando en todo momento:

$$\frac{\frac{5}{4}-\frac{3}{5}:\left[2+\frac{3}{5}\left(\frac{6}{9}:\frac{3}{4}\right)\right]}{\frac{5}{4}:\frac{3}{5}\left(2+\frac{3}{5}:\frac{6}{9}\right)-\frac{3}{4}}=$$

5. Completar:

$a^m \cdot a^n =$

$\frac{a^m}{a^n} =$

$(a^m)^n =$

$(a \cdot b)^n =$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n =$

$a^0 =$

$a^{-n} =$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} =$

$1^n =$

$(-1)^{par} =$

$(-1)^{impar} =$

$(\text{base negativa})^{\text{par}} =$

$(\text{base negativa})^{\text{impar}} =$

Añadir estas fórmulas al formulario matemático de este curso. Utilizando las propiedades anteriores, simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{\left(2^0\cdot 2^{-1}\cdot 2^3\right)^3}{\left[\dfrac{(1/3)^{-2}}{3}+1\right]^3}=$$

(Sol: 1)

6. Completar:

Definición de raíz n-ésima	$\sqrt[n]{a}=x \Leftrightarrow$
Casos particulares de simplificación	$\sqrt[n]{x^n}=$
	$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=$
Equivalencia con una potencia de exponente fraccionario	$\sqrt[n]{x^m}=$
Simplificación de radicales/Índice común	$\sqrt[n\cdot p]{x^{m\cdot p}}=$
Producto de raíces del mismo índice	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=$
Cociente de raíces del mismo índice	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=$
Potencia de una raíz	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=$
Raíz de una raíz	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=$
Introducir/Extraer factores	$x\cdot\sqrt[n]{a}=$

Añadir estas fórmulas al formulario matemático de este curso. Utilizando las propiedades anteriores, simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\left(\sqrt{a^3}\right)^3}{\sqrt[3]{a\cdot\sqrt{a^3}}}=$$

(Sol: $\sqrt[3]{a^{13}}$)

Repaso polinomios y fracciones algebraicas:

7. Dados $P(x)=4x^5-8x^4+2x^3+2x^2+1$ y $Q(x)=4x^3-4x^2+2x$, se pide:

a) Extraer el máximo factor común de Q(x)

b) $P(x)-2x\cdot Q(x)$

c) $Q(x)\cdot Q(x)$

d) $P(x) : Q(x)$

8. Simplificar: $\dfrac{x^4-5x^2-36}{x^2-9}$ *(Sol: x^2+4)*

9. Operar y simplificar: $\dfrac{x+1}{x-2}+\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{12}{x^2-4}$ $\left(Sol: \dfrac{2x+3}{x+2}\right)$

Repaso ecuaciones, sistemas e inecuaciones:

10. Resolver:

a) $3\left(\frac{11x}{6}-x\right)-4=2x-3\left(1-\frac{x}{6}\right)$

b) $\left.\begin{array}{r}\frac{20x+7}{9}-\frac{4x+y}{2}=2\\ \frac{7x+1}{4}-\frac{2x-2y}{6}=x\end{array}\right\}$ *(Sol: x=1, y=−2)*

c) $\frac{(2x^2+3)(2x^2-3)}{2}-\frac{(2x-3)^2}{3}=4x-\frac{41}{6}$ *(Sol: x=±1)*

d) $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+7}=4$ *(Sol: x=114)*

e) $\frac{x-2}{x-1}-\frac{x^2}{x^2-3x+2}=\frac{x-1}{x-2}$ *(Sol: x=−3)*

f) $\left.\begin{array}{r}x+y=1\\ x^2-2x+3y=-1\end{array}\right\}$ *(Sol: x_1=4, y_1=−3; x_2=1, y_2=0)*

g) $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{5x+6}{6}<\frac{(x+3)(x-3)}{3}+6$ *[Sol: x∈(0,7)]*

h) $\left.\begin{array}{r}\frac{5-3x}{4}-3(x+4)\le\frac{3(x+2)}{2}+2\\ \frac{2(2x+1)-(x-1)}{3}-\frac{2x+1}{5}<2\end{array}\right\}$ *[Sol: x∈[-3,2)]*

i) $\frac{x+3}{x-7}\le\frac{1}{2}$ *[Sol: x∈[-13,7)]*

Miscelánea (I):

11. Indicar cuál es el menor conjunto numérico al que pertenecen los siguientes números ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$); en caso de ser $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$, razonar el porqué:

$$\frac{\pi}{2} \qquad \sqrt{3} \qquad \sqrt{4} \qquad 0{,}0015 \qquad -10 \qquad \frac{5}{6} \qquad 2{,}\widehat{3} \qquad 2{,}02002000\,2...$$

(Soluc: $\mathbb{I}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{N}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$)

12. Representar en la recta real los siguientes intervalos y definirlos empleando desigualdades:

a) [2,4]
b) (1,6)
c) [1,5)
d) (-1, 3)
e) (-2,2)
f) (0,∞)
g) (-∞,3]
h) [-3,3]
i) (5/3,∞)
j) (-∞,-2]

13. Operar, simplificando en todo momento:

a) $\dfrac{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}{2}:\dfrac{1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}}{\dfrac{2}{5}:\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{5}{3}}=$

b) $\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}}{\left[(-2)^{3}\right]^{2}+(-3)^{3}\cdot(-3)^{2}}=$ *(Sol: –4/179)*

c) $\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{2}\,\sqrt{4\sqrt{2}}}}{\left(\sqrt[8]{2}\right)^{2}}=$ *(Sol: $\sqrt[24]{2^{25}}$)*

14. Dados $P(x)=4x^3+6x^2-2x+3$, $Q(x)=2x^3-x+7$ y $R(x)=7x^2-2x+1$, hallar:

a) El valor numérico de P(x) para x=–2

b) La factorización de R(x)

c) P(x)+Q(x)+R(x) *(Sol: $6x^3+13x^2-5x+11$)*

d) P(x)–Q(x)–R(x) *(Sol: $2x^3-x^2+x-5$)*

e) P(x)+3Q(x)–2R(x) *(Sol: $10x^3-8x^2-x+22$)*

f) P(x) **:** (x+2) por Ruffini

15. Operar y simplificar:

$$\dfrac{\dfrac{x^3-x}{2x^2+6x}}{\dfrac{5x^2-5x}{2x+6}}=$$ *$\left(Sol:\ \dfrac{x+1}{5x}\right)$*

16. Resolver:

a) $\dfrac{1+96\frac{1}{480}}{96x}=\dfrac{1}{1600}$ *(Sol: x=20)*

b) $\left.\begin{aligned} x-y+z&=6\\ 2x+y-3z&=-9\\ -x+2y+z&=-2\end{aligned}\right\}$ *(Sol: x=1, y=-2; z=3)*

c) $\dfrac{3x^2+1}{6x+1}=\dfrac{6x-1}{3x^2-1}$ *(Sol: x=0; x=±2)*

d) $2\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=4$ *(Sol: x=5; x=13/9)*

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{x}=\sqrt{2}\,x-\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ *(Sol: x=±√2)*

f) $\left.\begin{aligned} 2x-y&=1\\ x^2+3xy&=0\end{aligned}\right\}$

g) $\dfrac{(3x+1)(3x-1)}{6}+4x-5\geq\dfrac{(x+2)(x-2)}{2}+\dfrac{11}{6}$ *[Sol: x∈(–∞,–5]U[1,∞)]*

h) $\left.\begin{aligned} 2x-10&>-x+2\\ 12-4x&>-3x+2\\ 3(x+2)&\geq 2(x+6)\end{aligned}\right\}$ *[Sol: x∈(6,10)]*

i) $\dfrac{1}{x}\leq x$ *[Sol: x∈[–1,0)U[1,∞)]*

17. Señalar cuáles de los siguientes números son racionales o irracionales, indicando el porqué:

a) 3,629629629....
b) 0,130129128...
c) 5,216968888...
d) 0,123456789...
e) 7,129292929...
f) 4,101001000...

(Soluc: $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$*)*

18. Representar en la recta real los siguientes conjuntos numéricos y nombrarlos empleando intervalos:

a) $\{x\in IR/\ -2<x\le 3\}$
b) $\{x\in IR/\ 1\le x\le 4\}$
c) $\{x\in IR/\ x\ge 2\}$
d) $\{x\in IR/\ x<0\}$
e) $\{x\in IR/\ |x|\le 3\}$
f) $\{x\in IR/\ |x|>4\}$
g) $\{x\in IR/\ x>-3\}$
h) $\{x\in IR/\ x\le 5\}$
i) $\{x\in IR/\ |x|<5\}$
j) $\{x\in IR/\ |x|\ge 2\}$
k) $\{x\in IR/\ |x|=2\}$

19. Operar, simplificando en todo momento:

a) $$\frac{\frac{4}{3}:\frac{7}{4}+\left(7+\frac{2}{5}\right):\frac{7}{3}}{\frac{4}{3}+\frac{7}{4}\left(7-\frac{2}{5}\right)\frac{7}{3}}=$$ *(Sol: 236/1697)*

b) $$\frac{\dfrac{\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}\left(\frac{5}{2^3}\right)^{-1}}{\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1}}+(-4)^{-3}}{1+\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}{4^{-3}}}=$$ *(Sol: –1/64)*

c) $$\frac{\left(\sqrt{125}\right)^3}{\sqrt{5\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{25}}}=$$ *(Sol:* $\sqrt[12]{5^{41}}$ *)*

20. Dados $P(x)=6x^4+11x^3-28x^2-15x+18$ y $Q(x)=3x-2$, se pide:

a) Factorizar P(x), por Ruffini
b) $Q^5(x)$, por Tartaglia
c) $P(x)\cdot Q(x)-2x^2Q(x)$
d) $P(x):Q(x)$

21. Operar y simplificar:

$$\frac{1}{x^2-9x+20}-\frac{1}{x^2-11x+30}+\frac{1}{x^2-10x+24}$$ $\left(Sol:\ \dfrac{x-7}{x^3-15x^2+24x-120}\right)$

22. Resolver:

a) $$\left.\begin{array}{r}2x+y-z=0\\ x-2y+3z=13\\ -x+y+4z=9\end{array}\right\}$$ *(Sol: x=2, y=-1; z=3)*

b) $$\frac{5}{x+2}=\frac{3}{2}-\frac{x}{x+3}$$ *(Sol:*$x_1=3$; $x_2=-4$*)*

c) $\left.\begin{aligned} y^2 &= 2ax \\ x^2 &= ay \end{aligned}\right\}$ *(Soluc : $x = a\cdot\sqrt[3]{2}$, $y = a\cdot\sqrt[3]{4}$)*

d) $1 - \dfrac{3x-7}{5} > \dfrac{5x+4}{15} - \dfrac{x-1}{3}$ *(Sol: x<3)*

e) $3x^2+15x+21<0$ *(Sol: $\nexists$ soluc.)*

f) $3x^2+15x+21>0$ *(Sol: $\forall x \in \mathbb{R}$)*

g) $\dfrac{(x+2)(x-2)}{4} - \dfrac{x^2}{2} < \dfrac{(x^2-2x)(x^2+2x)}{4} - 2$ *[Sol: $x \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$]*

h) $(x^2-4)(x^2+4)<0$

23. Separar los siguientes números en racionales e irracionales, indicando el porqué:

$$\frac{1}{2} \qquad \pi \qquad \sqrt{13} \qquad \frac{2{,}6}{2} \qquad \sqrt{169} \qquad 0{,}\hat{7} \qquad \frac{3}{5} \qquad 0{,}494949.. \qquad \sqrt{7} \qquad 3{,}75 \qquad -13 \qquad 6{,}2\hat{4} \qquad 1{,}732050..$$

24. Hallar la U e ∩ de los siguientes intervalos:

a) A=[-2,5)	**c)** E=(-∞,0]	**e)** I=(-∞,0)	**g)** M=[-3,-1)
B=(1,7)	F=(-3,∞)	J=[0,∞)	N=(2,7]
b) C=(0,3]	**d)** G=[-5,-1)	**f)** K=(2,5)	**h)** O=(-3,7)
D=(2,∞)	H=(2,7/2]	L=(5,9]	P=(2,4]

25. Calcular, **aplicando, siempre que sea posible, las propiedades de las potencias,** y simplificando en todo momento. **Cuando no sea ya posible aplicar las propiedades de las potencias, debido a la existencia de una suma o resta, pasar la potencia a número y operar**:

$$\frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}\right]^2 - \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{-3}\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\left[\left(\frac{4}{9}\right)^2\right]^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)^2 \frac{1}{3^4}\ 2^{-1}} =$$ *(Sol: –608/81)*

26. a) Extraer factores y simplificar:

$$5\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{\frac{4}{81}} =$$ *(Sol : $\frac{5}{3}\sqrt[3]{2}$)*

b) Sumar, reduciendo previamente a radicales semejantes:

$$5\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{27} - 4\sqrt{3} - \sqrt{300} =$$ *(Sol : $-\frac{17}{2}\sqrt{3}$)*

c) Racionalizar y simplificar:

$$\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{125}} =$$ *(Sol : $\frac{8\sqrt{5}}{25}$)*

$\sqrt[3]{\frac{1}{1296}}=$ $\left(Sol: \frac{\sqrt[3]{36}}{36}\right)$

$\frac{17-9\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-5}-\frac{9}{\sqrt{3}}=$ *(Sol: 2)*

27. Dados $P(x)=x^6+6x^5+9x^4-x^2-6x-9$ y $Q(x)=x^2-9$, se pide:

a) Factorizar P(x), por Ruffini

b) $Q^4(x)$, por Tartaglia

c) $P(x)-Q(x)\cdot Q(x)$

d) $P(x) : Q(x)$

28. Operar y simplificar:

$\frac{x^2+1}{x^2-1}+\frac{x+2}{x-2}\,\frac{x-1}{x+1}=$ $\left(Sol: \frac{2x^3-2x^2-2x}{x^3-2x^2-x+2}\right)$

29. Resolver:

a) $-x^2-x=0$ *(Sol: $x_1=0$, $x_2=-1$)*

b) $\sqrt{3}=\frac{2x}{1-x^2}$ $\left(Sol: x_1=\sqrt{3}/3, x_2=-\sqrt{3}\right)$

c) $(x^2+1)^4=625$ *(Sol: $x=\pm 2$)*

d) $(x^2-1)^4=0$ *(Sol: $x=\pm 1$)*

e) $\frac{x^4}{10}=8x$ *(Sol: $x_1=0, x_2=2\sqrt[3]{10}$)*

f) $\frac{\sqrt{x}}{x}=0$ *(Sol: $\nexists$ soluc.)*

g) $\sqrt{x^2+4x+4}=1$ *(Sol: $x_1=-1$, $x_2=-3$)*

h) $x^6-16x^2=0$ *(Sol: $x=0$, $x=\pm 2$)*

i) $\sqrt[3]{x+5}=2$ *(Sol: $x=3$)*

j) $x^3=3x$ *(Sol: $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}$; $x_3=-\sqrt{3}$)*

k) $-7x\le -7$ *(Sol: $x\ge 1$)*

l) $x^2<9$ *[Sol: $x\in(-3,3)$]*

30. ¿Verdadero o falso? Razonar la respuesta:

a) Todo número real es racional.

b) Todo número natural es entero.

c) Todo número entero es racional.

d) Siempre que multiplicamos dos números racionales obtenemos otro racional.

e) Siempre que multiplicamos dos números irracionales obtenemos otro irracional.

f) Entre dos números reales existe siempre un racional.

31. Representar los siguientes intervalos e indicar su unión e intersección:

a) $[-2,5)$ y $[3,\infty)$ | **b)** $(0,3)$ y $[9/2,\infty)$ | **c)** $(-5,-1]$ y $[-1,4]$ | **d)** $(-1,3)$ y $[3,\infty)$

Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto:

32. Indicar para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones; en el caso de las desigualdades, indicar la solución mediante intervalos:

a) $|x|=5$

b) $|x|\le 5$

c) $|x|>5$

c) $|x-4|=2$ *(Sol: $x_1=2$, $x_2=6$)*

d) $|x-4|\le 2$ *(Sol: $x\in[2,6]$)*

e) $|x-4|>2$ *(Sol: $x\in(-\infty,2)\cup(6,\infty)$)*

f) $|x+4|>5$ *(Sol: $x\in(-\infty,-9)\cup(1,\infty)$)*

g) $|x|=-2$

h) $|x|=0$

i) $|x|<2$

j) $|x|\ge 2$

k) $|x+1|=3$ *(Sol: $x_1=-4$, $x_2=2$)*

l) $|x-2|\le 3$ *(Sol: $x\in[-1,5]$)*

m) $|x|=7$

n) $|x|\le 6$

o) $|x|>2$

p) $|x-2|<5$ *(Sol: $x\in(-3,7)$)*

q) $|x+3|\ge 7$ *(Sol: $x\in(-\infty,-10]\cup[4,\infty)$)*

r) $|2x|<8$ *(Sol: $x\in(-4,4)$)*

Resolución gráfica de inecuaciones y sistemas:

33. Resolver **gráficamente** los siguientes sistemas de ecuaciones de 1er grado; resolverlos a continuación analíticamente (por el método deseado), y comprobar que se obtiene idéntico resultado:

a) $\left.\begin{array}{l} x+y=12 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=7, y=5)*

b) $\left.\begin{array}{l} x+3y=6 \\ 2x-y=-2 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=0, y=2)*

c) $\left.\begin{array}{l} x+3y=4 \\ 2x-y=1 \end{array}\right\}$ *(Soluc: x=1, y=1)*

d) $\left.\begin{array}{l} x+2y=0 \\ 2x-y=5 \end{array}\right\}$ *(Sol: x=2, y=−1)*

e) $\left.\begin{array}{l} x+2y=5 \\ 2x+y=7 \end{array}\right\}$ *(Sol: x=3, y=1)*

f) $\left.\begin{array}{l} x+3y=1 \\ 2x-y=2 \end{array}\right\}$ *(Sol: x=1, y=0)*

34. Resolver **gráficamente** las siguientes inecuaciones de 2º grado; resolverlas a continuación analíticamente y comprobar que se obtiene idéntico resultado:

a) $x^2-6x+8\ge 0$ *[Sol: $x\in(-\infty,2]\cup[4,\infty)$]*

b) $x^2-2x-3<0$ *[Sol: $x\in(-1,3)$]*

c) $x^2-5x+6>0$ *[Sol: $x\in(-\infty,2)\cup(3,\infty)$]*

d) $x^2-3x-10\le 0$ *[Sol: $x\in[-2,5]$]*

e) $3x^2-10x+7\ge 0$ *[Sol: $x\in(-\infty,1]\cup[7/3,\infty)$]*

f) $2x^2-16x+24<0$ *[Sol: $x\in(2,6)$]*

g) $x^2-4x+21\ge 0$ *[Sol: $\forall x\in\mathbb{R}$]*

h) $x^2-3x>0$ *[Sol: $x\in(-\infty,0)\cup(3,\infty)$]*

i) $x^2-4\ge 0$ *[Sol: $x\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$]*

j) $x^2-4x+4>0$ *[Sol: $x\in\mathbb{R}-\{2\}$]*

k) $x^2+6x+9\ge 0$ *[Sol: $\forall x\in\mathbb{R}$]*

l) $x^2+6x+9>0$ *[Sol: $\forall x\in\mathbb{R}-\{-3\}$]*

m) $x^2-2x+1<0$ *[Sol: ∄ soluc.]*

n) $x^2-4x+4\le 0$ *[Sol: x=2]*

o) $6x^2-5x-6<0$ *[Sol: $x\in(-2/3,3/2)$]*

p) $x^2-4x+7<0$ *[Sol: ∄ soluc.]*

r) $2x^2-8x+6<0$ *[Sol: $x\in(-3,\ -1)$]*

s) $2x^2+10x+12\le 0$ *[Sol: $x\in[-3,\ -2]$]*

t) $-x^2+5x-4\ge 0$ *[Sol: $x\in[1,4]$]*

Notación científica:

35. Pasar a notación científica los siguientes números:

a) 300.000.000=
b) 456=
c) 0,5=
d) 0,0000000065=
e) 18.400.000.000=
f) 0,000001=
g) -78986,34=
h) 0,0000093=
i) 1.230.000.000.000=
j) 14 billones €=
k) 150 millones $=
l) 7,3=
m) 73=
n) 0,00010001=
o) 10=
p) 1=
q) 0,011001=
r) 16.730.000=
s) -345,45

36. Realizar las siguientes operaciones de dos formas distintas (y comprobar que se obtiene el mismo resultado):

- Sin calculadora, aplicando sólo las propiedades de las potencias.
- Utilizando la calculadora científica.

a) $2{,}5\cdot10^7+3{,}6\cdot10^7=$
b) $4{,}6\cdot10^{-8}+5{,}4\cdot10^{-8}=$
c) $1{,}5\cdot10^6+2{,}4\cdot10^5=$
d) $2{,}3\cdot10^9+3{,}25\cdot10^{12}=$
e) $3{,}2\cdot10^8-1{,}1\cdot10^8=$
f) $4{,}25\cdot10^7-2{,}14\cdot10^5=$
g) $7{,}28\cdot10^{-3}-5{,}12\cdot10^{-3}=$
h) $(2\cdot10^9)\cdot(3{,}5\cdot10^7)=$
i) $\dfrac{8{,}4\cdot10^9}{2\cdot10^7}=$
j) $\dfrac{(3{,}2\cdot10^{-3})(4\cdot10^5)}{2\cdot10^{-8}}=$
k) $(2\cdot10^5)^2=$

37. La estrella más cercana a nuestro sistema solar es α-Centauri, que está a una distancia de tan sólo 4,3 años luz. Expresar, en km, esta distancia en **notación científica**. (Dato: velocidad de la luz: 300.000 km/s) ¿Cuánto tardaría en llegar una sonda espacial viajando a 10 km/s? *(Sol: $4{,}068\cdot10^{13}$ km)*

Miscelánea (II):

38. Si el lado de un cuadrado aumenta 2 cm, su área aumenta 28 cm^2 ¿Cuáles son las dimensiones del cuadrado originario? *(Sol: Se trata de un cuadrado de lado 6 cm)*

39. **a)** ¿Qué otro nombre recibe el intervalo $[0,\infty)$? ¿Y $(-\infty,0]$?

b) ¿A qué equivale $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$? ¿Y $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^-$?

40. **a)** Simplificar, reduciendo previamente a radicales semejantes:

$$\sqrt{128}+5\sqrt{12}-2\sqrt{18}-3\sqrt{27}-\sqrt{2}=$$ *(Sol: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$)*

b) Racionalizar y simplificar:

$$\frac{3\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}+2}+\frac{6\sqrt{12}}{7\sqrt{6}}=$$ *(Sol: 11/7)*

$$\frac{3\sqrt[5]{9}}{2\sqrt[3]{243}} =$$ $\left(Sol: \frac{\sqrt[15]{3^{11}}}{6}\right)$

c) Operar y simplificar:

$$\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2\left(5-\sqrt{21}\right)=$$

d) Simplificar y operar:

$$\sqrt{125}-2\sqrt[4]{400}+\sqrt[6]{8000}=$$ $(Sol: 3\sqrt{5})$

41. Un grupo de estudiantes alquila un piso por el que tienen que pagar 420 € al mes. Uno de ellos hace cuentas y observa que si fueran dos estudiantes más, cada uno tendría que pagar 24 € menos. ¿Cuántos estudiantes han alquilado el piso? ¿Cuánto paga cada uno? *(Sol: 5 estudiantes a 84 € cada uno)*

42. Calcular el volumen aproximado (en m^3) de la Tierra, tomando como valor medio de su radio 6378 km, dando el resultado en **notación científica** con dos cifras decimales. $\left(\text{Volumen de la esfera}: \frac{4}{3}\pi r^3\right)$

(Sol: $1{,}15\cdot10^{21}$ m^3)

43. Con dos tipos de barniz, de 3,50 €/kg y de 1,50 €/kg, queremos obtener un barniz de 2,22 €/kg. ¿Cuántos kilogramos tenemos que poner de cada clase para obtener 50 kg de la mezcla? (Ayuda: plantear un sistema de ecuaciones de primer grado) *(Sol: 18 kg del barniz de 3,50 y 32 kg del de 1,50)*

44. Racionalizar denominadores y simplificar:

a) $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ $\left(Sol: \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\right)$

b) $\frac{3}{\sqrt{\sqrt[3]{3}}}$ $\left(Sol: \sqrt[6]{243}\right)$

c) $\frac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}+3}+\frac{12}{\sqrt{3}}$ *(Sol: 7)*

d) $\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ $\left(Sol: \frac{1+\sqrt{6}-2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\right)$

45. Dos árboles de 15 m y 20 m de altura están a una distancia de 35 m. En la copa de cada uno hay una lechuza al acecho. De repente, aparece entre ellos un ratoncillo, y ambas lechuzas se lanzan a su captura a la misma velocidad, llegando simultáneamente al lugar de la presa. ¿A qué distancia de cada árbol apareció el ratón? (Ayuda: Si se lanzan a la misma velocidad, recorren el mismo espacio, pues llegan a la vez; aplicar el teorema de Pitágoras, y plantear un SS.EE. de 2º grado) *(Sol: a 15 m del árbol más alto)*

46. En una balanza de precisión pesamos cien granos de arroz, obteniendo un valor de 0,0000277 kg. ¿Cuántos granos hay en 1000 toneladas de arroz? Utilícese **notación científica**. *(Sol: $3{,}61\cdot10^{12}$ gr)*

47. Un almacenista de fruta compra un determinado número de cajas de fruta por un total de 100 €. Si hubiera comprado 10 cajas más y cada caja le hubiera salido por 1 € menos, entonces habría pagado 120 €. ¿Cuántas cajas compró y cuánto costó cada caja? *(Sol: 20 cajas a 5 €)*

48. La luz del sol tarda 8 minutos y 20 segundos en llegar a la Tierra. Calcular la distancia Tierra-Sol, empleando **notación científica**. *(Sol: $1,5\cdot 10^8$ km)*

49. Hallar dos números positivos sabiendo que su cociente es 2/3 y su producto 216 *(Sol: 12 y 18)*

50. TEORÍA: **a)** ¿Qué es el discriminante de una ecuación de 2º grado? ¿Qué indica? Sin llegar a resolverla, ¿cómo podemos saber de antemano que la ecuación x^2+x+1 carece de soluciones?

b) Inventar una ecuación de 2º grado con raíces $x_1=2/3$ y $x_2=2$, y cuyo coeficiente cuadrático sea 3

c) Sin resolver y sin sustituir, ¿cómo podemos asegurar que las soluciones de $x^2+5x-300=0$ son $x_1=15$ y $x_2=-20$?

d) Calcular el valor del coeficiente **b** en la ecuación $x^2+bx+6=0$ sabiendo que una de las soluciones es 1. Sin necesidad de resolver, ¿cuál es la otra solución?

51. Un rectángulo tiene 300 cm^2 de área y su diagonal mide 25 cm. ¿Cuánto miden sus lados? *(Sol: 20 x 15 cm)*

52. Resolver:

a) $x^6+7x^3-8=0$ *(Sol: x=1, x=-2)*

b) $x^6-64=0$ *(Sol: $x=\pm 2$)*

c) $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x}+y=3 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2} \end{array}\right\}$ *(Sol: $x_1=1$; $y_1=2$; $x_2=2/5$; $y_2=1$)*

d) $\sqrt{x+4}-\sqrt{2x-9}=\sqrt{x-1}$ *(Sol: x=5)*

53. Un frutero ha comprado manzanas por valor de 336 €. Si el kilo de manzanas costara 0,80 € menos, podría comprar 48 kg más. Calcular el precio de las manzanas y la cantidad que compró.
(Sol: 120 kg a 2,80 €/kg)

54. Resolver la ecuación $2x^3-3x^2=-\frac{1}{2}$, sabiendo que una de sus raíces es 1/2 *(Sol: $x=\pm 1/2$, 3/2)*

55. Una persona compra una parcela de terreno por 4800 €. Si el m^2 hubiera costado 2 € menos, por el mismo dinero habría podido comprar una parcela 200 m^2 mayor. ¿Cuál es la superficie de la parcela que ha comprado? ¿Cuánto cuesta el m^2? *(Sol: 600 m^2; 8 €)*

56. Resolver la ecuación $\sqrt[3]{x-2}=x$ *(Sol: x=2)*

57. El área de un **triángulo** rectángulo es 30 m^2 y la hipotenusa mide 13 m. ¿Cuáles son las longitudes de los catetos? *(Sol: 12 m y 5 m)*

58. Resolver la ecuación $\sqrt[3]{x}=2\sqrt{x}-1$ (Ayuda: aplicar Tartaglia y Ruffini) *(Sol: x=1)*

59. Calcular dos números naturales impares consecutivos cuyo producto sea 195 *(Sol: 13 y 15)*

60. Resolver: **a)** $\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2} \\ y-x^2=1 \end{array}\right\}$ *(Sol: x=1, y=2)* **b)** $\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2} \\ y=\sqrt{x^3} \end{array}\right\}$ *(Sol: x=1; y=1)*

61. Si multiplicamos la tercera parte de cierto número por sus tres quintas partes, obtenemos 405. ¿Cuál es ese número? *(Sol: 45)*

62. **a)** Inventar una ecuación polinómica de grado 3 que tenga únicamente por soluciones x=-2, x=1 y x=3

b) Inventar una ecuación polinómica de grado 4 que tenga únicamente como raíces 1 y 2

c) Un polinomio de grado 3, ¿cuántas raíces puede tener como mínimo? Razonar la respuesta. *(Sol: 1 raíz)*

63. Varios amigos alquilan un local por 800 €. Si hubieran sido tres más, habría pagado cada uno 60 € menos. ¿Cuántos amigos son? *(Sol: 5 amigos)*

64. Determinar el polinomio de grado 3 que verifica: P(-1)=P(2)=P(-3)=0 y P(-2)=18

65. Uno de los lados de un rectángulo es doble que el otro y el área mide 50 m^2. Calcular las dimensiones del rectángulo. *(Sol: 5 x 10 m)*

66. Simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{\dfrac{y}{1-y}}{\dfrac{y}{1-y}+1}=$ *(Sol: y)*

b) $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)=$ $\left(Sol:\ \dfrac{1}{x}\right)$

c) $\left(\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a+b}{a-b}\right)\dfrac{a+b}{ab}=$ $\left(Sol:\ -\dfrac{2}{a-b}\right)$

d) $\dfrac{xy}{x^2-y^2}:\dfrac{x-y}{y}+\dfrac{y}{x-y}=$ $\left(Sol:\ \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)$

67. Un campo rectangular de 4 ha de superficie tiene un perímetro de 10 hm. Calcular, en metros, su longitud y su anchura. (Recordar: 1 ha=100 a; 1 a=100 m^2) *(Sol: 100 m x 400 m)*

68. Demostrar que: **a)** $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{a}{b}$ **b)** $\dfrac{(a+b)^2}{4}-\dfrac{(a-b)^2}{4}=a\cdot b$

69. Las diagonales de un rombo están en la relación de 2 a 3. El área es de 108 cm^2. Calcular la longitud de las diagonales y el lado del rombo. *(Sol: d=12 cm; D=18 cm; l≅10,81 cm)*

70. Operar y simplificar:

$x+\dfrac{2}{x-\dfrac{4}{x}}-\dfrac{x-1}{x-2}=$ $\left(Sol:\ \dfrac{x^2+x+2}{x+2}\right)$

71. El diámetro de la base de un cilindro es igual a su altura. El área total es 169,56 m^2. Calcular sus dimensiones. *(Sol: d=h=6 m)*

72. Transformar en potencias de exponente fraccionario la siguiente expresión, operar y simplificar:

$$\sqrt{3\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3}}} =$$

73. Despejar x y simplificar:

$$x^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=1 \qquad \left(Sol: x=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

74. Demostrar que son ciertas las siguientes igualdades:

a) $2\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$ **b)** $2\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$

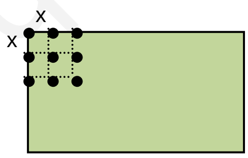
75. Calcular la velocidad y el tiempo que ha invertido un ciclista en recorrer una etapa de 120 km sabiendo que, si hubiera ido 10 km/h más deprisa, habría tardado una hora menos. *(Sol: v=30 km/h; t=4 h)*

76. Resolver:

a) $|x^2-3x|=4$ *(Sol: x_1=-1, x_2=4)*

b) $|2x-3|=|x+4|$ *(Sol: x_1=-1/3; x_2=7)*

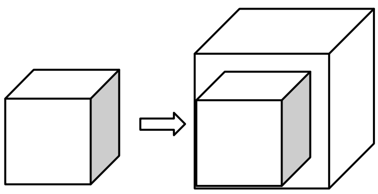
77. En un terreno rectangular de lados 64 m y 80 m se quieren plantar 357 árboles formando una cuadrícula regular. ¿Cuál será el lado de esa cuadrícula? (Ayuda: En el lado menor, por ejemplo, hay 64/x cuadrículas, y un árbol más que el número de cuadrículas) *(Sol: x=4 m)*



78. Operar, racionalizando previamente

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}= \qquad \left(Sol: \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$

79. Al aumentar en 1 cm la arista de un cubo su volumen aumenta en 271 cm^3. ¿Cuánto mide la arista? (Ayuda: plantear una ecuación de 3^er grado) *(Sol: 9 cm)*



80. Dos tinajas tienen la misma cantidad de vino. Si se pasan 37 litros de una a otra, ésta contiene ahora el triple que la primera ¿Cuántos litros de vino había en cada tinaja al principio? *(Sol: 74 l)*

81. Un padre, preocupado por motivar a su hijo en Matemáticas, se compromete a darle 1 € por problema bien hecho, mientras que, si está mal, el hijo le devolverá 0,5 €. Después de realizar 60 problemas, el hijo ganó 30 €. ¿Cuántos problemas resolvió correctamente? *(Ayuda: Plantear un SS.EE. de 1^er^ grado)*

(Sol: 40 problemas)

82. Tres hermanos se reparten un premio de 350 €. Si el mayor recibe la mitad de lo que recibe el mediano; y el mediano la mitad de lo que recibe el pequeño, ¿cuánto dinero tendrá cada hermano al final?

(Sol: 50 € el mayor, 100 € el mediano y 200 € el pequeño)

83. Un ganadero decide repartir una manada de 456 caballos entre sus hijos e hijas. Antes del reparto se enfada con los dos únicos varones, que se quedan sin caballos. Así, cada hija recibe 19 cabezas más. ¿Cuántas hijas tiene el ganadero? *(Sol. 6 hijas)*

84. Una cuadrilla de vendimiadores tiene que vendimiar dos fincas, una de las cuales tiene doble superficie que la otra. Durante medio día trabajó todo el personal de la cuadrilla en la finca grande; después de la comida, una mitad de la gente quedó en la finca grande y la otra mitad trabajó en la pequeña. Durante esa tarde fueron terminadas las dos fincas, a excepción de un reducido sector de la finca pequeña, cuya vendimia ocupó el día siguiente completo a un solo vendimiador. ¿Con cuántos vendimiadores contaba la cuadrilla? (Ayuda: Llamar x al nº de vendimiadores y s a la superficie que vendimia una persona en media jornada, y plantear una ecuación, ¡no un sistema!) *(Sol. 8 vendimiadores)*

BINOMIO DE NEWTON

1. Calcular:

$\binom{6}{3}$ $\binom{6}{5}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{7}{5}$ $\binom{100}{2}$ $\binom{8}{4}$ $\binom{18}{14}$ $\binom{25}{20}$ $\binom{3}{7}$ $\binom{15}{10}$ $\binom{9}{3}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{10}{3}$ $\binom{6}{6}$ $\binom{12}{8}$

2. Demostrar: **a)** $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ **b)** $\binom{n}{1}=n$

3. A la vista del ejercicio anterior, y sin efectuar ningún cálculo, decir el valor de los siguientes coeficientes binómicos:

$$\binom{7}{0} \quad \binom{100}{100} \quad \binom{50}{1} \quad \binom{0}{0} \quad \binom{1}{1}$$

4. Calcular: **a)** $\binom{10}{7}$ y $\binom{10}{3}$ **b)** $\binom{11}{5}$ y $\binom{11}{6}$ **c)** $\binom{7}{0}$ y $\binom{7}{7}$ ¿Qué conclusión podemos sacar?

5. Desarrollar: **a)** $(x+2)^7$ **b)** $(x^2+3)^6$ **c)** $(2x^3+5)^5$ **d)** $(2x^4+5x)^5$ **e)** $(2x^2+3y)^5$

6. Desarrollar: **a)** $(x\text{-}3)^5$ **b)** $(2x\text{-}4)^6$ **c)** $(x^2-3x)^4$ **d)** $(3x-2y)^5$

7. Desarrollar: **a)** $(\sqrt{2}+1)^6$ **b)** $(2+\sqrt{3})^5$ **c)** $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^5$ **d)** $(\sqrt{5}\text{-}2)^4$ **e)** $(2\sqrt{3}\text{-}1)^3$ **f)** $(3\sqrt{2}\text{-}2)^5$
g) $(2\sqrt{3}-\sqrt{2})^4$ **h)** $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^5$ **i)** $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^5$ **j)** $(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})^6$ **k)** $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^5$
l) $(3\sqrt{x}-2x)^5$ **m)** $\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5$ **n)** $(\sqrt{2}+\sqrt{8})^4$ **o)** $\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$ **p)** $\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5$
q) $\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)^6$ **r)** $\left(3-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4$ **s)** $\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5$ **t)** $\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4$

8. Desarrollar:

a) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$ **b)** $\left(x\text{ - }\frac{2}{x}\right)^4$ **c)** $\left(2x+\frac{y}{3}\right)^4$ **d)** $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ **e)** $\left(xy\text{ - }\frac{1}{xy}\right)^4$ **f)** $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-x\right)^5$ **g)** $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ **h)** $\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$

9. Resolver la ecuación $\sqrt[3]{x}+6=x$ *(Sol: x=2)*

10. Calcular 11^5 por medio del binomio de Newton y comprobar el resultado.

Puede ser útil para el futuro memorizar que:

$$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$
$$(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$$

TRIGONOMETRÍA

Repaso Trigonometría elemental:

1. Completar en el cuaderno la siguiente tabla:

Grados	105º		225º		320º		35º
Radianes		$4\pi/9$ rad		$\pi/15$ rad		1 rad	

2. **Uso de la calculadora**:

a) Hallar, con cuatro cifras decimales bien aproximados, el valor de las siguientes razones trigonométricas:

sen 35º cos 70º tg 53º sen 26º 37' cos 78º 34' 8'' tg 34º 12' 43''

sec 12º cosec 23º ctg 54º sen 235º cos 105º

b) Dadas las siguientes razones trigonométricas, hallar el ángulo agudo α del que proceden:

sen α=0,25 cos α=0,74 tg α=3 sec α=1,18 ctg α=1,5

c) Dado cos α=0,2, hallar, mediante calculadora, tg α

d) Dado sen α=0,56, hallar, mediante calculadora, cos α

e) Dada tg α=2, hallar, mediante calculadora, sen α

f) Dada cosec α=3, hallar, mediante calculadora, cos α

g) Dada sec α=1,5, hallar, mediante calculadora, tg α

h) Dada ctg α=3, hallar, mediante calculadora, cosec α

3. Resolver los siguientes **triángulos**, **rectángulos** en A, aplicando, siempre que sea posible relaciones trigonométricas (¡no el teorema de Pitágoras!); hallar también su área:

a) a=320 m, B=47º *(Soluc: C=43º; b≅234,03 m; c≅218,24 m; S_{ABC}≅25537,64 m^2)*

b) a=42,5 m, b=35,8 m *(Soluc: B≅57º23'22''; C≅32º36'38''; c≅22,90 m; S_{ABC}≅409,99 m^2)*

c) b=32,8 cm, B=22º *(Soluc: C=68º; a≅87,56 cm; c≅81,18 cm; S_{ABC}≅1331,40 cm^2)*

d) b=8 mm, c=6 mm *(Soluc: B≅53º7'48''; C≅36º52'12''; a=10 mm; S_{ABC}=24 mm^2)*

e) a=8 km, b=6 km *(Soluc: B≅48º35'; C≅41º 25'; c≅5,30 km; S_{ABC}≅15,87 km^2)*

f) a=13 m, c=5 m *(Soluc: B≅67º22'48''; C≅22º37'12''; b=12 m; S_{ABC}≅30 m^2)*

g) c=42,7 dam, C=31º *(Soluc: B=59º; a≅82,91 dam; b≅71,06 dam; S_{ABC}≅1517,23 dam^2)*

h) c=124 dm, B=67º 21' *(Soluc: C≅22º39'; a≅321,99 dm; b≅297,16 dm; S_{ABC}≅18423,9 dm^2)*

4. Una escalera de bomberos de 10 m de longitud se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo con el suelo de 45º y si se apoya sobre la otra forma un ángulo de 30º. Hallar la anchura de la calle. ¿Qué altura se alcanza sobre cada fachada?
(Soluc: anchura≅15,73 m; altura 7,07 y 5 m respectivamente)

Razones trigonométricas en cualquier cuadrante:

5. Expresar los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo positivo menor de 360º o 2π rad (hacer el dibujo en el caso de los cinco primeros):

a) 1100º **b)** 19π/3 rad **c)** 2970º **d)** –300º **e)** –1040º **f)** 10π rad **g)** 43π/4 rad
h) 3500º **i)** 32π/3 rad **j)** –2620º **k)** 63π/5 rad **l)** 43π/6 rad **m)** 4980º

(Soluc: a) 20º; b) 90º; c) 60º; d) 40º, e) 0 rad; f) π/3 rad; g) 3π/4 rad; h) 260º; i) 2π/3 rad; j)260º; k) 3π/5 rad; l) 7π/6 rad)

6. Sobre **papel milimetrado**, y para cada uno de los apartados que figuran a continuación, trazar una circunferencia de radio unidad (usar e indicar una escala conveniente), señalar en ella los ángulos en cuestión (utilizar para ello un transportador de ángulos) y trazar su seno y coseno, medir éstos aproximadamente, y comparar el resultado obtenido con la calculadora:

a) 30º y 150º **b)** 45º y 225º **c)** 90º, 180º y 270º **d)** 60º y 300º **e)** 0º, 60º y 120º

7. Utilizando la calculadora, construir una tabla de valores apropiada para representar, sobre **papel milimetrado**, las funciones sen x, cos x y tg x (Pueden verse dichas gráficas en el anexo final del cuaderno)

8. Sabiendo que cos α=–3/5 y 180º<α<270º, calcular las restantes razones trigonométricas.
(Soluc: sen α=-4/5, tg α=4/3)

9. Sabiendo que tg α=–3/4 y α ∈ 4º cuadrante, calcular las restantes razones trigonométricas.
(Soluc: sen α=-3/5, cos α=4/5)

10. Ídem con sec α=2 y 0<α<π/2 *(Soluc: sen α=$\sqrt{3}$/2, cos α=1/2, tg α=$\sqrt{3}$)*

11. Ídem con tg α=–3 y π/2<α<π *(Soluc: sen α=3$\sqrt{10}$/10, cos α=-$\sqrt{10}$/10)*

12. Ídem con cos α=0,2 y 3π/2<α<2π *(Soluc: sen α=-2$\sqrt{6}$/5, tg α=-2$\sqrt{6}$)*

13. Ídem con sen α=–0,3 y π<α<3π/2 *(Soluc: cos α≅-0,95, tg α≅0,32)*

14. Ídem con tg α=4/3 y π<α<3π/2 *(Soluc: sen α=-4/5, cos α=-3/5)*

15. Calcular las restantes razones trigonométricas sabiendo que:

a) cos α=4/5	270º<α<360º	**f)** cos α=–1/3	α ∈ 2º cuad.	**k)** sec α=–$\sqrt{2}$	α ∈ 3^er^ cuad.
b) tg α=3/4	180º<α<270º	**g)** cosec α=–2	180º<α<270º	**l)** cosec α=$\sqrt{5}$	α ∈ 2º cuad.
c) sen α=3/5	90º<α<180º	**h)** sec α=1	0º<α<90º		
d) ctg α=–2	90º<α<180º	**i)** tg α=3/4	0º<α<90º		
e) sen α=1/4	α ∈ 1^er^ cuad.	**j)** tg α=3/4	α ∈ 3^er^ cuad.		

16. Determinar los valores de sen α y tg α sabiendo que tg α > 0 y cos α=–5/12

17. Encontrar el ángulo α y las demás razones trigonométricas sabiendo que sen α=1/2 y cos α=–$\sqrt{3}$ /2

18. Resolver las siguientes **ecuaciones trigonométricas** sencillas:

a) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ **b)** $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $\operatorname{tg} x = 1$ **d)** $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **e)** $\cos x = \frac{1}{2}$ **f)** $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

Reducción al 1^{er} cuadrante:

19. Hallar, **sin calculadora**: **a)** sen 570º **b)** cos 14520º **c)** sen (–120º) **d)** cos (–240º) **e)** tg 2565º **f)** cos 15π/2 rad **g)** sen 55π/6 rad **h)** tg 79π rad

(Soluc: a) –1/2; b) –1/2; c) $-\sqrt{3}/2$; d) –1/2; e) 1; f) 0; g) –1/2; h) 0)

20. Ídem: **a)** cos 225º **b)** cos(–60º) **c)** tg 120º **d)** sen (–1470º) **e)** tg 900º **f)** sen 19π/6 rad **g)** cos 11π rad

(Soluc: a) $-\sqrt{2}/2$; b)1/2; c) $-\sqrt{3}$; d) –1/2; e) 0; f) –1/2; g) –1)

21. Expresar las siguientes razones en función de la de un ángulo del 1^{er} cuadrante:
a) sen 1485º **b)** cos 1560º **c)** sen 1000º *(Soluc: sen 45º; –cos 60º; –sen 80º)*

22. Ídem: **a)** sen 1300º **b)** cos (–690º) **c)** tg 170º **d)** sen (–1755º) **e)** sen (–120º) **f)** ctg (–150º) **g)** sen 2700º **h)** sec (–25º) **i)** cos (–30º) **j)** cosec 4420º

23. Expresar seno, coseno y tangente de 1755º en función de un ángulo del 1^{er} cuadrante. Comprobar el resultado con la calculadora.

Razones trigonométricas de adición y sustracción:

24. a) Hallar mediante las fórmulas trigonométricas correspondientes (sin calculadora, y sin utilizar decimales) el seno, coseno y tangente de 75º.

b) Utilizando los resultados anteriores, calcular, de la forma más rápida posible, (sin calculadora y sin utilizar decimales) el seno y la tangente de los siguientes ángulos:

i) 105º **ii)** 165º **iii)** 15º **iv)** 195º **v)** 135º

(Comprobar todos los resultados con la calculadora)

25. Si sen x=12/13 y sen y=4/5, siendo x e y ∈ 1^{er} cuadrante, calcular:

a) sen (x+y) **b)** sen (x–y) **c)** cos (x+y) **d)** cos (x–y)

(Soluc: a) 56/65; b) 16/65; c) -33/65; d) 63/65)

26. Si tg a=3/4, hallar tg (a+30º) y tg (45º–a) *(Soluc: $\frac{48+25\sqrt{3}}{39}$; $\frac{1}{7}$)*

27. Hallar el seno y el coseno de 9º y 6º en función de cos 36º

Razones trigonométricas de –α, 180–α, 180+α, etc:

28. Expresar únicamente en función de las razones trigonométricas de α:

a) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ **b)** $\cos\left(\alpha-\frac{9\pi}{2}\right)$ **c)** $tg(\alpha+5\pi)$ **d)** $sen\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)$ **e)** $tg(360^\circ-\alpha)$

(Soluc: a) sen α; b) sen α; c) tg α; d) -cos α; e) -tg α)

29. Simplificar las siguientes expresiones: **a)** tg(α+180º)+tg(α–180º)+tg(α–270º)+tg(360º–α)

b) sen(α+5π)+sen(α–π)+sen(α+2π)+sen(α+π)

(Soluc: a) tg α - ctg α; b) - 2 sen α)

30. Calcular sen $(5\pi\text{-}x)$ sabiendo que cos x=0,5

31. Siendo tg x=2/3 calcular: **a)** $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ **b)** $\operatorname{tg}(\pi-x)$ **c)** $\operatorname{tg}(\pi+x)$

32. Sabiendo que tg a=3/2 calcular: **a)** $\cos(\pi+a)$ **b)** $\cos(2\pi-a)$ **c)** $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$ **d)** $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+a\right)$

(Soluc: a) $-2\sqrt{13}/13$; b) $2\sqrt{13}/13$; c) $2\sqrt{13}/13$; d) $2\sqrt{13}/13$)

Razones trigonométricas del ángulo doble:

33. Calcular el seno y el coseno de 20º en función de sen 10º, y comprobar el resultado con la calculadora.

34. Hallar sen 2x, cos 2x y tg 2x, siendo $x \in 1^{\underline{er}}$ cuadrante, en cada uno de los siguientes casos:

a) sen x=1/2 **b)** cos x=3/5 **c)** sen x=5/13

(Soluc: a) $\sqrt{3}/2$; 1/2; $\sqrt{3}$ b) 24/25; -7/25; -24/7 c) 120/169; 119/169; 120/119)

35. Dado $a \in 3^{\underline{er}}$ cuadrante tal que $\operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, hallar las razones trigonométricas del ángulo **2a**.

(Soluc: sen 2a=$\sqrt{3}$/2; cos 2a=1/2)

35b Obtener gráficamente, utilizando la circunferencia trigonométrica, el ángulo **a** del ejercicio anterior.

(Soluc: a=210º)

36. Expresar sen 3a y cos 3a en función de sen a y cos a respectivamente

(Soluc: sen 3a=3sen a-4sen^{3}a; cos 3a=4cos^{3}a-3cos a)

37. Si cos α=1/5 y $\alpha \in 1^{\underline{er}}$ cuadrante, calcular las razones trigonométricas del ángulo 90º-2α

(Soluc: -23/25; 4$\sqrt{6}$/25)

38. Si ctg α=4/3, hallar cos 2α *(Soluc: 7/25)*

39. Sabiendo que $\operatorname{tg} 2a = \sqrt{3}$, hallar sen a y cos a, sabiendo que a<90º. ¿De qué ángulo **a** se trata?

(Soluc: sen a=1/2; cosa=$\sqrt{3}$/2; a=30º)

Razones trigonométricas del ángulo mitad:

40. Calcular tg π/8 *(Soluc: $\sqrt{2}$ -1)*

41. Dado $\alpha \in$ 4º cuadrante tal que sec α=2, hallar cos α/2 *(Soluc: $\cos\frac{a}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$)*

41b Obtener gráficamente, utilizando la circunferencia trigonométrica, el ángulo α del ejercicio anterior. Comprobar, a continuación, mediante fórmulas trigonométricas (sin calculadora) el resultado anterior.

(Soluc: α=300º)

42. Sea un ángulo **a** situado en el 2º cuadrante tal que tg a=–3/4. Hallar las razones trigonométricas del ángulo **a/2**. $\left(Soluc: sen\ \frac{a}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10};\ cos\ \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$

42b Comprobar con la calculadora el resultado del ejercicio anterior. *(Soluc: a≅143º 7' 48'')*

43. Dado **a** ∈ 3er cuadrante tal que sen a=–1/2, hallar las razones de **a/2**. ¿De qué ángulo a se trata?

$$\left(Soluc: sen\ \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2};\ cos\ \frac{a}{2} = \frac{-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2};\ a = 210º\right)$$

44. Volver a hacer el ejercicio 38, pero aplicando las fórmulas del ángulo mitad (Ayuda: para ello, plantear el cambio de variable a=α/2).

45. Dado a ∈ 4º cuadrante con $\text{tg}\, a = -\sqrt{3}$, hallar las razones de a/2

$$\left(Soluc: sen\ \frac{a}{2} = \frac{1}{2};\ cos\ \frac{a}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2};\ tg\ \frac{a}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

45b Obtener gráficamente, utilizando la circunferencia trigonométrica, el ángulo **a** del ejercicio anterior. Comprobar, a continuación, mediante fórmulas trigonométricas (sin calculadora) los resultados anteriores.

(Soluc: a=300º)

46. Dado α ∈ 3er cuadrante tal que cos α=–1/2, hallar, utilizando la fórmula correspondiente (resultados simplificados y racionalizados; no vale utilizar decimales), y **por este orden**:

a) sen 2α *(Soluc: √3/2)*

b) cos α/2 *(Soluc: –1/2)*

c) sen (α–30º) *(Soluc: –1/2)*

d) tg (α+60º) *(Soluc: –√3)*

e) Razonar mediante la circunferencia goniométrica (no vale con calculadora) de qué α se trata.

(Soluc: 240º)

47. Ídem, dado α ∈ 4º cuadrante tal que $\text{tg}\,\alpha = -\sqrt{3}$

a) cos (α+30º) *(Soluc: √3/2)*

b) tg (α–45º) *(Soluc: 2+√3)*

c) sen (α+1650º) *(Soluc: 1/2)*

d) sen α/2 *(Soluc: 1/2)*

e) cos 2α *(Soluc: –1/2)*

f) Razonar (sin calculadora) de qué α se trata. *(Soluc: 300º)*

48. Ídem con α ∈ 3er cuadrante tal que $\sec\alpha = -3$

a) sen (α –60º) *(Soluc: (√3–2√2)/6)*

b) tg (α+45º) *(Soluc: -(9+4√2)/7)*

c) cos (α –2640º) *(Soluc: (1–2√6)/6)*

d) cos α/2 *(Soluc: –√3)/3)*

e) sen 2α *(Soluc: 4√2/9)*

f) Razonar, mediante calculadora y circunferencia trigonométrica, de qué α se trata. *(Soluc: ≅250º 31' 44'')*

Transformación de sumas en productos:

49. Transformar en producto y calcular (comprobar con la calculadora):

a) sen 75º – sen 15º **b)** cos 75º + cos 15º **c)** cos 75º – cos 15º

(Soluc: a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *b)* $\frac{\sqrt{6}}{2}$ *c)* $-\frac{\sqrt{2}}{2}$*)*

Identidades trigonométricas:

50. Simplificar:

a) $\frac{\text{sen } 4\alpha+\text{sen } 2\alpha}{\cos 4\alpha+\cos 2\alpha}=$ *(Soluc: tg 3α)*

b) $\frac{\text{sen } 2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=$ *(Soluc: 2 ctgα)*

c) $\frac{2\cos(45^\circ+\alpha)\cos(45^\circ-\alpha)}{\cos 2\alpha}=$ *(Soluc: 1)*

d) $2\,\text{tg}\,x\cos^2\frac{x}{2}-\text{sen}\,x=$ *(Soluc: tg x)*

e) $2\,\text{tg}\,\alpha\,\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}+\text{sen}\,\alpha=$ *(Soluc: tg α)*

f) $\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{\text{sen}(a+b)+\text{sen}(a-b)}=$ *(Soluc: ctg a)*

51. Demostrar las siguientes identidades:

a) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\text{sen}^2\alpha+\cos 2\alpha}=2\,\text{tg}^2\alpha$

b) sen 2α cos α – sen α cos 2α = sen α

c) cos α cos (α–β) + sen α sen (α–β)=cos β

d) $\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

e) $\frac{2\,\text{sen}\,\alpha-\text{sen}\,2\alpha}{2\,\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,2\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}$

f) $\text{sen}^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\text{sen}^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$

Ecuaciones trigonométricas:

52. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas elementales:

a) $\text{sen}\,x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{ctg}\,x=-\sqrt{3}$

d) $\text{sen}\,x=\frac{1}{3}$

e) $\cos x=-\frac{4}{5}$

f) $\text{sen}\,x=0$ *(Sol: x=k·180º)*

g) $\cos x=-1$ *(Sol: x=(2k+1)·180º)*

h) $\text{cosec}\,x=-2$

i) $\sec x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

j) $\text{tg}\,x=\sqrt{3}$

k) $\text{cosec}\,x=\frac{1}{2}$ *(Sol: ∄ soluc)*

l) $\text{sen}^2x+\cos^2x=1$

m) $\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ *(Sol: x=10º+k120º; x=110º+k·120º)*

n) $\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

53. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\text{sen}\,x+\cos x=\sqrt{2}$ *(Sol: x=45º+k·360º)*

b) $\text{sen}\,x-2\cos 2x=-\frac{1}{2}$
(Sol: 30º, 150º, ≅ 311º24'35'' y ≅ 228º35'25'')

c) $\text{sen}\, x \cos x = \dfrac{1}{2}$ *(Sol: x=45º+k·180º)*

d) sen 2x=cos x
(Sol: x=30º+k·360º; x=150º+k·360º; x=90º+k·180º)

e) $\sqrt{3}\ \text{sen}\, x + \cos x = 1$ *(Sol: x=k·360º; x=120º+k·360º)*

f) $2\cos^2 x - \text{sen}^2 x + 1 = 0$ *(Sol: x=90º+k·180º)*

g) $\text{sen}^2 x - \text{sen}\, x = 0$ *(Sol: x=k·180º; x=90º+k·360º)*

h) $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$
(Sol: x=90º+k·180º; x=30º+k·360º; x=330º+k·360º)

i) $\text{sen}^2 x - \cos^2 x = 1$ *(Sol: x=90º+k·180º)*

j) $\cos^2 x - \text{sen}^2 x = 0$ *(Sol: x=45º+k·90º)*

k) $2\cos^2 x + \text{sen}\, x = 1$
(Sol: x=90º+k·360º; x=210º+k·360º; x=330º+k·360º)

l) $3\,\text{tg}^2 x - \sqrt{3}\ \text{tg}\, x = 0$
(Sol: x=k·180º; x=30º+k·360º; x=210º+k·360º)

m) $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2}\ \text{sen}\, x = 0$ *(Sol: x=45º+k·180º)*

n) $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \dfrac{1}{2}$
(Sol: x=60º+k·360º; x=300º+k·360º)

o) $\text{sen}\, 2x - 2\cos^2 x = 0$ *(Sol: x=90º+k·180º; x=45º+k·180º)*

p) cos2x−3senx+1=0 *(Sol: x=30º+k·360º; x=150º+k·360º)*

q) $4\,\text{sen}^2 x \cos^2 x + 2\cos^2 x - 2 = 0$ *(Sol: x=k·180º; x=45º+k·90º)*

r) $4\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x \cos x - 3\cos^2 x = 0$
(Sol: x=36º52'11,6''+k·180º; x=135º+k·180º)

s) $\cos^2 \dfrac{x}{2} + \cos x = \dfrac{1}{2}$ *(Sol: x=90º+k·180º)*

t) $\text{tg}^2 \dfrac{x}{2} + 1 = \cos x$ *(Sol: x=k·360º)*

u) $2\,\text{sen}^2 \dfrac{x}{2} + \cos 2x = 0$
(Sol: x=90º+k·180º; x=60º+k·360º; x=300º+k·360º)

v) cos2x+3senx=2

w) tg2x tgx=1

x) $\cos x \cos 2x + 2\cos^2 x = 0$

y) 2sen x=tg 2x

z) $\sqrt{3}\ \text{sen}\dfrac{x}{2} + \cos x = 1$

α) $\text{sen}\, 2x \cos x = 6\,\text{sen}^3 x$

β) $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + \text{tg}\, x = 1$

γ) $\text{sen}\, x - \sqrt{3}\cos x = 2$ *(Sol: x=150º+k·360º)*

54. Resolver las siguientes ecuaciones, transformando las sumas y diferencias en productos:

a) sen3x−senx=cos2x

b) $\dfrac{\text{sen}\, 5x + \text{sen}\, 3x}{\cos x + \cos 3x} = 1$

c) $\dfrac{\text{sen}\, 3x + \text{sen}\, x}{\cos 3x - \cos x} = \sqrt{3}$

d) sen3x−cos3x=senx−cosx

Resolución de triángulos oblicuángulos:

55. Resolver los siguientes triángulos y hallar su área (con * se indica el caso dudoso):

a) a=6 m, B=45º, C=105º *(Soluc: A=30º, b≅8,49 m, c≅11,59 m, S≅24,60 m^2)*

b) a=10 dam, b=7 dam, C=30º *(Soluc: c≅5,27 dam, B≅41º 38', A≅108º 22')*

c) b=35,42 dm, A=49º 38', B=70º 21' *(Soluc: C≅60º 1', a≅28,66 dm, c≅32,58 dm, S≅439,94 dm^2)*

d) a=13 m, b=14 m, c=15 m *(Soluc: A≅53º 7' 48'', B≅59º 29' 23'', C≅67º 22' 48'', S≅84m^2)*

* **e)** a=42, b=32, B=40º 32' *(Soluc: A_1≅58º 32', C_1≅80º 56', c_1≅48,62
A_2≅121º 27', C_2≅18º, c_2≅15,22)*

f) a=15, b=22, c=17 *(Soluc: A≅42º 54', B≅86º 38', C≅50º 28')*

g) a=10 mm, b=7 mm, C=60º *(Soluc: 8,89 mm, A≅77º, B≅43º, S≅30,31mm^2)*

h) a=10, b=9, c=7 *(Soluc: A≅76º 13', B≅60º 57, C≅42º 50')*

* **i)** a=60 cm, b=40 cm, A=42º *(Soluc: B≅26º 30', c≅83,43 cm, C≅111º 30', S≅116,5 cm^2)*

* **j)** a=40 cm, b=60 cm, A=72º *(Soluc: $\nexists$ soluc)*

* **k)** a=50, b=60, A=42º *(Soluc: B_1≅53º 24', C_1≅84º 36', c_1≅74,39
B_2≅126º 36', C_2≅11º 24', c_2≅30,39)*

l) A=30º, B=45º, b=$\sqrt{2}$ m *(Soluc: C=105º, a≅1 m, c≅1,93 m, S≅0,68 m^2)*

m) b=3 hm, c=2 hm, A=60º *(Soluc: a=$\sqrt{7}$ hm, B≅79º, C≅40º 54', S=3$\sqrt{3}$/2 hm^2)*

n) A=30º, b=$\sqrt{3}$, c=1

* **o)** a=4, b=5, B=30º

p) a=1792, b=4231, c=3164

* **q)** a=12 hm, b=57 hm, A=150º *(Soluc: ∄ soluc)*

r) a=72, b=57, C=75º 47'

s) c=3,78, A=105º, B=38º 47'

* **t)** a=40, b=60, A=12º

* **u)** a=60, b=40, A=82º

v) a=8 m, B=30º, C=105º

w) A=60º, B=75º, c=$\sqrt{2}$ m

x) a=4 km, B=45º, C=60º

y) a=4 mm, b=3 mm, c=6 mm

z) a=1 cm, c=2 cm, B=60º

α) a=5 dam, b=3 dam, c=4 dam

* **β)** b=10 dm, c=9 dm, C=45º

56. Resolver el triángulo ABC sabiendo que su perímetro es 24 cm, es rectángulo en A y sen B=3/5
(Soluc: a=10 cm, b=6 cm, c=8 cm)

57. Calcular el área de un triángulo de datos a=8 m, B=30º, C=45º

58. En un paralelogramo ABCD el lado AB mide 6 cm, el AD 8 cm, y el ángulo A=30º. Hallar sus diagonales.

59. Hallar los lados de un triángulo sabiendo que su área mide 18 cm^2 y dos de sus ángulos A=30º y B=45º
(Soluc: a≅5,13 cm, b≅7,26 cm, c≅9,92 cm)

60. TEORÍA: Demostrar, utilizando el teorema del coseno, que el triángulo de lados 9, 12 y 15 es rectángulo.

*** 61.** Uno de los lados de un triángulo es doble que el otro, y el ángulo comprendido vale 60º. Hallar los otros dos ángulos. *(Soluc: 30º y 60º)*

Problemas de planteamiento:

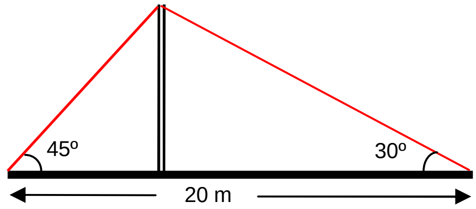
62. Un grupo decide escalar una montaña de la que desconocen la altura. A la salida del pueblo han medido el ángulo de elevación, que resulta ser 30º. A continuación han avanzado 100 m hacia la base de la montaña y han vuelto a medir el ángulo de elevación, siendo ahora 45º. Calcular la altura de la montaña.
(Soluc: ≅136,60 m)

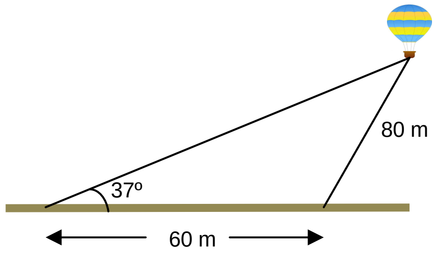
63. Rosa y Juan se encuentran a ambos lados de la orilla de un río, en los puntos A y B respectivamente. Rosa se aleja hasta un punto C distante 100 m del punto A desde la que dirige visuales a los puntos A y B que forman un ángulo de 20º y desde A ve los puntos C y B bajo un ángulo de 120º. ¿Cuál es la anchura del río? *(Soluc: ≅53,21 m)*

64. Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras rectas y llanas. La distancia AB es de 6 km, la BC es 9 km y el ángulo que forman AB y BC es de 120º. ¿Cuánto distan A y C? *(Soluc: ≅13 km 77 m)*

65. Se ha colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta, como muestra la figura. ¿Cuánto miden el cable y el mástil?

(Sol: cable=25 m; mástil≅7,32 m)



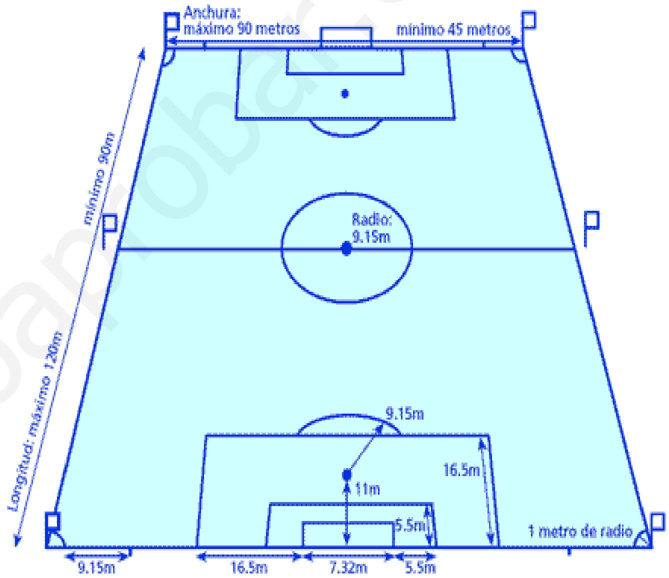


66. Un globo aerostático está sujeto al suelo mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37º. Hallar la altura del globo y la longitud del cable más extenso. *(Sol: ≅71,80 m y 119,31 m, respectivamente)*

67. Se lanza una falta desde un punto situado a 25 m y 28 m de ambos postes de una portería reglamentaria de fútbol, es decir, 7,32 m de longitud ¿Bajo qué ángulo se verá la portería desde dicho punto? (Hacer un dibujo previo que explique la situación). ¿A qué distancia se encuentra del centro de la portería?

(Sol: ≅ 14º 29' 54")

Si el punto estuviera a 26 y 27 m, ¿tendría más ángulo de tiro? La distancia, ¿sería menor?



68. Desde la puerta de una casa, A, se ve el cine B, que está a 120 m, y el quiosco C, que está a 85 m, bajo un ángulo $B\hat{A}C = 40º$ ¿Qué distancia hay entre el cine y el quiosco? (Hacer un dibujo previo que explique la situación).

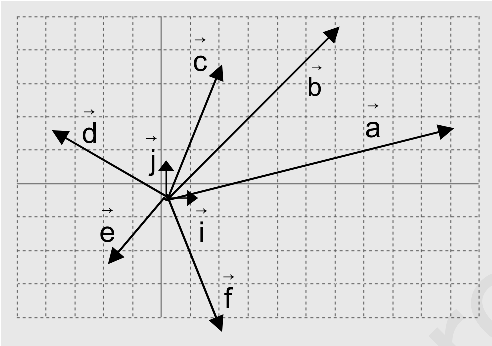
(Sol: ≅77,44 m)

VECTORES

1. **a)** Representar en el mismo plano los vectores:

b) Escribir las coordenadas de los vectores fijos de la figura adjunta:

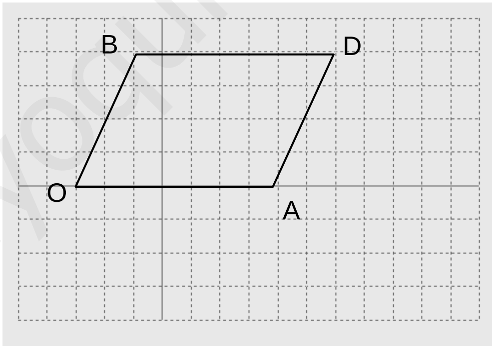
$\vec{a}=(3,1)$ $\vec{b}=(-1,5)$ $\vec{c}=(2,-4)$ $\vec{d}=(-3,-1)$ $\vec{i}=(1,0)$ $\vec{j}=(0,1)$ $\vec{e}=(3,0)$ $\vec{f}=(0,-5)$



2. **a)** Dibujar dos vectores de origen común, igual módulo, y que formen un ángulo de 135º. Expresarlos analíticamente.

b) Dibujar dos vectores que tengan el origen común y los sentidos opuestos. Expresarlos analíticamente. ¿Qué ángulo forman dichos vectores?

3. Dado el paralelogramo de la figura:



a) Indicar, analítica y gráficamente, un vector equipolente con $\overrightarrow{OA}$; ídem con $\overrightarrow{AD}$

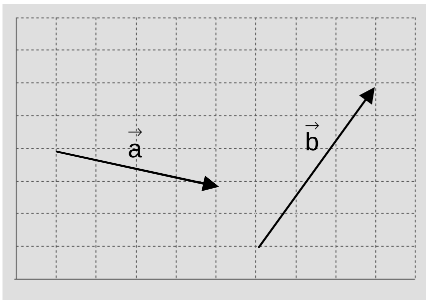
b) Indicar, analítica y gráficamente, un vector opuesto a $\overrightarrow{OA}$; ídem con $\overrightarrow{AD}$

Operaciones con vectores:

4. Dados los vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la figura, calcular gráfica –cada apartado en ejes distintos– y analíticamente (en función de la base ortonormal de $\mathcal{V}^2$):

a) $\vec{a}+\vec{b}$

b) $\vec{a}-\vec{b}$



c) $3\vec{a}$

d) $3\vec{a}+2\vec{b}$

e) $2\vec{a}-3\vec{b}$

5. **a)** Determinar, analíticamente, si los puntos A(3,1), B(5,2) y C(1,0) están alineados.

b) Ídem para A(1,1), B(3,4) y C(4,6) (Nota: un dibujo puede ser útil)

c) Hallar **k** para que los puntos A(1,7), B(-3,4) y C(k,5) estén alineados. *(Soluc: SÍ; NO; k=-5/3)*

6. Considerar el segmento de extremos A(-2,1) y B(5,4). Hallar:

a) El punto medio M *[Sol: M(3/2,5/2)]*

b) Los dos puntos P y Q que lo dividen en tres partes iguales. *[Soluc: P(1/3,2) y Q(8/3,3)]*

7. Hallar las coordenadas del punto P que divide al segmento de extremos A(3,4) y B(0,-2) en dos partes tales que $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$ *[Soluc: P(2,2)]*

8. **a)** De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ conocemos $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$ y el ángulo que forman, α=60º. Hallar $|\vec{a}+\vec{b}|$ y $|\vec{a}-\vec{b}|$ *(Soluc: $\sqrt{39}$ y $\sqrt{19}$, respectivamente)*

b) De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ conocemos $|\vec{a}+\vec{b}|=5$, $|\vec{b}|=\sqrt{19}$ y $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=30º$. Hallar $|\vec{a}|$ *(Soluc: $9-\frac{\sqrt{57}}{2}$)*

9. Dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ de intensidades 20 N y 30 N actúan sobre el mismo cuerpo y forman entre ellas un ángulo de 60º. Hacer un dibujo. ¿Cuántos N tiene la resultante $\vec{R}$? *(Soluc: 43,6 N)*

Combinación lineal de vectores:

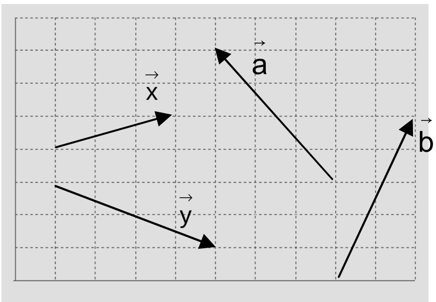
10. Dados los vectores $\vec{u}=(3,4)$ y $\vec{v}=(-2,3)$ se pide:

a) Razonar que pueden ser base de $\mathcal{V}^2$.

b) Obtener analíticamente las coordenadas de $\vec{w}=(-12,1)$ en la base anterior.

c) Explicar gráficamente la situación.

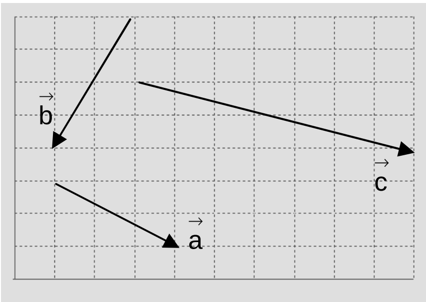
11. Expresar los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la figura como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$:



$\left(\textit{Soluc:}\ \vec{a}=\vec{x}-\frac{3}{2}\vec{y};\quad \vec{b}=\frac{12}{5}\vec{x}-\frac{13}{10}\vec{y}\right)$

12. Expresar $\vec{a}=(9,5)$ y $\vec{b}=(-5,7)$ como combinación lineal de $\vec{x}=(1,3)$ e $\vec{y}=(3,-2)$, analítica y gráficamente. $\left(\textit{Soluc: } \vec{a}=3\vec{x}+2\vec{y};\ \vec{b}=\vec{x}-2\vec{y}\right)$

13. Dados los vectores libres de la figura:



a) Razonar que $\{\vec{a},\vec{b}\}$ constituye una base de $\mathcal{V}^2$.

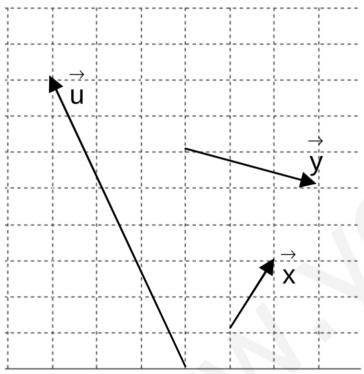
b) Obtener $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$

c) Comprobar gráficamente la combinación lineal anterior.

$\left(\textit{Soluc: } \vec{c}=2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)$

14. Definir base de $\mathcal{V}^2$, combinación lineal y coordenadas de un vector referidas a una base. Explicar estos conceptos mediante la base formada por $\left\{\vec{u}=(2,1);\ \vec{v}=(-1,3)\right\}$, y el vector $\vec{w}=(4,9)$, analítica y gráficamente. $\left(\textit{Soluc: } \vec{w}=3\vec{u}+2\vec{v}\right)$

15.



a) ¿Los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de la figura pueden ser base de $\mathcal{V}^2$? Razonar la respuesta.

b) Expresar $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ $\left(\textit{Sol: } \vec{u}=3\vec{x}-2\vec{y}\right)$

c) Comprobar gráficamente lo anterior.

Módulo de un vector:

16. a) Calcular el módulo de los siguientes vectores, y dibujarlos (los siete primeros en los mismos ejes):

$$\vec{a}=(4,3),\quad \vec{b}=(3,-4),\quad \vec{c}=(1,1),\quad \vec{d}=(5,5),\quad \vec{e}=(-4,-3),\quad \vec{f}=(6,0),\quad \vec{u}=(0,-3)\quad \text{y}\quad \vec{v}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$$

b) Calcular el valor de **m** para que el vector $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},m\right)$ sea unitario. Razonar gráficamente por qué se obtienen dos soluciones. $\left(\textit{Soluc: } m=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) Ídem para $\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},m\right)$ $\left(\textit{Soluc: } m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

17. a) Dado $\vec{u}=(4,-7)$, hallar los dos vectores unitarios que tienen la dirección de $\vec{u}$. Razonar gráficamente la situación.

b) Ídem para $\vec{u}=(\sqrt{2},-\sqrt{2})$

18. a) Para cada uno de los siguientes vectores, obtener uno unitario y con la misma dirección:

$$\vec{a}=(3,-4) \qquad \vec{b}=(1,1) \qquad \vec{c}=(12,5) \qquad \vec{d}=(6,-3)$$

b) Hallar el vector $\vec{v}$ de módulo 5 que sea paralelo al $\vec{a}=(36,-27)$

19. Dibujar los siguientes pares de puntos y hallar su distancia:

a) P(1,2) y Q(5,-1) **b)** P(6,3) y Q(-2,-3) **c)** P(2,1) y Q(2,5) **d)** A(-1,3) y B(5,3)
e) A(5,3) y el origen **f)** P(1,5) y Q(5,2) *(Soluc: a) 5; b) 10; c) 4; d) 6; e) $\sqrt{34}$; f) 5)*

Producto escalar. Ángulo de dos vectores:

20. a) Dados $\vec{u}=(5,0)$ y $\vec{v}=(2,2)$ se pide: **i)** Dibujarlos **ii)** Calcular su producto escalar de dos formas posibles, y comprobar que coincide el resultado.

b) Ídem con $\vec{u}=(1,1)$ y $\vec{v}=(-2,0)$

c) Ídem con $\vec{u}=(2,1)$ y $\vec{v}=(-2,4)$

21. Dados $\vec{a}=(-3,1)$, $\vec{b}=(2,3)$, $\vec{c}=(1,0)$ y $\vec{d}=(5,-2)$ calcular:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$

b) $\vec{b}\cdot\vec{a}$

c) $\vec{d}\cdot\vec{a}$

d) $\vec{b}\cdot\vec{c}$

e) $\vec{b}\cdot\vec{d}$

f) $\vec{c}\cdot\vec{d}$

g) $\vec{a}^{\,2}$

h) $2\left(\vec{d}\cdot\vec{c}\right)$

i) $\vec{a}\cdot\vec{c}$

j) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{d}$ de dos formas

k) $\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)\vec{a}$

l) $\vec{b}\left(\vec{d}\cdot\vec{a}\right)$

m) $\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{d}$ de dos formas

n) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$ de dos formas

o) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$ de dos formas

☞ *Ejercicio libro:* ***20 pág. 183***

(Sol: a) -3; b) -3; c) -17; d) 2; e) 4; f) 5; g) 10; h) 10; i) -3; j) -13; k) (-12,4); l) (-34, -51); m) 14; n) 17; o) -3)

22. Indicar, razonadamente, si el resultado de las siguientes operaciones es un escalar o un vector:

a) $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\left(\vec{c}\cdot\vec{d}\right)$ **b)** $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}\right)$ **c)** $\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{d}$ *(Soluc: escalar, en los tres casos)*

23. Un triángulo ABC es tal que $|\overrightarrow{AB}|=5$, $|\overrightarrow{BC}|=7$ y $\hat{B}=120^{\circ}$. Calcular $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ y su superficie.

$\left(Soluc: -\frac{35}{2};\ \frac{35\sqrt{3}}{4}u^2\right)$

24. Sea un triángulo equilátero ABC de lado 6. Hallar:

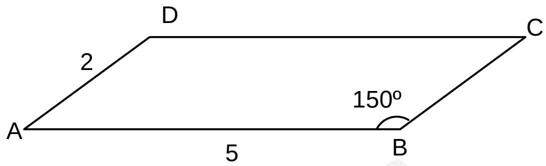
a) $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ **b)** $\vec{CA}\cdot\vec{CB}$ **c)** $\vec{BA}\cdot\vec{CB}$ **d)** $\vec{AB}\cdot\vec{CB}$ **e)** $\vec{AC}\cdot\vec{BA}$ **f)** $\vec{AA}\cdot\vec{AC}$

(Aviso: Para considerar el producto escalar gráficamente, previamente los dos vectores han de tener origen común, para lo cual en ciertos casos habrá que trasladar uno de ellos).

(Soluc: a) 18; b) 18; c) –18; d) 18; e) –18; f) 0)

25. En el paralelogramo de la figura, hallar $\vec{AB}\cdot\vec{AD}$ y $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$

(Soluc: $5\sqrt{3}$; 16,34)



26. Hallar **x** de modo que el producto escalar de los vectores $\vec{a}=(3,-5)$ y $\vec{b}=(x,2)$ sea igual a 8 *(Soluc: x=6)*

27. Hallar las componentes de un vector $\vec{u}$ cuyo módulo es $2\sqrt{17}$ y que es ortogonal al vector $\vec{v}=(4,1)$. Hacer un dibujo explicativo de la situación. *(Soluc: $\vec{u_1}=(2,-8)$ y $\vec{u_2}=(-2,8)$)*

28. Hallar las componentes de un vector cuyo producto escalar por sí mismo es 20 y cuyo producto escalar por el vector (3,2) es 2. *(Soluc: (38/13,–44/13) y (–2,4))*

* **29.** Resolver el problema 8 analíticamente, y comprobar que se obtiene el mismo resultado.

30. Calcular el ángulo formado por los siguientes pares de vectores, y dibujarlos:

a) $\vec{u}=(2,1)$ y $\vec{v}=(1,3)$ *(Soluc: 45º)*

b) $\vec{u}=(\sqrt{3},1)$ y $\vec{v}=(1,\sqrt{3})$ *(Soluc: 30º)*

c) $\vec{u}=(3\sqrt{2},\sqrt{6})$ y $\vec{v}=(-3\sqrt{2},\sqrt{6})$ *(Soluc:120º)*

d) $\vec{u}=(4,1)$ y $\vec{v}=(-2,8)$ *(Soluc: 90º)*

e) $\vec{u}=(-5,12)$ y $\vec{v}=(8,-6)$ *(Sol: ≅149º 29´)*

f) $\vec{u}=(2,1)$ y $\vec{v}=(-9,3)$ *(Soluc: 135º)*

g) $\vec{u}=(4,3)$ y $\vec{v}=(1,7)$ *(Soluc: 45º)*

☞ *Ejercicio libro:* ***24 pág. 183***

31. Dados los vectores $\vec{u}=(3,-4)$ y $\vec{v}=(5,6)$, calcular:

a) El ángulo que forman. *(Soluc: ≅103º19')*

b) Un vector en la dirección y sentido de $\vec{u}$ que sea unitario. *(Soluc: (3/5,–4/5))*

c) Un vector en la dirección y sentido de $\vec{u}$ de módulo 15. *(Soluc: (9,–12))*

d) ¿Son $\vec{u}$ y $\vec{v}$ ortogonales? En caso contrario, buscar un vector cualquiera ortogonal a $\vec{u}$

32. ¿Qué ángulo forman los vectores **unitarios** $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en los siguientes casos?:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ **b)** $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$ **d)** $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(Soluc: a) 0º; b) 30º; c) 120º; d) 45º)

33. Comprobar que los vectores $\vec{u}=(8,15)$ y $\vec{v}=(30,-16)$ constituyen una base ortogonal. Comprobar que los vectores $\vec{u}/|\vec{u}|$ y $\vec{v}/|\vec{v}|$ forman una base ortonormal.

Problemas con parámetros:

NOTA: *En los ejercicios 34 a 46 se recomienda hacer un dibujo previo de la situación*

34. Calcular **x** e **y** en $\vec{a}=(-x,4)$, $\vec{b}=(-1,5)$ y $\vec{c}=(3,y)$, si se sabe que $\vec{a}\perp\vec{b}$ y $\vec{c}\perp\vec{b}$. Comprobar el resultado gráficamente. *(Soluc: x=–20; y=3/5)*

35. Obtener tres vectores cualesquiera perpendiculares a (–1,–3), siendo al menos uno de ellos unitario. Explicar gráficamente el resultado.

36. Hallar el valor de **m** para que $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},m\right)$ y $\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ sean ortogonales. Interpretar el resultado gráficamente. *(Soluc:* $-\sqrt{2}/4$ *)*

37. Dados $\vec{x}=(2,-3)$ e $\vec{y}=(a,4)$ calcular **a** para que: **a)** $\vec{x}\,//\,\vec{y}$ **b)** $\vec{x}\perp\vec{y}$ *(Sol: a) a=-8/3; b) a=6)*

38. Hallar un vector $\vec{v}$ que tenga módulo 3 y que forme un ángulo de 90º con $\vec{a}=(3,4)$ (Aviso: puede haber dos soluciones) *(Soluc:* $\vec{v}_1=(12/5,-9/5)$ *y* $\vec{v}_2=-\vec{v}_1$*)*

39. Dados $\vec{u}=(3,1)$, $\vec{v}=(a,-1/2)$ y $\vec{w}=(-3,2)$, se pide:

a) Hallar **a** para que $\vec{v}$ sea unitario. Comprobar gráficamente el resultado. *(Sol:* $a=\pm\sqrt{3}/2$*)*

b) Hallar **a** para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean //. Justificar gráficamente la solución obtenida. *(Sol: a=–3/2)*

c) Hallar **a** para que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean ⊥. Justificar gráficamente la solución obtenida. *(Sol: a=–1/3)*

d) Hallar un vector ⊥ a $\vec{u}$ y unitario. *(Sol :* $\left(-1/\sqrt{10},3/\sqrt{10}\right)$ *o su opuesto)*

e) Hallar el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{w}$ *(Sol: ≅ 127º 52' 30'')*

40. a) Calcular las componentes de un vector $\vec{u}$ de módulo 2 y tal que $\widehat{\vec{i}\cdot\vec{u}}=30º$ (Aviso: puede haber dos soluciones) *(Soluc :* $\vec{u}_1=(\sqrt{3},1)$ *y* $\vec{u}_2=(\sqrt{3},-1)$*)*

b) Ídem con $|\vec{u}|=3\sqrt{2}$ y $\widehat{\vec{i}\cdot\vec{u}}=45º$ *(Soluc :* $\vec{u}_1=(3,3)$ *y* $\vec{u}_2=(3,-3)$*)*

41. Calcular **a** con la condición de que $\vec{u}=(a,1)$ forme 60º con $\vec{v}=(1,1)$ (Aviso: puede haber dos soluciones, por lo que se recomienda hacer un dibujo) *(Soluc :* $\sqrt{3}-2$*)*

42. Hallar el valor de **x** para que el vector (x,1) forme 45º con el vector (1,2) (Aviso: puede haber dos soluciones) *(Soluc:* x_1*=3 y* x_2*=–1/3)*

43. Dados los vectores $\vec{u}=(2,-1)$ y $\vec{v}=(a,3)$, calcular **a** de modo que:

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales *(Soluc: a=3/2)*

b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ formen 60º *(Soluc :* $a=\frac{24+15\sqrt{3}}{11}$*)*

c) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan la misma dirección *(Soluc: a=-6)*

44. Dados los vectores $\vec{a}=(1,-1)$ y $\vec{b}=(2,m)$, hallar **m** de forma que:

a) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean ortogonales. *(Soluc: m=2)*

b) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tengan la misma dirección. *(Soluc: m=–2)*

c) $\vec{b}$ sea unitario. *(Soluc: ∄ soluc.)*

d) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ formen 45º *(Soluc: m=0)*

45. Dados $\vec{a}=(3,-4)$ y $\vec{b}=(5,x)$, hallar **x** para que:

a) ambos vectores sean perpendiculares *(Soluc: x=15/4)*

b) ambos vectores formen 30º *(Soluc: $x_1\cong-2,1$; $x_2\cong-41,50$)*

c) tengan la misma dirección *(Soluc: x=−20/3)*

46. Dados $\vec{u}=(2,1)$ y $\vec{v}=(a,-3)$, se pide:

a) Hallar **a** para que sean //. Justificar gráficamente la solución obtenida. *(Soluc: a=-6)*

b) Hallar **a** para que sean ⊥. Justificar gráficamente la solución obtenida. *(Soluc: a=3/2)*

c) Hallar **a** para que formen 45º. Justificar gráficamente la solución obtenida. *(Soluc: a=9)*

d) Hallar un vector ⊥ a $\vec{u}$ de módulo 5 *(Soluc: $\left(-\sqrt{5},2\sqrt{5}\right)$ o su opuesto)*

47. Dados $\vec{u}=(3,-4)$ y $\vec{v}=(a,2)$, se pide:

a) Hallar **a** tal que $\vec{u}\cdot\vec{v}=4$ *(Soluc: a=4)*

b) ¿Qué ángulo formarán $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en el caso anterior? *(Soluc: ≅ 79º 41' 43'')*

c) Hallar **a** tal que $\vec{u}\ //\ \vec{v}$. Explicar gráficamente la situación. *(Soluc: a=−3/2)*

d) Hallar un vector ⊥ a $\vec{u}$ y de módulo 10. Explicar gráficamente la situación. *(Soluc: (8,6), o su opuesto)*

Área de un triángulo:

48. Hallar los ángulos del triángulo de vértices A(−2,2), B(5,3) y C(2,15). Hallar también su área.
(Soluc: A≅64º 46'; B≅84º 6'; C≅31º 8'; S_{ABC}=43,5 u^2)

49. Dado el triángulo de vértices A(1,1), B(5,4) y C(−5,9), se pide:

a) Dibujarlo.

b) Demostrar que es rectángulo en A *(Soluc: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$)*

c) Hallar su área. *(Soluc: S_{ABC}=25 u^2)*

50. **a)** Dibujar el triángulo de vértices A(1,−2), B(3,−1) y C(2,1) y hallar su área. *(Soluc: S_{ABC}=2,5 u^2)*

b) Ídem con A(3,8), B(−11,3) y C(−8,−2) *(Soluc: S_{ABC}=42,5 u^2)*

c) Ídem con A(4,−1), B(2,1) y C(0,2) *(Soluc: S_{ABC}=1 u^2)*

51. **TEORÍA:** **a)** Dado el vector $\vec{u}=(3,-4)$, hallar razonadamente otro vector con la misma dirección pero de módulo 2. Hacer un dibujo explicativo.

b) Dados $\vec{a}=(-1,2)$, $\vec{b}=(2,-3)$ y $\vec{c}=\left(\frac{1}{2},4\right)$, hallar $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$

c) ¿Son ortonormales $\vec{a}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\vec{b}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$? ¿Y ortogonales?

d) ¿Qué indica el signo del producto escalar? Indicar ejemplos.

e) Demostrar que el vector $\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}-\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}$ es perpendicular al vector $\vec{c}$

RECTAS

Forma paramétrica:

1. Dado el punto A(5,3) y el vector director $\vec{u}_r=(1,-2)$ se pide:

a) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta r que determinan.

b) Obtener otros tres puntos cualesquiera de dicha recta.

c) Comprobar analíticamente si los puntos P(2,−1) y Q(3,7) $\in$ r

d) Dibujar dicha recta y comprobar gráficamente los apartados anteriores.

2. Dados los puntos A(1,3) y B(−1,6), se pide:

a) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta r que determinan.

b) Obtener otros tres puntos cualesquiera de dicha recta.

c) Comprobar analíticamente si los puntos P(7,−6) y Q(2,2) $\in$ r

d) Dibujar dicha recta y comprobar gráficamente los apartados anteriores.

Forma continua y general:

3. Con los datos del ejercicio 1, se pide:

a) Hallar las ecuaciones continua y general o implícita de la recta r que determinan. *(Soluc: 2x+y−13=0)*

b) Comprobar en la ecuación general que $\vec{u}_r=(-B,A)$

c) A partir de la ecuación general, obtener otros tres puntos cualesquiera de dicha recta.

d) Comprobar en ambas ecuaciones si los puntos P(2,1) y Q(3,7) $\in$ r

4. Ídem con los datos del ejercicio 2 *(Soluc: 3x+2y-9=0)*

5. Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de los ejes de coordenadas.

Forma punto-pendiente:

6. Hallar la forma punto-pendiente de las dos rectas de los ejercicios 1 y 2

a) Directamente, a partir de los datos.

b) A partir de su forma continua.

Forma explícita:

7. Hallar la forma explícita de las dos rectas de los ejercicios 1 y 2

a) Directamente, a partir de los datos.

b) A partir de las formas anteriores.

(Soluc: y=−2x+13 e y=−3x/2+9/2)

Todas las formas:

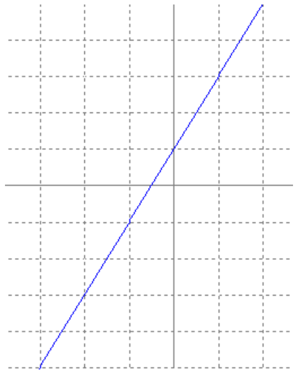
8. a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(3,5) y tiene la dirección del vector $\vec{u}=(2,-4)$ en todas las formas posibles. Dibujarla. *(Soluc: 2x+y-11=0)*

b) Ídem para el punto A(3,1) y $\vec{u}=(4,-2)$ *(Soluc: x+2y-5=0)*

c) Ídem para A(3,1) y $\vec{u}=(0,2)$ *(Soluc: x=3)*

d) Ídem para A(3,−1) y $\vec{u}=(5,0)$ *(Soluc: y=−1)*

9. Dada la recta de la figura, hallar su ecuación:



a) Directamente, en forma continua.
b) En forma general, operando a partir de la anterior.
c) Directamente, en forma punto-pendiente.
d) Directamente, en forma explícita.

10. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(3,2) y B(1,−4) en todas las formas posibles. Dibujarla. *(Soluc: 3x−y−7=0)*

11. Representar las siguientes rectas:

a) 2x+3y-7=0 **b)** x=3 **c)** y=2 **d)** $\left.\begin{array}{l} x=3-\lambda \\ y=-5+2\lambda \end{array}\right\}$ **e)** $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}$

12. Pasar a forma explícita las siguientes rectas y calcular sus pendientes:

a) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+5}{-1}$ **b)** 5x+3y+6=0 **c)** $\left.\begin{array}{l} x=2+t \\ y=5-3t \end{array}\right\}$ $\left(\textit{Soluc}: y=-\frac{x}{2}-\frac{7}{2}; y=-\frac{5}{3}x-2; y=-3x+11\right)$

13. Determinar si el punto P(2,−1) pertenece a la recta 3x−2y+5=0. ¿Y el punto (1,4)? *(Soluc: NO; SÍ)*

14. Dada la recta ax+5y+4=0, determinar **a** para que la recta pase por el punto (2,−2) *(Soluc: a=3)*

15. **a)** Determinar, analíticamente, si los puntos A(3,1), B(5,2) y C(1,0) están alineados.

b) Ídem para A(1,1), B(3,4) y C(4,6) (Nota: un dibujo puede ser útil)

c) Hallar k para que los puntos A(1,7), B(−3,4) y C(k,5) estén alineados. *(Soluc: SÍ; NO; k=−5/3)*

16. Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto A(−2,1/3) y tiene igual pendiente que la recta que pasa por P(2,1) y Q(3,4) $\left(\textit{Soluc}: y-\frac{1}{3}=3(x+2)\right)$

17. Dada la recta que pasa por A(1,0) y B(3,4) se pide:

a) Hallar su forma paramétrica, continua, implícita, punto-pendiente y explícita. *(Soluc: 2x−y−2=0)*

b) ¿Cuál es su pendiente? *(Soluc: m=2)*

c) ¿El punto (2,2) pertenece a dicha recta? *(Soluc: (2,2)$\in$ r)*

18. Ídem para la recta que pasa por A(−2,1) y B(4,5). ¿El punto (1,3) es de dicha recta?

19. Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2,1) y forma un ángulo de 120º con la parte positiva del eje x. $\left(\textit{Soluc}: y-1=-\sqrt{3}(x-2)\right)$

20. ¿Qué ángulo forma la recta $x+y+5=0$ con OX^+? *(Soluc: 135º)*

21. Dada la recta 5x–3y+7=0, hallar la longitud de los segmentos que determina sobre los ejes. Hacer el dibujo. *(Soluc: 7/5 u sobre OX^-; 7/3 u sobre OX^+)*

22. Hallar el área limitada por la recta 5x+y–5=0, el eje de abscisas y el eje de ordenadas. Hacer el dibujo. *(Soluc: 5/2 u^2)*

23. Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto P(3,1) y forma 45º con el eje OX^+ *(Soluc: y=x–2)*

24. a) ¿Qué ángulo forma la recta 3x–2y+6=0 con el eje de abscisas? *(Soluc: ≅56º 18' 36'')*

b) ¿Qué ángulo forma la recta 2x–y+5=0 con el eje de ordenadas? *(Soluc: ≅26º 33' 54'')*

c) Calcular **n** de modo que la recta 3x+ny–2=0 forme un ángulo de 60º con OX^+ *(Soluc: n=–√3)*

25. Resolver gráficamente –es decir, hallar gráficamente el posible punto de corte de cada pareja de rectas– los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\left.\begin{array}{l}2x+3y=11\\3x-2y=-3\end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{l}2x+3y=11\\6x+9y=33\end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{l}2x+3y=11\\6x+9y=3\end{array}\right\}$ *(Soluc: (1,3); ∞ soluc; ∄ soluc)*

26. a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de corte de las rectas 2x+3y–4=0 y x–y=0 y por A(2,1) *(Soluc: x–6y+4=0)*

b) Ídem para las rectas 3x+y–11=0 y x+2y–7=0 y el punto A(–1,2) *(Soluc: y=2)*

27. La recta y+2=m(x+3) pasa por el punto de intersección de las rectas 2x+3y+5=0 y 5x–2y–16=0. Calcular **m** *(Soluc: m=–1/5)*

Posición relativa de 2 rectas:

28. Dadas las rectas:

r: 2x+3y–4=0	u: 4x+6y–8=0
s: x–2y+1=0	v: 2x–4y–6=0
t: 3x–2y–9=0	w: 2x+3y+9=0

¿Cuáles son coincidentes? ¿Cuáles son paralelas? *(Soluc: r=u; s//v; r//w)*

29. Ídem para las rectas

r: y=5x–3	u: y=3x–2
s: y=–x+2	v: y=2x+13
t: y=2x–1	w: y=–x–3

(Soluc: t//v; s//w)

Comprobar el resultado dibujándolas.

30. Comprobar, por dos métodos, si las siguientes rectas son paralelas, secantes o coincidentes; en este último supuesto, hallar el punto de corte:

a) $\left.\begin{array}{l}3x+2y-5=0\\3x+2y+7=0\end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{l}x+3y-4=0\\x+2y-5=0\end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r}x+y-3=0\\2x+2y-6=0\end{array}\right\}$

(Soluc: a) paralelas; b) secantes; c) coincidentes)

31. Determinar **m** y **p** para que las rectas mx+3y+5=0 y 2x+6y–p=0 sean coincidentes. *(Soluc: m=1; p=–10)*

32. a) Dadas las rectas $3x-4y+1=0$, $mx+8y-14=0$ calcular **m** para que sean paralelas. ¿Pueden ser coincidentes? *(Soluc: m=−6)*

b) Ídem para las rectas $4x-3y+1=0$, $mx+6y+4=0$ *(Soluc: m=−8)*

33. La recta $3x+ny-7=0$ pasa por el punto A(2,3) y es paralela a la recta $mx+2y=13$. Calcular **m** y **n**
(Soluc: m=18; n=1/3)

34. Dada la recta **r** determinada por A(2,1) y $\vec{u}=(a,4)$, y la recta **s** determinada por B(−1,4) y $\vec{v}=(5,3)$

a) Hallar **a** para que r y s sean paralelas *(Soluc: a=20/3)*

b) ¿Para qué valores de **a** son secantes? *(Soluc: a≠20/3)*

c) ¿Pueden ser coincidentes? *(soluc: NO)*

Recta // a una dada:

35. a) Calcular la ecuación de la recta paralela a $3x+2y-4=0$ que pasa por el punto A(2,3) *(Soluc: 3x+2y−12=0)*

b) Ídem para $y=2x+3$ *(Soluc: y=2x−1)*

36. Hallar la ecuación de la recta que pasa por (2,3) y es:
(Hacer un dibujo explicativo previo en los cuatro primeros apartados)

a) Paralela al eje x *(Soluc: y=3)*

b) Paralela al eje y *(Soluc: x=2)*

c) Paralela a la bisectriz del 1^er^ cuadrante. *(Soluc: y=x+1)*

d) Ídem del 2º cuadrante. *(Soluc: y=−x+5)*

e) Paralela a $5x+2y=0$ *(Soluc: 5x+2y−16=0)*

37. Hallar la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta determinada por A(1,1) y B(−3,6)
(Soluc: $y=-\frac{5}{4}x$*)*

38. Dadas las rectas r: $x-2y+7=0$
s: $2x+y+4=0$

y el punto P(5,1), hallar las ecuaciones de los otros dos lados del paralelogramo formado por r, s y P.

(Soluc: x−2y−3=0 y 2x+y−11=0)

39. **TEORÍA**: Responder, razonadamente, a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cómo son los vectores directores de dos rectas paralelas?

b) Si se sabe que el vector director de una recta es (2,5), ¿podemos conocer su pendiente?

c) Y si sabemos que la pendiente es 3, ¿podemos obtener un vector director?

d) ¿Cuántos vectores directores puede tener una recta?

e) Si una recta tiene por vector director (4,2) y otra tiene el (−2,−1), ¿pueden ser la misma?

f) Razonar que si una recta tiene la forma $Ax+By+k=0$, entonces cualquier recta ⊥ a ella sería de la forma $Bx-Ay+k'=0$

g) ¿Por qué toda recta que pasa por el origen carece de término independiente en su forma general?

Puntos y rectas notables de un triángulo:

Recta ⊥ a una dada:

40. En cada apartado, hallar la recta ⊥ a la dada, por el punto que se indica (hacer un dibujo aproximado explicativo):

a) x−2y+3=0; P(3,−1) *(Soluc: 2x+y−5=0)*

b) 3x+2y+1=0; P(1,−1) *(Soluc: 2x−3y−5=0)*

c) $\left.\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=2-3\lambda \end{array}\right\}$; P(1,3) *(Soluc: x−3y+8=0)*

d) y−4=2(x−1); P(1,1) *(Soluc: x+2y−3=0)*

e) y=2x−5; P(−2,3) *(Soluc: x+2y−4=0)*

f) y−3=2(x+1); 0(0,0) *(Soluc: x+2y=0)*

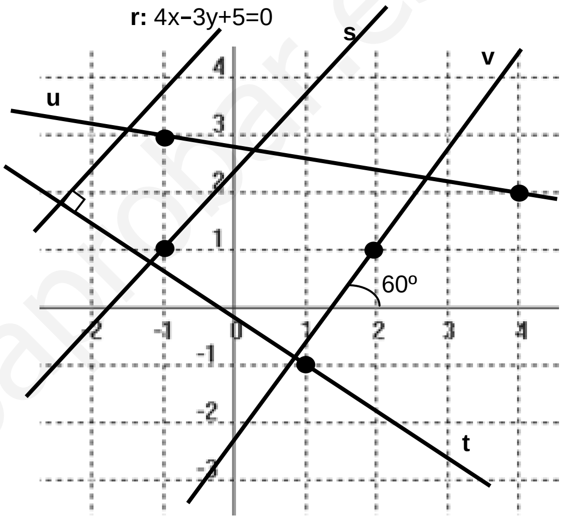
g) x+2y−17=0; P(3,7)

41. En la figura, s//r y t⊥r. Hallar:

a) La ecuación general de las rectas s, t y u

(Soluc: s: 4x−3y+7=0; t: 3x+4y+1=0; u: x+5y−14=0)

b) La ecuación punto-pendiente de v *(Soluc: y−1=√3(x-2))*



42. Hallar el pie de la perpendicular trazada desde P(1,−2) a la recta r: x−2y+4=0 *(Soluc: P´(−4/5,8/5))*

Mediatriz:

43. a) Hallar las coordenadas del punto medio del segmento determinado por A(−2,1) y B(6,5). Dibujar la situación. *(Sol: M (2,3))*

b) El punto M(5,−2) es el punto medio del segmento AB, y conocemos A(2,3). Hacer un dibujo explicativo y hallar B. *(Sol: B(8,−7))*

c) Hallar el punto simétrico de P(1,−2) respecto del punto Q(3,0). Hacer un dibujo explicativo. *(Sol: P´(5,2))*

44. Hallar la ecuación de la recta ⊥ al segmento de extremos A(5,6) y B(1,8) en su punto medio. ¿Cómo se llama dicha recta? Hacer un dibujo explicativo. *(Soluc: 2x−y+1=0; mediatriz)*

45. La recta 3x−2y−6=0 corta a los ejes en dos puntos A y B. Calcularlos y hallar la mediatriz de $\overline{AB}$.

(Soluc: 4x+6y+5=0)

46. Dada la recta x+2y+1=0 hallar el punto simétrico de P(2,−3) respecto a dicha recta. *[Soluc: P'(16/5,−3/5)]*

47. Sabiendo que la recta 2x−y+1=0 es mediatriz de $\overline{AB}$ y A(2,−3), calcular B. ¿Cómo podríamos comprobar que el resultado es correcto? *[Soluc: B(−22/5,1/5)]*

Bisectriz:

48. Dado el triángulo de vértices A(2,1), B(5,−3) y C(7,13), hallar razonadamente, mediante cálculo vectorial, la ecuación de la bisectriz correspondiente al vértice A. (Ayuda: Dado un punto genérico X(x,y)∈bisectriz, plantear que $\widehat{\vec{AB}\,\vec{AX}} = \widehat{\vec{AC}\,\vec{AX}}$) *(Soluc: x−8y+6=0)*

NOTA: Cuando se aborde más adelante el cálculo de la distancia punto-recta, se verá otro método mucho mejor para hallar la bisectriz.

Mediana, altura, etc:

49. Dado el triángulo de vértices A(1,1), B(5,3) y C(3,7) se pide:

a) Mediante la fórmula correspondiente, hallar las coordenadas del baricentro o centro de gravedad (Por curiosidad, se recomienda obtener la ecuación de dos medianas cualesquiera y comprobar que se cortan en dicho punto)

b) Ecuaciones de dos alturas cualesquiera, y coordenadas del ortocentro.

c) Ecuaciones de dos mediatrices cualesquiera, y coordenadas del circuncentro.

d) Calcular la ecuación de la recta de Euler.

e) Comprobar que el ortocentro dista el doble del centro de gravedad que el circuncentro.

*(Soluc: **a)** AB: x=3; BC: 4x−3y−1=0; G(3,11/3) **b)** AB: 2x+y−13=0; BC: x−2y+1=0; AC: x+3y−14=0; O(5,3) **c)** AB: 2x+y−8=0; BC: x−2y+6=0; AC: x+3y−14=0; C(2,4) **d)** x+3y−14=0)*

50. Dibujar en unos ejes cartesianos el triángulo de vértices A(2,0), B(0,1) y C(−3,−2), y hallar:

a) La ecuación de la mediana correspondiente al lado AC. *(Soluc: 4x−y+1=0)*

b) La ecuación de la altura correspondiente al lado AC. *(Soluc: 5x+2y−2=0)*

c) La ecuación de las mediatrices correspondientes a AB y AC. *(Soluc: 4x−2y−3=0; 10x+4y+9=0)*

d) ¿Cómo se llama el punto donde se cortan las anteriores? Obtenerlo *(Sol: Circuncentro(−1/6,−11/6)*

51. Dibujar el triángulo de vértices A(3,1), B(0,2) y C(1,−2), y hallar:

a) La ecuación de la mediana correspondiente al lado AC *(Soluc: 5x+4y−8=0)*

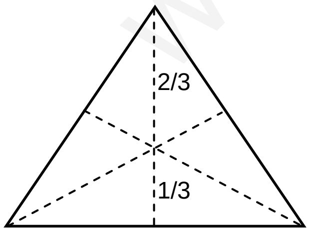
b) Las ecuaciones de las alturas correspondientes a los lados AC y BC *(Sol: 2x+3y−6=0; x−4y+1=0)*

c) ¿Cómo se llama el punto donde se cortan las alturas? Obtenerlo. *(Soluc: Ortocentro (21/11,8/11)*

d) La ecuación de la mediatriz correspondiente al lado AC *(Soluc: 4x+6y−5=0)*

* **52.** Los puntos B(−1,3) y C(3,−3) determinan el lado desigual de un triángulo isósceles ABC. El punto A está en la recta x+2y−15=0. Calcular A

53. Hallar las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices A(1,6), B(−5,8) y C(−3,−4)
(Soluc: 4x−5y+26=0; 7x+4y+3=0; 11x−y+29=0)



54. Demostrar que en un triángulo equilátero el baricentro está situado a una distancia de la base que es siempre 1/3 de la altura (ver figura).

55. Los vértices de un triángulo son A(7,5), B(−8,3) y C(4,−5)

a) Hallar las medianas AB y AC y el baricentro.

b) Ídem para alturas y ortocentro.

c) Ídem para mediatrices y circuncentro.

d) Trazar sobre papel milimetrado las tres medianas, alturas y mediatrices, y las circunferencias circunscrita e inscrita, y comprobar que el baricentro, ortocentro y circuncentro están alineados (Utilizar escala 1 u=1 cm).

Ángulo de dos rectas:

56. Calcular el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

a) 2x–3y+4=0 5x–2y–3=0 *(Soluc: ≅ 34º 31')*

b) 2x+3y–5=0 x–y+7=0 *(Soluc: ≅ 78º 41')*

c) x–2y+4=0 3x–y–1=0 *(Soluc: 45º)*

d) y=2x–3 y=–2x+1 *(Soluc: ≅ 53º 8')*

e) y=3x–5 y=3x+2 *(Soluc: 0º)*

f) –x+2y+1=0 3x+y+5=0 *(Soluc: ≅ 81º 52')*

g) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}$ $\frac{x}{12}=\frac{y-3}{5}$ *(Soluc: ≅ 30º 31')*

h) –x+2y+5=0 2x–3y+4=0 *(Soluc: ≅ 7º 8')*

i) 3x–4y+2=0 3x–4y+7=0 *(Soluc: 0º)*

j) $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}$ –2x+3y–5=0 *(Soluc: ≅ 22º 37')*

k) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{4}$ 3x+4y=0 *(Soluc: 90º)*

l) 3x+4y–12=0 5x–12y+8=0 *(Soluc: ≅ 59º 30')*

m) $\left.\begin{array}{l} x=3+t \\ y=5-2t \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=-3+4\lambda \\ y=-1+3\lambda \end{array}\right\}$ *(Soluc: ≅ 79º 42')*

n) y=7x+54 3x–4y+128=0 *(Soluc: 45º)*

57. Razonar, sin cálculo previo, cuáles de los siguientes pares de rectas son perpendiculares:

a) 2x+3y–4=0 4x+6y–8=0

b) 2x+3y–4=0 6x–4y+5=0

c) 3x–2y+7=0 4x+6y–3=0

d) x+y–8=0 2x+3y+6=0 *(Soluc: NO; Sí; Sí; NO)*

58. ¿Es perpendicular la recta 2x+3y+4=0 con otra que tenga de pendiente 3/2? *(Soluc: Sí)*

59. Determinar el parámetro **m** con la condición de que las rectas 2x–4y+12=0 sean perpendiculares.
(Soluc: m=16) mx+8y–15=0

60. Determinar el valor de **a** para que las rectas ax+(a–1)y–2(a+2)=0 sean: **a)** Paralelas.
(Soluc: a=0 o a=1/3; a=–1/2) 3ax–(3a+1)y–(5a+4)=0 **b)** Perpendiculares.

61. Dadas las rectas r: x+2y–3=0 se pide:
s: x–ky+4=0

a) Hallar **k** para que sean // *(Soluc: k=–2)*

b) Hallar **k** para que sean ⊥ *(Soluc: k=1/2)*

c) Hallar la ecuación general de la recta ⊥ a r que pasa por el origen. *(Soluc: 2x–y=0)*

62. Calcular los coeficientes **m** y **n** de las rectas mx–2y+5=0
nx+6y–8=0
sabiendo que son perpendiculares y que la primera pasa por el punto (1,4) *(Soluc: m=3; n=4)*

63. Dada la recta de ecuación ax+by=1, determinar **a** y **b** sabiendo que la recta dada es perpendicular a la recta 2x+4y=11 y que pasa por el punto (1,3/2) *(Soluc: a=4; b=–2)*

64. Hallar el valor de **a** para que las rectas $\left.\begin{array}{l} x=2-\lambda \\ y=\ \ \ 2\lambda \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x=1+2\lambda \\ y=2+a\lambda \end{array}\right\}$ formen 45º

(Aviso: puede haber dos soluciones) *(Soluc: a_1=6, a_2=–2/3)*

65. Sean las rectas r: 3x+my+12=0
s: 2x+y+n=0

Determinar **m** y **n** sabiendo que forman un ángulo de 60º y que la recta **s** pasa por el punto (3,–5) (Advertencia: puede haber dos soluciones) *(Sol: $m_1=24+15\sqrt{3}$ y n_1=–1; $m_2=24-15\sqrt{3}$ y n_2=–1)*

66. a) Determinar la ecuación de la recta que pasando por A(5,–2) forme 45º con la que tiene por ecuación 3x+7y–12=0 (Advertencia: puede haber dos soluciones) $\left(\text{Soluc: } y+2=\frac{2}{5}(x-5);\ y+2=-\frac{5}{2}(x-5)\right)$

b) ¿Cómo son las pendientes de las dos soluciones? ¿Por qué?

67. Hallar la ecuación de la recta que, pasando por P(2,–3), forma un ángulo de 45º con la recta 3x–4y+7=0 (Advertencia: puede haber dos soluciones) $\left(\text{Soluc: } y+3=-\frac{1}{7}(x-2);\ y+3=7(x-2)\right)$

68. Hallar las ecuaciones de las dos rectas que pasan por el punto (–3,0) y forman con la recta de ecuación 3x–5y+9=0 un ángulo cuya tangente vale 1/3 $\left(\text{Soluc: } y=\frac{2}{9}(x+3);\ y=\frac{7}{6}(x+3)\right)$

69. Dadas las rectas r: 2x+y–4=0 hallar **a** para que: **a)** Sean // *(Soluc: a=–4)*

s: ax–2y+5=0 **b)** Sean ⊥ *(Soluc: a=1)*

c) Formen 60º $\left(\text{Soluc: } a=\frac{16\pm 10\sqrt{3}}{11}\right)$

Distancia punto-recta:

70. a) Calcular la distancia del punto P(1,2) a la recta 3x–4y+1=0 *(Soluc: 4/5)*

b) "" "" "" P(2,–1) a la recta 3x+4y=0 *(Soluc: 2/5)*

c) "" "" del origen a la recta $\left.\begin{array}{l} x=1+2\lambda \\ y=-2-\lambda \end{array}\right\}$ *(Soluc:* $3/\sqrt{5}$ *)*

d) "" "" "" a la recta y=4 *(Soluc: 4)*

e) "" "" del punto P(1,–3) a la recta $\frac{x-1}{2}=y+5$ *(Soluc:* $4/\sqrt{5}$ *)*

f) "" "" "" P(2,4) a la recta y=–2x+3 *(Soluc:* $\sqrt{5}$ *)*

g) "" "" "" P(–1,7) a la recta y–3=2(x+3) *(Soluc: 0)*

☞ *Ejercicios libro:* ***1 pág. 201; 39 y 40 pág. 208***

71. Hallar la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por los puntos A(–2,1) y B(3,–2) *(Soluc:* $1/\sqrt{34}$ *)*

72. Hallar la distancia del punto (–1,1) a la recta que corta a los ejes OX^+ y OY^+ a las distancias 3 y 4 del origen. *(Soluc: 13/5)*

73. Hallar la longitud del segmento que determina la recta x–2y+5=0 al cortar a los ejes de coordenadas. *(Soluc:* $5\sqrt{5}/2$ *)*

74. Hallar la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasando por el punto A(0,2) tiene de pendiente –1 *(Soluc:* $\sqrt{2}$ *)*

75. Determinar c para que la distancia de la recta x–3y+c=0 al punto (6,2) sea de $\sqrt{10}$ unidades. (Aviso: puede haber dos soluciones). Hacer un dibujo explicativo de la situación. *(Soluc: c=±10)*

76. Calcular el valor de a para que la distancia del punto P(1,2) a la recta ax+2y–2=0 sea igual a $\sqrt{2}$ (Aviso: puede haber dos soluciones). Hacer un dibujo explicativo. *(Soluc: a=2)*

77. Calcular las ecuaciones de las dos rectas que pasando por el punto A(1,–2) disten 2 unidades del punto B(3,1). Se recomienda hacer un dibujo previo. *(Soluc:* $y+2=\frac{5}{12}(x-1);\ x=1$ *)*

78. Hallar la ecuación de las dos rectas paralelas de pendiente 3/4 que distan 2 unidades del punto (2,3). (Ayuda: se recomienda hacerlo en forma explícita). Hacer un dibujo de la situación.

(Sol : $y=\frac{3}{4}x+4;\ y=\frac{3}{4}x-1$ *)*

Distancia entre dos rectas:

79. **a)** Hallar la distancia entre las rectas 2x+3y–6=0 y 2x+3y+7=0 *(Soluc:* $\sqrt{13}$ *)*

b) "" "" "" "" $\left.\begin{array}{l} x=2-3\lambda \\ y=1+\lambda \end{array}\right\}$ y $\frac{x+3}{-3}=\frac{y+5}{1}$ *(Soluc:* $23/\sqrt{10}$ *)*

c) "" "" "" "" 3x–4y+16=0 y 2x–5y+2=0 *(Soluc: 0)*

d) "" "" "" "" 3x–4y+16=0 e $y=\frac{3}{4}x-1$ *(Soluc: 4)*

80. Dada la recta 3x–4y+19=0 , se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta paralela a la anterior que pasa por P(5,6), en todas las formas conocidas. *(Soluc: 3x–4y+9=0)*

b) Hallar la distancia entre las dos rectas anteriores. *(Soluc: 2 u)*

c) Hallar el ángulo que dichas rectas forman con la recta 7x–y+3=0 *(Soluc: 45º)*

81. a) Hallar, en todas las formas conocidas, la ecuación de la recta **s** que tiene la misma pendiente que **r**: y=3x–1 y pasa por P(–1,2) *(Soluc: 3x–y+5=0)*

b) Hallar la distancia entre las dos rectas **r** y **s** anteriores. *(Soluc:* $3\sqrt{10}/5\ u$ *)*

c) Hallar el ángulo que forma **r** con la recta **t**: x–2y+4=0 *(Soluc: 45º)*

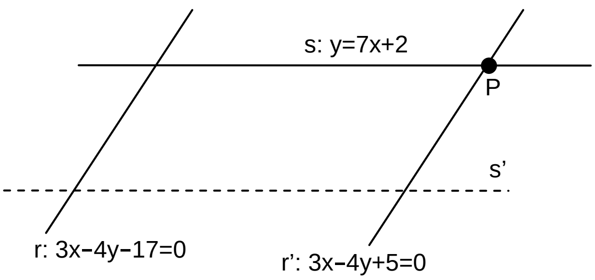
82. Dados los siguientes pares de rectas, hallar **m** para que sean paralelas y calcular su distancia:

a) 3x–4y+1=0 *(Soluc: m=–6; d=6/5)*
mx+8y–14=0

b) mx+y=12 *(Soluc: m=–4/3; d=107/15)*
4x–3y=m+1

c) 4x–3y+1=0 *(Soluc: m=–8; d=3/5)*
mx+6y+4=0

83. Calcular c para que la distancia entre las rectas 4x+3y–6=0 y 4x+3y+c=0 sea igual a 3 *(Soluc:* $c_1=9,\ c_2=-21$*)*



84. Dadas las rectas de la figura adjunta (el dibujo es aproximado), se pide:

a) Razonar que r y s son secantes, y r // r'

b) Hallar P=r'∪s

c) Hallar la ecuación general de s'

d) Hallar el ángulo entre r y s

e) Hallar d(s,s')

85. Dada la recta r: $x+y-3=0$ y el punto P(−1,2), se pide:

a) Hallar, en todas las formas conocidas, la ecuación de la recta ⊥ a r que pasa por P *(Soluc: $x-y+3=0$)*

b) Hallar el punto M de corte de la recta anterior y r *(Soluc: (0,3))*

c) Hallar el punto simétrico de P respecto de r. Hacer un dibujo aproximado explicativo. *(Soluc: (1,4))*

86. Con los mismos datos del ejercicio anterior, se pide:

a) Hallar la ecuación general de la recta // a r que pasa por P *(Soluc: $x+y-1=0$)*

b) Hallar la distancia entre la recta anterior y r. Hacer un dibujo aproximado explicativo. *(Soluc: $\sqrt{2}$ u)*

c) Hallar la posición relativa de **r** y la recta **s**: $2x-y+5=0$ *(Soluc: Secantes)*

d) Hallar el ángulo entre **r** y **s** *(Soluc: 71º 33' 54")*

Bisectriz:

*** 87. a)** Hallar las dos bisectrices del ángulo formado por **r:** $4x+3y-5=0$ y **s:** $3x+4y-2=0$. Comprobar que se trata de dos rectas perpendiculares que se cortan en el mismo punto que r y s.
(Soluc: $x-y-3=0$; $x+y-1=0$)

b) Ídem con **r:** $4x-3y+8=0$ y **s:** $12x+5y-7=0$ *(Soluc: $8x+64y-139=0$; $112x-14y+69=0$)*

88. Volver a hacer el ejercicio 48, pero aplicando la fórmula de la distancia punto-recta.

Área del triángulo:

89. a) Calcular el área del triángulo de vértices A(1,2), B(−1,4) y C(2,0) *(Sol: 1 u^2)*

b) " " " " " " A(2,−1), B(−5,1) y C(0,3) *(Sol: 12 u^2)*

c) " " " " " " A(-3,-2), B(9,7) y C(2,8) *(Sol: 37,5 u^2)*

90. a) Hallar el área del triángulo definido por las rectas r: $x=3$, s: $2x+3y-6=0$, t: $x-y-7=0$ *(Sol: 24/5 u^2)*

d) Hallar el área del triángulo definido por las rectas r: $y=5$, s: $2x-y-3=0$, t: $x+y-3=0$ *(Sol: 12 u^2)*

91. Hallar el área del cuadrilátero de vértices A(−4,3), B(0,5), C(4,−2) y D(−3,−2) *(Soluc: 71/2 u^2)*

92. Determinar el área del paralelogramo OABC y las ecuaciones de los lados AB y BC sabiendo que OA es la recta de ecuación $x-2y=0$, OC tiene de ecuación $3x+y=0$ y las coordenadas de B son (3,5)
(Soluc: AB: $3x+y-14=0$; BC: $x-2y+7=0$; 98/5 u^2)

Problemas varios:

93. TEORÍA: a) Si la distancia entre dos rectas es cero, ¿podemos afirmar que son secantes?

b) Sean $r(A,\vec{u})$ y $s(B,\vec{u})$ dos rectas paralelas (por tener el mismo vector director). ¿Es cierto que d(r,s)=d(A,B)?

c) ¿Cómo son las pendientes de dos rectas perpendiculares? ¿Y si las rectas son paralelas?

d) A simple vista, sin necesidad de transformarlas, ¿podemos concluir que

$$r: \left.\begin{matrix} x=2+\lambda \\ y=1+2\lambda \end{matrix}\right\} \quad y \quad s: \; y-1=\frac{1}{2}(x-2)$$

no son la misma recta? Razonar la respuesta.

94. TEORÍA: Estudiar si los siguientes pares de rectas son la misma recta:

a) $\left.\begin{matrix} x=2+\lambda \\ y=1+2\lambda \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x=1+2\lambda \\ y=-1+4\lambda \end{matrix}\right\}$ **b)** $\left.\begin{matrix} x=2+\lambda \\ y=3-3\lambda \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x=1+2\lambda \\ y=-5+7\lambda \end{matrix}\right\}$ **c)** $\left.\begin{matrix} x=2+\lambda \\ y=1+2\lambda \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x=3+\lambda \\ y=5+2\lambda \end{matrix}\right\}$

(Soluc: SÍ, NO, NO)

95. TEORÍA: Demostrar que cualquier mediana siempre separa dos triángulos de igual superficie.

NÚMEROS COMPLEJOS

Ejemplo 1: Los números complejos, también llamados imaginarios, surgieron históricamente de la necesidad de resolver ecuaciones tan sencillas como

$$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}$$

Esta ecuación, como muy bien sabemos, no tendría solución en el campo de los números reales. Ahora bien, si definimos:

$$\boxed{\sqrt{-1}=i} \leftarrow \textbf{unidad imaginaria} \qquad \text{es decir, } \boxed{i^2=-1}$$

entonces su solución sería $x=\pm i$. Esto es lo que hicieron en el siglo XVI matemáticos como Girolamo Cardano (1501-1576) o Rafaelle Bombelli (1526-1572); en aquella época a este tipo de números se les empezó a llamar imaginarios. Por cierto, el primero en utilizar la **i** para designar la unidad imaginaria fue el suizo Leonhard Euler (1707-1783), mientras que al alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que profundizó en el estudio de estos números, se debe el adjetivo de complejos.

Ejercicio 2: Resolver, en el campo de los números complejos, la ecuación $x^2+9=0$

Ejercicio 3: Ídem con $x^2-4x+13=0$

Ejercicio 4: Ídem con $x^2+x+1=0$

En general:

$$\boxed{\underbrace{\mathbf{a}}_{\text{parte real}}+\underbrace{\mathbf{b}}_{\text{parte imaginaria}}\overbrace{\mathbf{i}}^{\text{unidad imaginaria}}}$$

Nº COMPLEJO EN FORMA BINÓMICA

Ejercicio final tema: 1

Conclusión: **TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA: «Todo polinomio de grado n tiene n raíces (reales o complejas)».**

Definiciones:

1º) Se define el **conjunto de los números complejos** como el formado por todos los números de la forma **a+bi**, donde **a** y **b** son reales:

$$\mathbb{C}=\{a+bi \,/\, a, b \in \mathbb{R}\}$$

A los números complejos se les suele designar con la letra z, es decir, $z=a+bi$, y se dice que:

$$\mathbb{R}\mathrm{e}(z)=a \quad \leftarrow$$ **parte real** de z

$$\mathrm{Im}(z)=b \quad \leftarrow$$ **parte imaginaria** de z

2º) **Número imaginario puro:** es aquel complejo que carece de parte real, es decir, $\mathbb{R}\mathrm{e}(z)=0$

Ejemplos: $2i$, $-7i$, i, $\frac{3}{5}i$, $-i$, $\sqrt{5}\,i$, etc.

3º) **Número real:** es aquel complejo que carece de parte imaginaria, es decir, $\mathrm{Im}(z)=0$

Ejemplos: 3, -6, 1, $\frac{2}{7}$, -1, $\sqrt{3}$, etc.

Nótese, por tanto, que los reales están contenidos en los complejos: $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$, o dicho de otra forma, los reales son un subconjunto de los complejos; por lo tanto, ya podemos completar el esquema de todos los conjuntos numéricos que conocemos:

4º) **Complejo conjugado,** $\bar{z}$**:** El complejo conjugado del complejo $z=a+bi$ se define como $\bar{z}=a-bi$

Ejemplos: $z=2+5i \longrightarrow \bar{z}=2-5i$

$z=7i \longrightarrow \bar{z}=-7i$

$z=3 \longrightarrow \bar{z}=3$

etc.

Adviértase que las soluciones imaginarias de una ecuación de 2º grado siempre son pares conjugados.

5º) Dos números **complejos** expresados en forma binómica son **iguales** si coinciden sus partes reales e imaginarias.

Ejemplo: $2-xi=y+3i \Leftrightarrow y=2,\ x=-3$

II) OPERACIONES CON COMPLEJOS en FORMA BINÓMICA *(págs. 150 y 151 libro de texto)*

II.1) Suma y diferencia: Se realiza sumando (o restando) por separado sus partes reales e imaginarias:

Ejemplo 5: $\left.\begin{array}{l} z_1=3+5i \\ z_2=4-2i \end{array}\right\}$ $z_1+z_2=7+3i$ $\qquad$ $z_1-z_2=-1+7i$

II.2) Producto: Se realiza calculando los cuatro productos posibles y teniendo en cuenta que $i^2=-1$:

Ejemplo 6: $\left.\begin{array}{l} z_1=3+5i \\ z_2=4-2i \end{array}\right\}$ $z_1\cdot z_2=(3+5i)(4-2i)=12-6i+20i-10i^2=12-6i+20i+10=\boxed{22+14i}$

$i^2=-1$

Consecuencia: $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2\in\mathbb{R}^+$

Este hecho será útil para el cociente que vamos a definir a continuación:

II.3) Cociente: Se realiza multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador:

Ejemplo 7: $$\frac{3+5i}{4-2i}=\frac{(3+5i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}=\frac{12+6i+20i+10i^2}{16-4i^2}=\frac{12+6i+20i-10}{16+4}=\frac{2+26i}{20}=\frac{2}{20}+\frac{26}{20}i=\boxed{\frac{1}{10}+\frac{13}{10}i}$$

$i^2=-1$ $\qquad$ propiedad distributiva del cociente

Observaciones: 1ª) Se recomienda hacer la comprobación:

$$(4-2i)\left(\frac{1}{10}+\frac{13}{10}i\right)= \qquad\qquad\qquad =3+5i$$

2ª) Cuando en el denominador aparece un imaginario puro basta con multiplicar numerador y denominador por i:

Ejemplo 8: $$\frac{3+5i}{2i}=\frac{(3+5i)\cdot i}{2i\cdot i}=\frac{3i+5i^2}{2i^2}=\frac{3i-5}{-2}=\frac{-3i+5}{2}=\boxed{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i}$$

II.4) Potencia: Para hacer $(a+bi)^n$ tendremos que aplicar el binomio de Newton, como vimos en el 1er tema del curso; ahora bien, como a continuación habría que sustituir alguna de las **potencias sucesivas de i**, vamos a investigar su valor:

$\boxed{i^0=1}$ como siempre

$\boxed{i^1=i}$ como siempre

$\boxed{i^2 = -1}$ por definición

$\boxed{i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i}$

$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1$

$i^5 = i^3 \cdot i = 1 \cdot i = i$

$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$

$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

Luego vemos que se trata de una serie de 4 términos (los recuadrados) que se van repitiendo; y lo curioso es que este hecho también se da hacia atrás:

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{i}{-i \cdot i} = \frac{i}{1} = i$$

$$i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{1} = 1$$

En resumen:

$\vdots$

$i^{-4} = 1$

$i^{-3} = i$

$i^{-2} = -1$

$i^{-1} = -i$

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^5 = i$

$i^6 = -1$

$i^7 = -i$

$i^8 = 1$

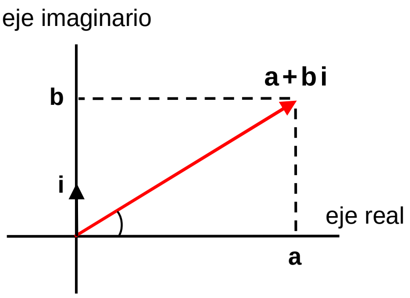
$\vdots$

Y, en general, para hallar una potencia n-ésima de i, basta con hacer la división y quedarnos con el resto, que estará en uno de los cuatro casos anteriores:

Ejemplo 9: $\begin{array}{r|l} 151 & 4 \\ \hline 31 & 37 \\ 3 & \end{array}$ ⟶ $151 = 37 \cdot 4 + 3$ ⟶ $\boxed{i^{151} = i^3 = -i}$

Es decir, descenderíamos 37 veces en la serie de 4 elementos para acabar en la posición 3

III) REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE COMPLEJOS (Forma binómica y polar) *(págs. 149 y 152-153 libro)*



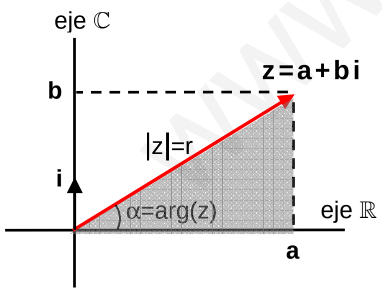
Dado un sistema de dos ejes perpendiculares como el de la figura –eje real y eje imaginario–, llamado plano de Gauss[1], **« para representar un complejo** en forma binómica –es decir, z=**a+bi**–, **le haremos corresponder el vector (a,b) »**.

Definiciones: **1ª)** El punto (a,b), es decir, el extremo del vector, se llama **afijo** del complejo a+bi.

2ª) La longitud del vector se denomina **módulo**, y se suele designar como **r** o **|z|**.

3ª) El ángulo que forma el vector <u>con la parte positiva</u> del eje x se llama **argumento**, y se designa como **α** o **arg(z)**.

Forma polar r_α: Consiste en representar un complejo mediante dos valores: su módulo y su argumento, designándolo como $\mathbf{r_\alpha}$.



Para hallar el módulo podemos aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo sombreado:

$$r^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Para obtener el argumento, aplicamos trigonometría elemental en el mismo triángulo:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{\alpha = \text{arctg}\ \frac{b}{a}}$$

Todo lo anterior podemos resumirlo en la siguiente tabla:

---

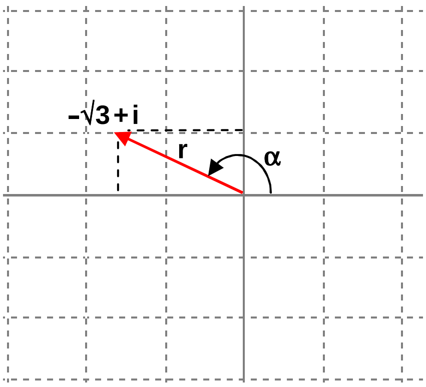
[1] Curiosamente, en realidad los artífices de esta idea fueron el danés Caspar Wessel (1745-1818) en 1797 y el suizo Jean Robert Argand (1768-1822) en 1806, pero la gloria del nombre se debe al alemán Gauss (1777-1885), que profundizó en este tema 30 años después…

		Definición:	Cálculo:	Rango:
FORMA POLAR r_α	MÓDULO	Longitud del complejo **z=a+bi**	$r=\sqrt{a^2+b^2}=\lvert z\rvert$	r>0
	ARGUMENTO	Ángulo[2] que forma el complejo con la **parte positiva** del eje $\mathbb{R}$	$\alpha=\text{arctg}\,\dfrac{b}{a}=\arg(z)$	0≤α<360º

Consejos a la hora de pasar de binómica a polar:

1ª) Como muy bien sabemos del tema de Trigonometría, entre 0º y 360º existen dos arcotangentes (que difieren en 180º), por lo que conviene dibujar previamente el complejo y ver con cuál de las dos nos quedamos, en función de en qué cuadrante esté situado.

Ejemplo 10: Pasar $-\sqrt{3}+i$ a binómica:



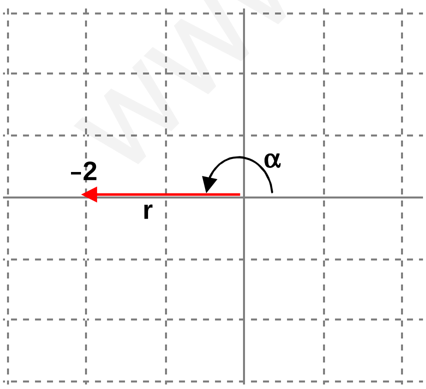
$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2$$

$$\alpha=\text{arctg}\,\frac{b}{a}=\text{arctg}\,\frac{1}{-\sqrt{3}}=\text{arctg}\,\frac{-\sqrt{3}}{3}=\begin{cases}330º \leftarrow \text{descartada}\\ \boxed{150º}\end{cases}$$

Por tanto: $\boxed{-\sqrt{3}+i=2_{150º}}$

2ª) Si se trata de un número real o un imaginario puro se pasa a polar gráficamente, es decir, sin necesidad de aplicar las dos fórmulas anteriores:

Ejemplo 11: Pasar –2 a binómica:



En el dibujo se ve que: $\boxed{-2=2_{180º}}$

(Puede comprobarse también, naturalmente, que si se utilizan las dos fórmulas se obtiene el mismo resultado, pero el proceso resulta muy tedioso…)

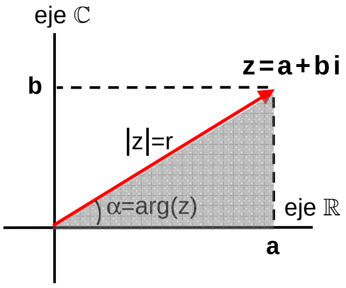
[2] Dicho ángulo puede expresarse en radianes o grados sexagesimales, indistintamente.

¿Cuándo son dos complejos iguales en forma polar?: $\boxed{r_\alpha = r'_{\alpha'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \alpha = \alpha' + k\cdot 360^\circ \end{cases}, \text{ donde } k \in \mathbb{Z}}$

Es decir: «Dos complejos en forma polar son iguales si sus módulos son exactamente idénticos y sus argumentos son iguales, salvo una diferencia de un múltiplo entero de vueltas»

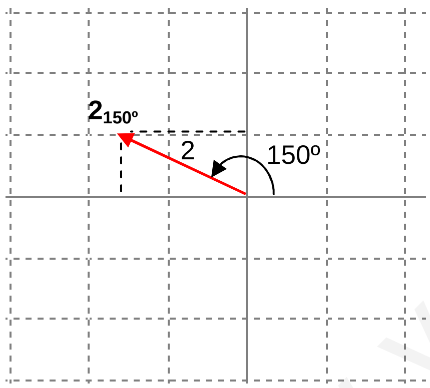
Ejemplos: $2_{30^\circ}=2_{390^\circ}$ $\quad 5_{330^\circ}=5_{-30^\circ}$ $\quad 2_\pi=2_{3\pi}$ $\quad \sqrt{2}_{30^\circ}=\sqrt{2}_{750^\circ}$

Forma trigonométrica: Sirve para pasar de polar a binómica:



$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{a}{r} \Rightarrow a = r\cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{b}{r} \Rightarrow b = r\operatorname{sen}\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a+bi = r\cos\alpha + r\operatorname{sen}\alpha\cdot i = r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)}$$

Ejemplo 12: Pasar 2_{150° a binómica:



$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ$$

$$\boxed{2_{150^\circ} = 2(\cos 150^\circ + i\operatorname{sen}150^\circ) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i}$$

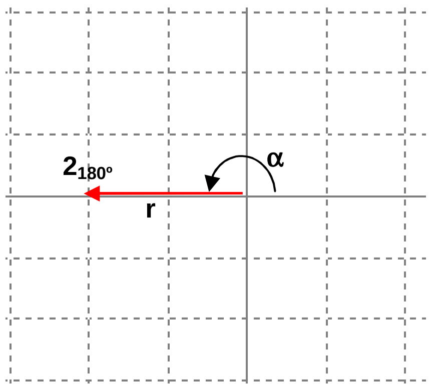
$$\operatorname{sen}150^\circ = \operatorname{sen}(180^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen}30^\circ$$

Por tanto: $\boxed{2_{150^\circ} = -\sqrt{3}+i}$

Nótese que es el mismo resultado obtenido en el ejemplo 10.

Observación: Para pasar de polar a binómica, y cuando se trate de los argumentos 0º, 90º, 180º y 270º, no es necesario pasar previamente a trigonométrica:

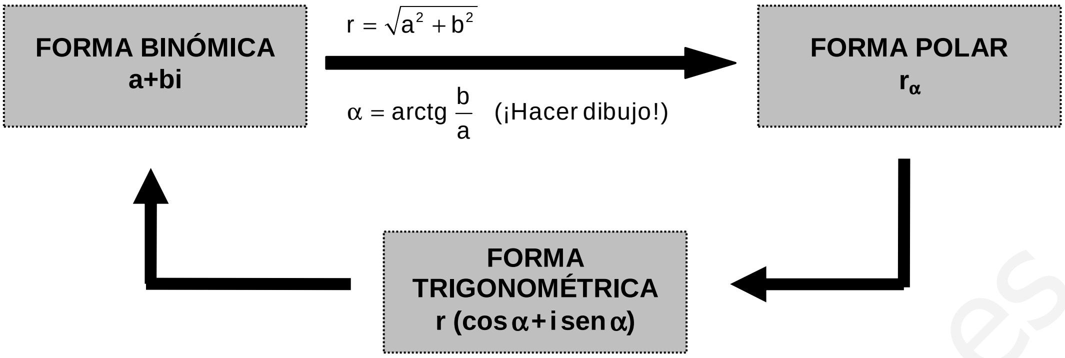
Ejemplo 13: Pasar 2_{180° a binómica:



En el dibujo se ve que: $\boxed{2_{180^\circ} = -2}$

(Puede comprobarse también, naturalmente, que si se pasa previamente a trigonométrica se obtiene el mismo resultado…)

- Todo lo visto en este apartado se puede resumir en el siguiente diagrama, en el que se muestran las tres formas que hemos indicado de representar un complejo y todas las combinaciones de paso de una a otra:



IV) OPERACIONES EN FORMA POLAR

IV.1) Producto y cociente en forma polar *(págs. 154 y 155 libro de texto)*

«El producto de dos complejos en forma polar es otro complejo de módulo el producto de los módulos y argumento la suma de éstos»:

$$\boxed{r_\alpha\cdot r'_{\alpha'}=(r\cdot r')_{\alpha+\alpha'}}$$

Dem:

$$\boxed{r_\alpha\cdot r'_{\alpha'}}=r(\cos\alpha+i\,\text{sen}\alpha)\cdot r'(\cos\alpha'+i\,\text{sen}\alpha')=r\cdot r'(\cos\alpha+i\,\text{sen}\alpha)(\cos\alpha'+i\,\text{sen}\alpha')=$$
$$=r\cdot r'(\cos\alpha\,\cos\alpha'+i\,\text{sen}\alpha\,\cos\alpha'+i\cos\alpha\,\text{sen}\alpha'+i^2\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\alpha')=$$
$$=r\cdot r'[(\cos\alpha\,\cos\alpha'-\text{sen}\alpha\,\text{sen}\alpha')+i\,(\text{sen}\alpha\,\cos\alpha'+\cos\alpha\,\text{sen}\alpha')]=$$
$$=r\cdot r'[\cos(\alpha+\alpha')+i\,\text{sen}(\alpha+\alpha')]=\boxed{(r\cdot r')_{\alpha+\alpha'}}$$

(C.Q.D.)

Ejemplos: $3_{60^\circ}\cdot 2_{45^\circ}=6_{105^\circ}$

$\sqrt{3}_{135^\circ}\cdot 1_{270^\circ}=\sqrt{3}_{405^\circ}=\sqrt{3}_{45^\circ}$

Se puede generalizar a tres o más complejos:

$\sqrt{3}_{120^\circ}\cdot 2_{150^\circ}\cdot\sqrt{3}_{90^\circ}=6_{360^\circ}=6_{0^\circ}$

- «El cociente de dos complejos en forma polar es otro complejo de módulo el cociente de los módulos y argumento la resta de éstos»:

$$\boxed{\frac{r_\alpha}{r'_{\alpha'}}=\left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\alpha'}}$$

Dem: *(se deja como ejercicio)*

Ejemplos: $\dfrac{6_{85^\circ}}{3_{20^\circ}} = 2_{65^\circ}$

$$\frac{\sqrt{2}_{90^\circ}}{2_{120^\circ}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{-30^\circ} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{330^\circ}$$

En resumen: **1º)** Sumas y restas de complejos: sólo se pueden hacer en binómica.

2º) Productos, cocientes (y potencias y raíces, como veremos a continuación): se recomienda en polar (aunque también pueden hacerse, más prolijamente, en binómica).

IV.2) Potencia en forma polar

Vamos a obtener –en polar, que es la forma más cómoda para ello–, la fórmula para obtener la potencia de un complejo. Para ello, aplicaremos **n** veces el producto recién visto:

$$\boxed{(r_\alpha)^n} = \underbrace{r_\alpha \cdot r_\alpha \cdot \cdots \cdot r_\alpha}_{\text{n términos}} = (r \cdot r \cdot \cdots \cdot r)_{\underbrace{\alpha+\alpha+\dots+\alpha}_{\text{n sumandos}}} = \boxed{(r^n)_{n\cdot\alpha}}$$

Por tanto:

$$\boxed{(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\cdot\alpha}}$$

Es decir: «Para elevar un complejo en forma polar a un exponente se eleva su módulo al exponente y se multiplica su argumento por dicho exponente»:

Ejemplos: $(2_{30^\circ})^3 = (2^3)_{90^\circ} = 8_{90^\circ}$

$$\left(\sqrt{3}_{135^\circ}\right)^4 = \left[\left(\sqrt{3}\right)^4\right]_{4\cdot 135^\circ} = 9_{540^\circ} = 9_{180^\circ}$$

Si pasamos ambos miembros de la anterior fórmula a forma trigonométrica obtenemos la **fórmula de De Moivre**[3]:

$$\boxed{\left[r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)\right]^n = r^n(\cos n\alpha + i\operatorname{sen} n\alpha)}$$

Esta fórmula es muy útil en Trigonometría, para hallar fórmulas de $\operatorname{sen} n\alpha$ y $\cos n\alpha$ en función de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ (Ver **Ejercicio final tema: 56**)

IV.3) Raíces de un complejo *(págs. 156 y 157 libro de texto)*

Es imposible hallar las raíces de un complejo directamente en forma binómica. Vamos a deducir a continuación las fórmulas para hallar la raíz de un complejo en polar.

Supongamos que nos dan el complejo r_α, y queremos hallar su raíz n-ésima, que vamos a llamar R_β; por tanto, tendremos que:

$$\sqrt[n]{r_\alpha} = R_\beta$$

Por lo tanto, por definición de raíz n-ésima, tendremos que:

$$(R_\beta)^n = r_\alpha$$

Podemos aplicar ahora al primer miembro la fórmula de la potencia obtenida en el apartado anterior:

$$(R^n)_{n\cdot\beta} = r_\alpha$$

A continuación tendremos en cuenta que, según vimos en el apdo. III, dos complejos expresados en forma polar son iguales si sus módulos son iguales y sus argumentos también, salvo una diferencia de un múltiplo entero k de vueltas:

$$(R^n)_{n\cdot\beta} = r_\alpha \Rightarrow \begin{cases} R^n = r \quad \Rightarrow & \boxed{R = \sqrt[n]{r}} \\ n\cdot\beta = \alpha + k\cdot 360^\circ \Rightarrow & \boxed{\beta = \dfrac{\alpha + k\cdot 360^\circ}{n}} \text{, donde } k = 0,1,2,\ldots,n-1 \end{cases}$$

Falta razonar que k solamente puede tomar los valores 0, 1, 2, …, hasta n−1. Efectivamente, si k=n, entonces, al sustituir en la segunda fórmula recuadrada, obtendríamos $\beta=\alpha+360^\circ$, con lo cual volveríamos al mismo ángulo.

El hecho de k sólo pueda tomar estos **n** valores desde 0, 1, 2... hasta n-1 tiene una serie de consecuencias:

1º) Un complejo tiene **n** raíces n-ésimas.

---

[3] Descubierta por el francés Abraham de Moivre (1667-1754).

2º) Las **n** raíces comparten el mismo módulo R (lo que varía es el argumento).

3º) Si las dibujamos, formarán un polígono regular de **n** lados.

Ejemplo 14: Hallar $\sqrt[3]{8_{90^\circ}}$

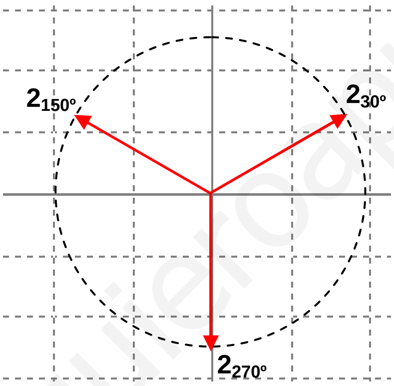
$$\sqrt[3]{8_{90^\circ}} = R_\beta \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \beta = \dfrac{90^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} = 30^\circ + k \cdot 120^\circ \; ; \; k = 0 \to \beta = 30^\circ \end{cases}$$

$$k = 1 \to \beta = 150^\circ$$

$$k = 2 \to \beta = 270^\circ$$

Soluc: $\boxed{2_{30^\circ}, 2_{150^\circ}, 2_{270^\circ}}$

Si dibujamos las tres raíces, comprobaremos que sus afijos forman un triángulo equilátero:



EJERCICIOS de NÚMEROS COMPLEJOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones en el campo de los números complejos:

a) $x^2-2x+2=0$ *(Soluc: $1\pm i$)*

b) $x^2+3=0$ *(Soluc: $\pm\sqrt{3}\,i$)*

c) $x^2-2x+4=0$ *(Soluc: $1\pm\sqrt{3}i$)*

d) $x^2+x+1=0$ *(Soluc: $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$)*

e) $x^3-6x^2+21x-26=0$ *(Soluc: 2, $2\pm 3i$)*

f) $x^3+1=0$ *(Soluc: -1, $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$)*

g) $x^4-1=0$ *(Soluc: ± 1, $\pm i$)*

h) $x^4-3x^3-2x^2+10x-12=0$ *(Soluc: -2, 3, $1\pm i$)*

☞ ***Ejercicios libro:*** *pág. 149: 2; pág. 163: 23 y 25*

Forma binómica de un complejo:

2. Completar (obsérvese el primer ejemplo):

COMPLEJO z	**PARTE REAL** $Re(z)$	**PARTE IMAGINARIA** $Im(z)$	**OPUESTO** $-z$	**CONJUGADO** $\overline{z}$
$z=2+3i$	$Re(z)=2$	$Im(z)=3$	$-z=-2-3i$	$\overline{z}=2-3i$
$z=3-i$				
$z=1+i$				
$z=3-3\sqrt{3}\,i$				
$z=3$				
$z=-2i$				
$z=i$				

3. Dados los complejos $z_1=2+3i$, $z_2=-1+4i$ y $z_3=2-5i$, hallar:

a) $z_1+z_2=$ *(Soluc: 1+7i)*

b) $z_1+z_3=$ *(Soluc: 4−2i)*

c) $z_1-z_2=$ *(Soluc: 3−i)*

d) $z_3-z_2=$ *(Soluc: 3−9i)*

e) $3z_2+2z_3=$ *(Soluc: 1+2i)*

f) $2z_1-3z_2=$ *(Soluc: 7−6i)*

g) $z_3-3z_1+4z_2=$ *(Soluc: −8+2i)*

h) $z_1+\overline{z_2}=$ *(Soluc: 1−i)*

i) $z_3-\overline{z_3}=$ *(Soluc: -10i)*

j) $2\overline{z_1}-z_1=$ *(Soluc: 2-9i)*

4. Calcular **x** e **y** para que $(2+xi)+(y+3i)=7+4i$ *(Soluc: x=1, y=5)*

5. Calcular:

a) (2+5i) (3+4i)= *(Soluc: -14+23i)*

b) (1+3i) (1+i)= *(Soluc: −2+4i)*

c) (1+i) (−1−i)= *(Soluc: −2i)*

d) (2−5i) i= *(Soluc: 5+2i)*

e) (2+5i) (2−5i)= *(Soluc: 29)*

f) (1+i) (1−i)= *(Soluc: 2)*

g) (5+2i) (3−4i)= *(Soluc: 23−14i)*

h) $(3+5i)^2=$ *(Soluc: −16+30i)*

i) (1+3i) (1−3i)= *(Soluc: 10)*

j) (−2−5i) (−2+5i)= *(Soluc: 29)*

k) $(2+3i)\,3i=$ *(Soluc: $-9+6i$)*
l) $(3i)\,(-3i)=$ *(Soluc: 9)*
m) $(2+3i)^2=$ *(Soluc: $-5+12i$)*
n) $(6-3i)^2=$ *(Soluc: $27-36i$)*
o) $(2+3i)\,(1-i)=$ *(Soluc: $5+i$)*
p) $(1-3i)\,2i=$ *(Soluc: $6+2i$)*
q) $(1+i)\,(2-3i)=$ *(Soluc: $5-i$)*
r) $(5+i)\,(5-i)=$ *(Soluc: 26)*
s) $(4+3i)\,(4+2i)-(2+i)\,(3-4i)=$ *(Soluc: $25i$)*

6. ¿Cómo es siempre el producto de dos complejos conjugados? Razonar la respuesta. *(Soluc: $\in IR^+$)*

7. Dados los complejos del ejercicio 2, hallar:

a) $z_1 \cdot z_2=$ *(Soluc: $-14+5i$)*
b) $z_1 \cdot z_3=$ *(Soluc: $19-4i$)*
c) $z_3-z_2=$ *(Soluc: $3-9i$)*
d) $z_1\,(z_3+z_2)=$ *(Soluc: $5+i$)*
e) $z_1-z_2 \cdot z_3=$ *(Soluc: $-16-10i$)*
f) $(z_1)^2=$ *(Soluc: $-5+12i$)*
g) $(z_1-z_3)^2=$ *(Soluc: -64)*
h) $z_1 \cdot \overline{z_1}=$ *(Soluc: 13)*
i) $z_1 - \overline{z_1}=$ *(Soluc: $6i$)*
j) $z_2\,(2z_1-3z_3)=$ *(Soluc: $-82-29i$)*
k) $(3z_1+2z_2)^2=$ *(Soluc: $-273+136i$)*
l) $z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot z_3=$ *(Soluc: $75-28i$*
m) $z_1^{\,2} - \overline{z_1}^{\,2}=$

8. Dados los complejos $2-mi$ y $3-ni$ hallar **m** y **n** para que su producto sea $8+4i$.
(Soluc: $m_1=-2$ y $n_1=1$; $m_2=2/3$ y $n_2=-3$)

9. Resolver la ecuación $(a+i)\,(b-3i)=7-11i$ *(Soluc: $a_1=4$ y $b_1=1$; $a_2=-1/3$ y $n_2=-12$)*

10. Calcular:

a) $\dfrac{1+3i}{1+i}=$ $(Sol: 2+i)$

b) $\dfrac{2+5i}{3+4i}=$ $\left(Sol: \dfrac{26}{25}+\dfrac{7}{25}i\right)$

c) $\dfrac{1+i}{1-i}=$ $(Sol: i)$

d) $\dfrac{3+5i}{1-i}=$ $(Sol: -1+4i)$

e) $\dfrac{2-5i}{i}=$ $(Sol: -5-2i)$

f) $\dfrac{20+30i}{3+i}=$ $(Sol: 9+7i)$

g) $\dfrac{i}{3-2i}=$ $\left(Sol: -\dfrac{2}{13}+\dfrac{3}{13}i\right)$

h) $\dfrac{1+i}{i}=$ $(Sol: 1-i)$

i) $\dfrac{1+2i}{2-i}=$ $(Sol: i)$

j) $\dfrac{1-i}{2+3i}=$ $\left(Sol: -\dfrac{1}{13}-\dfrac{5}{13}i\right)$

k) $\dfrac{19-4i}{2-5i}+\dfrac{3+2i}{i}=$ $(Sol: 4)$

l) $\dfrac{2-i}{3+i}-\dfrac{1}{2i}=$ $\left(Sol: \dfrac{1}{2}\right)$

m) $\dfrac{(5-3i)(1+i)}{\overline{1-2i}}=$ $\left(Sol: \dfrac{12}{5}-\dfrac{14}{5}i\right)$

n) $\dfrac{(3+2i)^2+3-2i}{(5+i)^2}=$ $\left(Sol: \dfrac{73}{169}+\dfrac{40}{169}i\right)$

o) $\dfrac{(3-2i)(1+i)}{\overline{1+i}-2i}=$ $\left(Sol: \dfrac{1}{5}+\dfrac{8}{5}i\right)$

p) $\dfrac{\;\dfrac{1+i}{i}\;}{\;\dfrac{2+i}{1-i}\;}=$ $\left(Sol: -\dfrac{2}{5}-\dfrac{4}{5}i\right)$

q) $\dfrac{3+2i}{i}-\dfrac{\overline{11+2i}}{3+4i}=$ $(Sol: 1-i)$

r) $\dfrac{10-10i}{i}+\dfrac{15-25i}{\overline{2+i}}=$ $(Sol: 1-17i)$

s) $\dfrac{1+ai}{a-i}=$ $(Sol: i)$

t) $\dfrac{-a+bi}{b+ai}=$ $(Sol: i)$

11. Calcular el inverso de cada uno de los siguientes complejos:

a) 3i $\left(Sol: -\frac{1}{3}i\right)$

b) 1+i $\left(Sol: \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$

c) 2+3i $\left(Sol: \frac{2}{13}-\frac{3}{13}i\right)$

d) 1−i $\left(Sol: \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

e) −2+i $\left(Sol: -\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\right)$

f) i $(Sol: -i)$

12. Calcular las siguientes **potencias sucesivas de i**:

a) $i^{12}=$ *(Soluc: 1)*

b) $i^{77}=$ *(Soluc: i)*

c) $i^{125}=$ *(Soluc: i)*

d) $i^{723}=$ *(Soluc: −i)*

e) $i^{2344}=$ *(Soluc: 1)*

f) $\frac{1}{i}=$ *(Soluc: −i)*

g) $\frac{1}{i^2}=$ *(Soluc: −1)*

h) $\frac{1}{i^3}=$ *(Soluc: i)*

i) $i^{-4}=$ *(Soluc: 1)*

j) $\frac{1}{i^5}=$ *(Soluc: −i)*

k) $i^{-6}=$ *(Soluc: −1)*

l) $i^{544}=$ *(Soluc: 1)*

m) $i^{6254}=$ *(Soluc: −1)*

n) $i^{-1}=$ *(Soluc: −i)*

o) $i^{-527}=$ *(Soluc: i)*

13. Calcular las siguientes **operaciones combinadas en forma binómica**:

a) $(2+i)^3=$ *(Soluc: 2+11i)*

b) $(1+i)^3=$ *(Soluc: −2+2i)*

c) $(2-3i)^3$ *(Soluc: −46−9i)*

d) i^{-131} *(Soluc: i)*

e) $\frac{i^7-1}{1+i}=$ *(Soluc: −1)*

f) $\frac{2i-1}{i^{45}}+\frac{4-3i}{1+2i}=$ *(Soluc: 4+2i)*

g) $\frac{(3-2i)^2+(2-3i)^2}{i^{12}+i^{-5}}=$ *(Soluc: 12−12i)*

h) $\frac{(2+3i)(1-i)-(3+4i)^2}{2i^{14}-i^{-7}}$ $\left(Soluc: -\frac{1}{5}+\frac{58}{5}i\right)$

i) $\frac{(3-2i)(3+i)-(2i-3)^2}{i^{23}-i^{13}}$ $\left(Soluc: -\frac{9}{2}+3i\right)$

j) $\frac{1-(2+3i)^2(1-2i)}{2i^{77}-i^{726}}$ $\left(Soluc: -\frac{62}{5}+\frac{14}{5}i\right)$

k) $\frac{(2+3i)(3-2i)-(2-3i)^2}{17(1-i^{13})}=$ *(Soluc: i)*

l) $-2-5i-\frac{10-10i-5(1+i)}{8+2i-(5+3i)}$ *(Soluc: −5−i)*

m) $\frac{(2-3i)^2-(2+3i)(3-2i)}{3i^{17}-1}=$ $\left(Soluc: -\frac{17}{5}+\frac{34}{5}i\right)$

n) $\frac{(3+i)(3-2i)-(2i-3)^2}{2i^{20}-i^{13}}+\frac{4}{5i}$ $\left(Soluc: \frac{3}{5}+4i\right)$

o) $\frac{(2-3i)^2-(2+3i)(3-2i)}{3i^{17}-1}-\frac{4}{5i^{-25}}$ $\left(Soluc: -\frac{17}{5}+6i\right)$

14. ¿Cuánto ha de valer **m** para que el complejo z=(m−2i) (2+4i) sea un número real? ¿E imaginario puro? ¿De qué números se trata? *(Soluc: m=1 o m=−4; z=10 y z=−20i, respectivamente)*

15. Determinar **x** para que el producto z=(2−5i) (3+xi) sea:

a) Un número real. ¿Qué número resulta? *(Soluc: x=15/2; z=87/2)*

b) Un número imaginario puro. ¿Qué complejo z se obtiene? *(Soluc: x=−6/5; z=−87i/5)*

16. a) Hallar **x** con la condición de que $(x-2i)^2$ sea un número imaginario puro. *(Soluc: $x=\pm 2$)*

b) Ídem con $(3x-2i)^2$ *(Soluc: $x=\pm 2/3$)*

c) Ídem con $(2+xi)^2$ *(Soluc: $x=\pm 2$)*

17. Hallar **x** e **y** de modo que $\frac{3-xi}{1+2i}=y+2i$ *(Soluc: $x=-16$; $y=7$)*

18. Hallar **x** para que el cociente $\frac{x+3i}{3+2i}$ sea un número imaginario puro. ¿De qué número imaginario se trata? *(Soluc: $x=-2$; i)*

19. Determinar **k** para que el cociente $z=\frac{-2+ki}{k-i}$ sea:

a) Un número real. ¿Qué número resulta? $\left(Sol: k=\pm\sqrt{2}\,;\ z=\pm\sqrt{2} \right)$

b) Un número imaginario puro. ¿Qué número es? $\left(Sol: k=0\,;\ z=-2i \right)$

20. Demostrar la siguiente igualdad, obtenida de manera fortuita por el insigne filósofo y matemático alemán Gottfried Leibniz (1646-1716):

$$\sqrt{1+\sqrt{3}\,i}+\sqrt{1-\sqrt{3}\,i}=\sqrt{6}$$

21. Hallar dos complejos de los que sabemos que su diferencia es un número real, su suma tiene la parte real igual a 1 y su producto es $-7+i$ *(Soluc: $3+i$ y $-2+i$)*

22. Determinar los valores de **a** y **b** para que el complejo $z=a+bi$ satisfaga la ecuación $z^2=\bar{z}$

$$\left(Soluc:\ z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_3=0,\ z_4=1 \right)$$

23. Comprobar que los números complejos $2\pm 3i$ verifican la ecuación $x^2-4x+13=0$

24. Hallar una ecuación polinómica cuyas raíces sean:

a) $1\pm 3i$ *(Soluc: $x^2-2x+10=0$)*

b) $5\pm 2i$ *(Soluc: $x^2-10x+29=0$)*

c) $2+i$ y $3+5i$ *(Soluc: $x^2-(5+6i)x+1+13i=0$)*

d) $\pm i$ *(Soluc: $x^2+1=0$)*

25. **<u>TEORÍA</u>:** Demostrar que si las raíces complejas de $Ax^2+Bx+C=0$ son $a\pm bi$, entonces:

$$A\left[(x-a)^2+b^2\right]=Ax^2+Bx+C$$

(Ayuda: Desarrollar el miembro izquierdo y aplicar las relaciones de Cardano-Vieta)

Forma polar de un complejo:

26. Representar los siguientes complejos, sus opuestos y sus conjugados:

a) $z_1=3+4i$ **b)** $z_2=1-i$ **c)** $z_3=-3+i$ **d)** $z_4=-2-5i$ **e)** $z_5=7i$

f) $z_6=-7$ **g)** i **h)** $-\sqrt{2}\,i$

27. Pasar a forma polar los siguientes complejos (**se recomienda representarlos previamente, para así elegir correctamente su argumento**):

a) $4+4\sqrt{3}\,i=$ *(Soluc: 8_{60°)*

b) $3-3\sqrt{3}\,i=$ *(Soluc: 6_{300°)*

c) $-\sqrt{2}+i=$ $\left(Soluc: \sqrt{3}_{144^\circ\ 44'}\right)$

d) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i=$ *(Soluc: 2_{225°)*

e) $\sqrt{3}-i=$ *(Soluc: 2_{330°)*

f) $1+i$ $\left(Soluc: \sqrt{2}_{45^\circ}\right)$

g) $1-i$ $\left(Soluc: \sqrt{2}_{315^\circ}\right)$

h) $-1-i$ $\left(Soluc: \sqrt{2}_{225^\circ}\right)$

i) i *(Soluc: 1_{90°)*

j) $-i$ *(Soluc: 1_{270°)*

k) $3+4i$ *(Soluc: $5_{53^\circ\ 8'}$)*

l) $3-4i$ *(Soluc: 5_{306°)*

m) $-3+4i$ *(Soluc: $5_{126^\circ\ 52'}$)*

n) $-5+12i$ *(Soluc: $13_{112^\circ\ 37'}$)*

o) $-8i$ *(Soluc: 8_{270°)*

p) 8 *(Soluc: 8_{0°)*

q) -8 *(Soluc: 8_{180°)*

r) $3+2i$ $\left(Soluc: \sqrt{13}_{33^\circ 41'}\right)$

s) $-2-5i$ $\left(Soluc: \sqrt{29}_{248^\circ 12'}\right)$

28. a) Hallar **m** para que el número complejo m+3i tenga módulo 5. Justificar gráficamente la solución. *(Soluc: m=±4)*

b) Hallar **m** para que su argumento sea 60º *(Soluc: m=√3)*

29. Hallar un número complejo tal que |z|=3 e Im(z)=-2. Justificar gráficamente la solución. $\left(Soluc:\ z_1=\sqrt{5}-2i,\ \ z_2=-\sqrt{5}-2i\right)$

30. Hallar un número complejo del 2º cuadrante que tiene por módulo 2 y tal que Re(z)=−1. Expresarlo en forma polar. Justificar gráficamente la solución. $\left(Soluc:\ -1+\sqrt{3}\,i=2_{120^\circ}\right)$

31. Hallar un complejo de argumento 45º tal que sumado a 1+2i dé un complejo de módulo 5 *(Soluc: 2+2i)*

32. Encontrar un complejo tal que sumándolo con 1/2 dé otro complejo de módulo $\sqrt{3}$ y argumento 60º $\left(Soluc:\ \frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{3}{2}i\right)$

33. Pasar a forma binómica:

a) 4_{30° $\left(Soluc:\ 2\sqrt{3}+2i\right)$

b) 4_{90°

c) 2_{0°

d) 5_{π}

e) $2_{3\pi/2}$

f) 1_{90°

g) 1_{30° $\left(Soluc:\ \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$

h) 2_{60° $\left(Soluc:\ 1+\sqrt{3}\,i\right)$

i) 6_{225° $\left(Soluc:\ -3\sqrt{2}-3\sqrt{2}i\right)$

j) 4_{120° $\left(Soluc:\ -2+2\sqrt{3}i\right)$

k) 2_{150° $\left(Soluc:\ -\sqrt{3}+i\right)$

l) 3_{60° $\left(Soluc:\ \frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)$

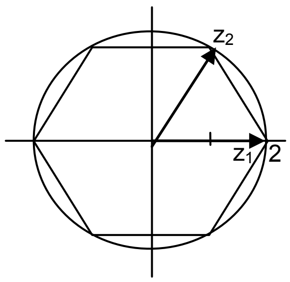
m) 3_{50° *(Soluc: 1,929+2,298i)*

n) 2_{180° *(Soluc: −2)*

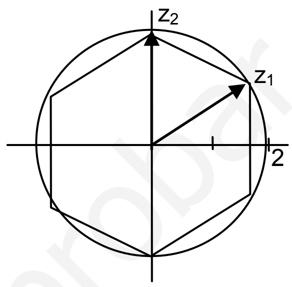
o) 1_{210° $\left(Soluc:\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$

34. Hallar los números complejos, en forma polar y binómica, que corresponden a los vértices de estos hexágonos:

a)



b)



(Soluc: a) $z_1=2_{0^\circ}=2$; $z_4=-z_1$; $z_2=2_{60^\circ}=1+\sqrt{3}i$; $z_6=\bar{z}_2$; $z_5=-z_2$; $z_3=-z_6$ b) $z_1=2_{30^\circ}=\sqrt{3}+i$; $z_4=-z_1$; $z_6=\bar{z}_1$; $z_3=-z_6$; $z_2=2_{90^\circ}=2i$; $z_5=-z_2$)

35. Determinar el valor de **a** para que el complejo z=(3−6i) (2−ai) sea:

a) Un número real. ¿De qué número se trata? *(Sol: a=−4; 30)*

b) Un número imaginario puro. ¿De qué número se trata? *(Sol: a=1; −15i)*

c) Tal que su afijo esté en la bisectriz del 1er y 3er cuadrantes. ¿De qué número se trata? *(Sol: a=6; −30−30i)*

36. Determinar el valor de **m** para que el complejo $z=\frac{2-mi}{8-6i}$ sea:

a) Un número real. ¿Qué número es? *(Soluc: m=3/2; 1/4)*

b) Imaginario puro. ¿Cuál en concreto? *(Soluc: m=−8/3; i/3)*

c) Tal que su afijo esté en la bisectriz del 2º y 4º cuadrantes. *(Soluc: m=14; 1−i)*

37. Determinar el valor de **a** para que el complejo z=(2+3i) (−2+ai) sea:

a) Un número real. *(Soluc: a=3)*

b) Un número imaginario puro. *(Soluc: a=−4/3)*

c) Tal que su afijo esté en la bisectriz del 1er y 3er cuadrantes. *(Soluc: a=−10)*

38. a) Dado $z=2_{45^\circ}$, hallar $\bar{z}$ en polar. *(Soluc: 2_{315°)*

b) Dado $z=1_{30^\circ}$, hallar $-z$

c) Si $z=2_{30^\circ}$, hallar su conjugado y su opuesto.

d) Hallar un número complejo y su opuesto sabiendo que su conjugado es $\bar{z}=3_{70^\circ}$

39. Representar las siguientes regiones del plano complejo:

a) $\text{Im}(z)=-2$ *(Sol: recta horizontal)*
b) $\text{Re}(z)=\text{Im}(z)$ *(Sol: bisectriz del 1er cuadrante)*
c) $-1<\text{Re}(z)\le 3$ *(Sol: banda vertical)*
d) $\text{Im}(z)<2$ *(Sol: semiplano)*
e) $|z|=5$ *(Sol: circunferencia)*
f) $|z|<3$ *(Sol: región circular)*
g) $-1\le|z|<3$ *(Sol: anillo)*
h) $\text{Arg}(z)=30^\circ$ *(Sol: recta)*
i) $\text{Re}(z)=-3$ *(Sol: recta vertical)*
j) $|z|\ge 4$
k) $\text{Arg}(z)=90^\circ$

40. **TEORÍA**:

a) Demostrar que $|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}$

b) Si $z=r_\alpha$, ¿qué relación tienen con z los números $r_{\alpha+180^\circ}$ y $r_{360^\circ-\alpha}$?

c) El producto de dos complejos imaginarios, ¿puede ser real? Poner un ejemplo.

d) ¿Qué relación existe entre el argumento de un complejo y el de su opuesto?

e) ¿Qué condición debe cumplir un número complejo z para que $\bar{z}=\frac{1}{z}$ *(Soluc: Su módulo tiene que ser 1)*

Producto y cociente en forma polar:

41. a) Dados los números complejos 3_{30° y 5_{60°, comprobar que el producto en forma polar y en forma binómica dan el mismo complejo. *(Soluc: 15i)*

b) Ídem con 3i y 2–2i $\left(\textit{Soluc: } 6+6i=6\sqrt{2}_{\,45^\circ}\right)$

42. Efectuar las siguientes operaciones en forma polar y pasar el resultado a binómica:

a) $3_{45^\circ}\cdot 2_{15^\circ}$ $\left(\textit{Soluc: } 6_{60^\circ}=3+3\sqrt{3}\,i\right)$

b) $3_{150^\circ}\cdot 4_{45^\circ}$ $\left(\textit{Soluc: } 12_{195^\circ}\cong -11{,}59-3{,}11i\right)$

c) $1_{33^\circ}\cdot 2_{16^\circ}\cdot 3_{41^\circ}$ $\left(\textit{Soluc: } 6_{90^\circ}=6i\right)$

d) $3_{12^\circ}\cdot 4_{17^\circ}\cdot 2_{1^\circ}$ $\left(\textit{Soluc: } 24_{30^\circ}=12\sqrt{3}+12i\right)$

e) $2_{106^\circ}:1_{61^\circ}$ $\left(\textit{Soluc: } 2_{45^\circ}=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i\right)$

f) $9_{37^\circ}:3_{97^\circ}$ $\left(\textit{Soluc: } 3_{300^\circ}=\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)$

g) $(2_{40^\circ})^3$ $\left(\textit{Soluc: } 8_{120^\circ}\cong -4+4\sqrt{3}i\right)$

h) $1_{33^\circ}:2_{16^\circ}\cdot 3_{41^\circ}$ $\left(\textit{Soluc: } \left(\frac{3}{2}\right)_{58^\circ}\cong 0{,}79+1{,}27i\right)$

i) $3_{12^\circ}:4_{17^\circ}:2_{1^\circ}$ $\left(\textit{Soluc: } \left(\frac{3}{8}\right)\cong 0{,}37-0{,}04i\right)$

43. El complejo de argumento 80º y módulo 12 es el producto de dos complejos; uno de ellos tiene de módulo 3 y argumento 50º. Escribir en forma binómica el otro complejo. $\left(\textit{Soluc: } 2\sqrt{3}+2i\right)$

44. Efectuar las siguientes operaciones en forma polar y pasar el resultado a binómica:

a) $\frac{2_{15^\circ}\cdot 4_{135^\circ}}{8_{170^\circ}}=$ $\left(\textit{Soluc: } 1_{340^\circ}\cong 0{,}94-0{,}34i\right)$

b) $\frac{2_{15^\circ}\cdot(1+i)}{2_{-15^\circ}\cdot(1-i)}=$ $\left(\textit{Soluc: } 1_{120^\circ}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

c) $(1+\sqrt{3}\,i)(1+i)(\sqrt{3}-i)=$ $\left(\textit{Soluc: } 4\sqrt{2}_{\,75^\circ}\cong 1{,}46+5{,}46i\right)$

45. Hallar el valor de α para que el producto $3_{\pi/2}\cdot 1_\alpha$ sea:

a) Un número real positivo. *(Soluc: $\alpha=3\pi/2$)*

b) Un número real negativo. *(Soluc: $\alpha=\pi/2$)*

46. Hallar el valor de α para que el cociente $5_\pi : 3_\alpha$ sea:

a) Un número real positivo. *(Soluc: $\alpha=\pi$)*

b) Un número real negativo. *(Soluc: $\alpha=0$)*

c) Un número imaginario puro con su parte imaginaria positiva. *(Soluc: $\alpha=\pi/2$)*

d) Un número imaginario puro con su parte imaginaria negativa. *(Soluc: $\alpha=3\pi/2$)*

e) " " " situado en la bisectriz del 2º cuadrante

47. Sin necesidad de efectuar el producto en binómica, hallar cuánto ha de valer **m** para que el complejo z=(m−2i) (2+4i) tenga módulo 10 *(Soluc: $m=\pm1$)*

48. Sin necesidad de efectuar el cociente, determinar el valor de **a** para que el módulo del complejo $z=\frac{a+2i}{1-i}$ sea 2 *(Soluc: $a=\pm2$)*

49. Hallar dos números complejos sabiendo que su producto es −8 y el cociente de uno entre el cuadrado del otro es la unidad. (Ayuda: utilizar la forma polar) *(Soluc: $z_1=4_{120^\circ}$ y $z_2=2_{60^\circ}$)*

50. Hallar dos números complejos sabiendo que su producto es 4 y el cociente de uno entre el cuadrado del otro es 2 $\left(Soluc:\ z_1=\left(2\sqrt[3]{4}\right)_{0^\circ}\ y\ z_2=\left(\sqrt[3]{2}\right)_{0^\circ}\right)$

51. Interpretar geométricamente el resultado de multiplicar el complejo $z=a+bi=r_\alpha$ por la unidad imaginaria i.
(Soluc: Se trata de una rotación de 90º en el plano complejo)

52. Calcular cos 75º y sen 75º mediante el producto $1_{30^\circ}\cdot 1_{45^\circ}$ $\left(Soluc:\ \cos 75^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};\ sen\ 75^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$

Potencias en forma polar:

53. Calcular, aplicando el método más apropiado (es decir, operando en polar o en binómica) en cada caso; dar el resultado en forma binómica:

a) $(1+i)^2$ *(Soluc: 2i)*

b) $(2-2i)^2$ *(Soluc: −8i)*

c) $(1+i)^3$ *(Soluc: −2+2i)*

d) $(2+3i)^3$ *(Soluc: −46+9i)*

e) $(1-i)^4$ *(Soluc: −4)*

f) $(-2+i)^5$ *(Soluc: 38+41i)*

g) $\frac{(1+i)^2}{4+i}$ $\left(Soluc:\ \frac{2}{17}+\frac{8}{17}i\right)$

h) $\frac{2+i}{(1+i)^2}$ $\left(Soluc:\ \frac{1}{2}-i\right)$

i) $(i^4+i^{-13})^3$ *(Soluc: −2−2i)*

j) $(1+i)^{20}$ *(Soluc: −1024)*

k) $(-2+2\sqrt{3}\,i)^6$ *(Soluc: 4096)*

l) $\frac{i^7-i^{-7}}{2i}$ *(Soluc: −1)*

m) $(4-4\sqrt{3}\,i)^3$ *(Soluc: −512)*

n) $(-2+2\sqrt{3}\,i)^4$ $\left(Soluc:\ -128+128\sqrt{3}i\right)$

o) $(\sqrt{3}-i)^5$ $\left(Soluc:\ -16\sqrt{3}-16i\right)$

p) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3i}{2}\right)^3$ *(Soluc: 27i)*

q) $(-1+i)^{30}$ *(Soluc: $2^{15}i$)*

r) $\frac{(-1+i)^2}{(1+i)^3}$ $\left(Soluc:\ -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)$

s) $(2+2\sqrt{3}\,i)^4$ $\left(Soluc:\ -128-128\sqrt{3}i\right)$

t) $(4+4\sqrt{3}\,i)^4$ $\left(Soluc:\ -2048-2048\sqrt{3}i\right)$

u) $(2+2\sqrt{3}\,i)^2$ $\left(Soluc:\ -8+8\sqrt{3}i\right)$

v) $(1+i)^5$ *(Soluc: −4−4i)*

w) $(1+2i)^3$

x) $(2+i^5)^3$ *(Soluc: 2+5i)*

y) $(3+3i)^5$ *(Soluc: −972−972i)*

z) $\dfrac{\left(2\sqrt{3}-2i\right)^8}{\left(-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,i\right)^6}$ $\left(Soluc:\ \left(\frac{1}{4}\right)_{30^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{8}i\right)$

α) $\dfrac{(1-\sqrt{3}\,i)^3\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)}{(-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i)^2}$ $\left(Soluc:\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

β) $\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i)^2\,(-1-i)^4}{(-1+i)^3\,i^7}$ $\left(Soluc:\ 4\sqrt{2}_{135^\circ}=-4+4i\right)$

γ) $\dfrac{(-2\sqrt{3}-2\,i)^5}{(-4+4\sqrt{3}\,i)^3\,2i}$ $\left(Soluc:\ 1_{240^\circ}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

δ) $\dfrac{(-2\sqrt{3}-2\,i)^4}{(-1+\sqrt{3}\,i)^3\,(2-2i)^2}=$ $\left(Soluc:\ 4_{210^\circ}=-2\sqrt{3}-2i\right)$

ε) $\dfrac{\left(2-2\sqrt{3}\,i\right)^3}{\left(-\sqrt{3}+i\right)^4\cdot i}=$ $\left(Soluc:\ 2_{210^\circ}=-\sqrt{3}-i\right)$

ζ) $\left[\dfrac{\left(-\sqrt{3}+i\right)\left(-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)}{-6}\right]^3$ *(Soluc: −i)*

54. Dados los complejos $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=3i$ y $z_3=1+i$, calcular las siguientes expresiones, dando el resultado en binómica:

a) $\dfrac{z_1+z_2}{z_3}$ **b)** $z_1\cdot z_3$ **c)** $(z_1)^4$ **d)** $\overline{z_2}$ $\left(Sol:\ a)\ \frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}i;\ b)(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-)i;\ c)-8+8\sqrt{3}i;\ d)-3i\right)$

55. Dado el complejo $z=\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$, calcular $z^5\cdot\overline{z}$ *(Soluc: −64)*

56. a) Aplicando la fórmula de De Moivre[1], hallar sen 3α y cos 3α. Comprobar las expresiones obtenidas sustituyendo valores apropiados de α (p.ej. α=30º)
(Soluc: sen 3α=3sen α−4sen³α; cos 3α=4cos³α−3cos α)

b) Ídem para sen 4α y cos 4α

c) Ídem para las ya conocidas sen 2α y cos 2α

Raíces de un nº complejo:

57. Calcular las siguientes raíces (dando el resultado en binómica en aquellos apartados marcados con **(*)**), y representarlas en el plano complejo:

a) $\sqrt[4]{1+i}$ $\left(Soluc:\ \sqrt[8]{2}_{11,25^\circ};\ \sqrt[8]{2}_{101,25^\circ};\ \sqrt[8]{2}_{191,25^\circ};\ \sqrt[8]{2}_{281,25^\circ}\right)$

b) $\sqrt[3]{1-i}$ $\left(Soluc:\ \sqrt[6]{2}_{105^\circ};\ \sqrt[6]{2}_{225^\circ};\ \sqrt[6]{2}_{345^\circ}\right)$

(*) c) $\sqrt[4]{\dfrac{-4}{1-\sqrt{3}\,i}}$ $\left(Soluc:\ \sqrt[4]{2}_{60^\circ};\ \sqrt[4]{2}_{150^\circ};\ \sqrt[4]{2}_{240^\circ};\ \sqrt[4]{2}_{330^\circ}\right)$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{-1+3i}{2-i}}$ $\left(Soluc:\ \sqrt[6]{2}_{45^\circ};\ \sqrt[6]{2}_{165^\circ};\ \sqrt[6]{2}_{285^\circ}\right)$

(*) e) $\sqrt[3]{-i}$ $\left(Soluc:\ i;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i\right)$

[1] Abraham De Moivre (1667-1754), matemático francés. Como dato curioso, parece ser que predijo exactamente la fecha de su propia muerte: se dio cuenta de que cada día dormía 15 minutos más que el día anterior; a partir de ahí, conjeturó que el descanso eterno le llegaría el día que durmiera durante 24 horas. Ese día aciago, calculado por él mismo, fue el 27 de noviembre de 1754.

(*) f) $\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}}$ $\left(Soluc: \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i;\ -0{,}97+0{,}26i;\ 0{,}26-0{,}97i\right)$

(*) g) $\sqrt{\mathrm{i}}$ $\left(Soluc: \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

h) $\sqrt[3]{\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}}$ $\left(Soluc: 0{,}89_{95º;}\ 0{,}89_{215º;}\ 0{,}89_{335º}\right)$

(*) i) $\sqrt[3]{8\mathrm{i}}$ $\left(Soluc: 2i;\ \pm\sqrt{3}+i\right)$

(*) j) $\sqrt[4]{-1}$ $\left(Soluc: \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

(*) k) $\sqrt[3]{8}$ $\left(Soluc: 2;\ -1\pm\sqrt{3}\,i\right)$

(*) l) $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$ $\left(Soluc: \frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i;\ -\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i;\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)$

m) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$ $\left(Soluc: 2_{100º;}\ 2_{220º;}\ 2_{340º}\right)$

(*) n) $\sqrt[3]{\frac{8+8\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}}$ $\left(Soluc: -2i;\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}+i\right)$

o) $\sqrt[4]{-2+2\mathrm{i}}$ $\left(Soluc: \sqrt[8]{8}_{\,33,75º;}\ \sqrt[8]{8}_{\,123,75º;}\ \sqrt[8]{8}_{\,213,75º;}\ \sqrt[8]{8}_{\,303,75º}\right)$

(*) p) $\sqrt[4]{-16}$ $\left(Soluc: \pm\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i\right)$

q) $\sqrt[5]{-243}$ $\left(Soluc: 3_{30º;}\ 3_{108º;}\ 3_{180º};\ 3_{252º;}\ 3_{324º}\right)$

(*) r) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$ $\left(Soluc: \sqrt{3}+i;\ -1+\sqrt{3}\,i;\ -\sqrt{3}-i;\ 1-\sqrt{3}\,i\right)$

(*) s) $\sqrt[3]{\frac{-1-\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}}$

(*) t) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$

(*) u) $\sqrt[3]{\frac{-8+8\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}}$

(*) v) $\sqrt[4]{\frac{-4}{1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}}$

(*) w) $\sqrt[4]{\frac{-16\mathrm{i}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}}}$

x) $\sqrt[3]{-1}$

y) $\sqrt{-36}$

z) $\sqrt[3]{-27}$

α) $\sqrt[6]{729\mathrm{i}}$

β) $\sqrt[4]{16_{180º}}$

(*) γ) $\sqrt[4]{\frac{8\sqrt{3}+8\mathrm{i}}{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}}$ $\left(Soluc: \frac{\sqrt[4]{8}}{2}+\frac{\sqrt[4]{72}}{2}i;\ -\frac{\sqrt[4]{72}}{2}+\frac{\sqrt[4]{8}}{2}i;\ -\frac{\sqrt[4]{8}}{2}-\frac{\sqrt[4]{72}}{2}i;\ \frac{\sqrt[4]{72}}{2}-\frac{\sqrt[4]{8}}{2}i\right)$

(*) δ) $\sqrt[3]{\frac{\mathrm{i}^6+\mathrm{i}^{-6}}{-2\mathrm{i}}}$

58. <u>TEORÍA</u>:

a) El número 4+3i es la raíz cuarta de un cierto complejo z; hallar las otras tres raíces.

b) ¿Pueden ser 2+i, −2+i, −1−2i y 1−2i las raíces cuartas de un complejo? Justificar la respuesta.

c) ¿Pueden ser 2_{28°, 2_{100°, 2_{172°, 2_{244° y 2_{316° las raíces de un complejo? ¿De cuál?

d) El complejo 3_{40° es vértice de un pentágono regular. Hallar los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.

e) Una de las raíces cúbicas de un número complejo z es i+i. Hallar z y las otras raíces cúbicas.

59. a) Hallar las raíces cúbicas de la unidad en forma binómica, y dibujarlas.

$\left(Soluc: 1;\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$

b) Hallar las raíces cuartas de la unidad en forma binómica, y dibujarlas.

$(Soluc: \pm 1;\ \pm i)$

c) Hallar las raíces quintas de la unidad en forma polar, y dibujarlas.

$(Soluc: 1_{0^\circ;} 1_{72^\circ;} 1_{144^\circ};\ 1_{216^\circ;} 1_{288^\circ})$

d) Hallar las raíces sextas de la unidad en forma binómica, y dibujarlas.

$\left(Soluc: \pm 1;\ \pm\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$

60. Resolver las siguientes ecuaciones en el campo de los complejos. Dibujar los afijos de las raíces:

a) $x^3+8=0$ *(Soluc: −2,* $1\pm\sqrt{3}i$*)*

b) $x^4-16=0$ *(Soluc: ±2, ±2i)*

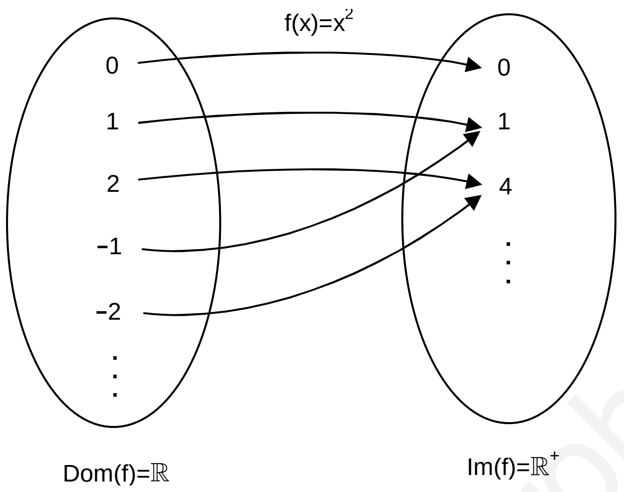
c) $ix^4+16=0$

d) $x^4+1=0$ $\left(Soluc: \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$

FUNCIÓN. DEFINICIÓN

Ejemplo 1: Considerar la función $y=f(x)=x^2$

Podemos estudiar su comportamiento utilizando un diagrama de conjuntos o diagrama de Venn[1]:



Ahora bien, en la práctica lo anterior se suele indicar más bien mediante tabla de valores:

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=x^2$	4	1	0	1	4	9

(NOTA: más adelante veremos que esta función se trata de una parábola…)

Por ejemplo, se dice que la imagen de 3 a través de la función anterior es 9, y se designa como $f(3)=9$

¡Muy importante!: **Para que una función esté bien definida, cada x no puede tener más de una imagen.**

Definiciones:

« Una función es una aplicación entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento –llamado x, o variable independiente– **del conjunto inicial le corresponde un <u>único</u> elemento a lo sumo** –llamado imagen de x, o f(x)– **del conjunto final».**

Como acabamos de indicar, x se llama **variable independiente**, mientras que y es la **variable dependiente** (ya que, obviamente, depende de x).

f(x) se llama **imagen** de x, mientras que x se llama **antiimagen** de f(x). En el ejemplo anterior, la antiimagen de $y=9$ sería $x=\pm3$.

Dominio de definición de la función: «Es el conjunto formado por todos los x para los que existe imagen»; se suele designar como Dom (f), o Dom f(x), etc. En el ejemplo anterior sería, lógicamente, $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$, como se indica en el propio diagrama de conjuntos.

[1] Introducidos en 1880 por el matemático y filósofo británico John Venn (1834-1923)

Imagen o Recorrido de la función: «Es el conjunto formado por todas las imágenes f(x) posibles»; se puede designar como Im (f), o R(f), etc. En el ejemplo anterior sería, lógicamente, Im (f)=$\mathbb{R}^+$, como también se indica en el diagrama.

Por tanto, la definición exhaustiva de esta función sería:

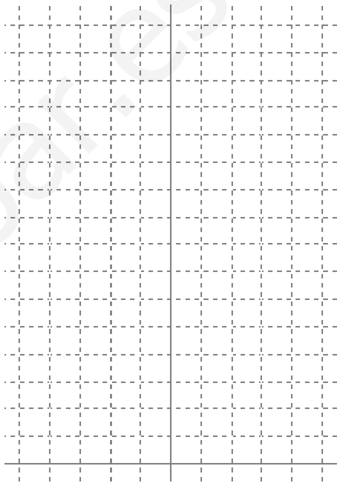
$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longrightarrow f(x)=x^2 \end{aligned}$$

pero en la práctica, por comodidad, se suele abreviar diciendo simplemente $f(x)=x^2$

II) GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN *(págs. 246 y 247 libro de texto)*

Ejemplo 2: Construir la gráfica de $f(x)=x^2$ mediante tabla de valores.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)=x^2$											



Definición: «La gráfica de una función y=f(x) está formada por los ∞ puntos (x,y) que verifican la expresión y=f(x)».

Observaciones:

1º) Podemos obtener gráficamente el Dom(f) si nos desplazamos imaginariamente de izquierda a derecha a lo largo del eje x y vamos viendo hacia arriba o hacia abajo cuándo existe imagen, es decir, cuándo hay gráfica.

De la misma forma, podemos obtener el Im(f) a partir de la gráfica si nos vamos desplazando imaginariamente a lo largo del eje y de abajo a arriba y vamos viendo a izquierda y derecha cuándo existe antiimagen(es), es decir, cuándo hay gráfica.

2º) El hecho de que un mismo x no pueda tener más de una imagen se traduce gráficamente en que «Toda recta vertical que se desplace imaginariamente a lo largo de la gráfica sólo puede cortar a ésta a lo sumo en un punto[2]».

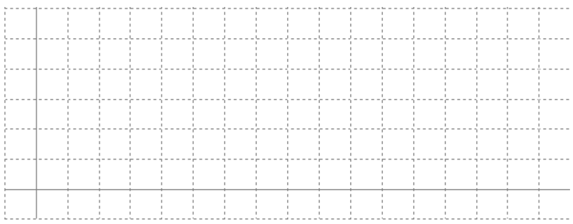
Ejemplo 3: Dada $f(x)=\sqrt{x}$, se pide: **a)** Representarla gráficamente.

b) Deducir su Dom(f) e Im(f) a la vista de lo anterior.

x																	
$f(x)=\sqrt{x}$																	

Dom (f)=

Im (f)=



[2] En cambio, una recta horizontal que se desplace imaginariamente por la gráfica puede cortar a ésta en varios puntos, lo que corresponde al hecho de que un mismo f(x) puede tener varias antimágenes … (como ocurre en el ejemplo 2)

III) CÁLCULO DEL Dom(f) DE LAS FUNCIONES MÁS HABITUALES *(pág. 34 libro de texto)*

Vamos a ver una serie de "recetas" para deducir el dominio de definición de una función a partir exclusivamente del tipo de expresión analítica, es decir, sin necesidad de dibujar su gráfica previamente.

III.1) Función polinómica: «Dom[f(x) polinómica]=$\mathbb{R}$»

La explicación es obvia: recordemos que el dominio de una función está formado por todos los x para los que existe imagen, y es obvio que, sea cual sea el polinomio, siempre va a existir imagen $\forall x \in \mathbb{R}$.

III.2) Función racional:

Recordar que una función racional es toda aquella que se puede expresar como un cociente, es decir, una función del tipo $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$

Pues bien, es obvio que para una función tal existirá imagen siempre que el denominador no se anule; por lo tanto: **«El Dom(f) de una función racional está formado por todos los x para los que no se anula el denominador»**. Expresado en lenguaje matemático:

$$\text{Dom}\left[f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}\right]=\left\{x \,/\, h(x)\neq 0\right\}$$

En la práctica, esto se traduce en ver cuándo se anula la expresión del denominador, es decir, resolver una ecuación; aquellos x que sean raíces del denominador tendremos que excluirlos del dominio:

Ejemplo 4: Obtener, razonadamente, el Dom(f) de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x)=\frac{2}{x-4}$

b) $f(x)=\frac{2}{x^2-4}$

c) $f(x)=\frac{2}{x^2+4}$

III.2) Función irracional:

Recordar que una función irracional es aquella en la que la x figura dentro de una raíz.

En este tipo de funciones es evidente que, si el índice de la raíz es par, entonces existirá imagen siempre que el radicando sea ≥ 0; ahora bien, si el índice es impar, no hay ningún problema en que el radicando sea negativo. Por lo tanto: **«El Dom(f) de una función irracional de índice par está formado por todos los x para los que su radicando es ≥0»**. Expresado en lenguaje matemático:

$$\text{Dom}\left[f(x)=\sqrt[\text{par}]{g(x)}\right]=\left\{x \,/\, g(x)\geq 0\right\}$$

En la práctica, esto se traduce en resolver una inecuación:

Ejemplo 5: Obtener, razonadamente, el Dom(f) de las siguientes funciones irracionales:

a) $f(x)=\sqrt{x-9}$

b) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

a) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-4x+3}$

b) $f(x)=\sqrt{x^2+9}$

c) $f(x)=\sqrt[3]{x-9}$

NOTA: Para hallar también analíticamente el Im(f) habría que obtener, previamente, la inversa de f(x) –como veremos en el apartado VIII–, y hallar a continuación el dominio de ésta; como ello puede resultar complicado, se recomienda preferiblemente hallar el Im(f) gráficamente.

IV) PROPIEDADES QUE SE DEDUCEN DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

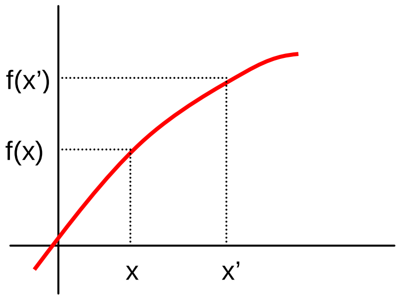
IV.1) Continuidad: **«Una función es continua si puede dibujarse su gráfica sin levantar el lápiz del papel[3]. En caso contrario, se dice que es discontinua»**

NOTA: La continuidad se indica siempre respecto al eje x.

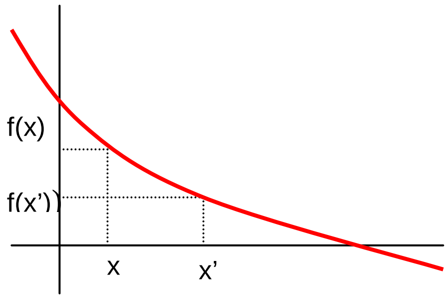
[3] En el tema 8 (Límites y continuidad) veremos una definición más formal de continuidad, que nos permitirá, además, obtener la continuidad de una función sin tener que representarla. De momento, nos contentaremos con esta definición "intuitiva", a partir de la gráfica.

IV.2) Crecimiento y decrecimiento. M y m:

Idea intuitiva:



FUNCIÓN CRECIENTE



FUNCIÓN DECRECIENTE

Def: «Una función es **creciente** en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple que, a medida que aumentan las x, aumentan también las imágenes f(x) correspondientes».

«Una f(x) es **decreciente** en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple que, a medida que aumentan las x, disminuyen las imágenes f(x) correspondientes».

Más formalmente:

f(x) es **creciente** en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple: $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$

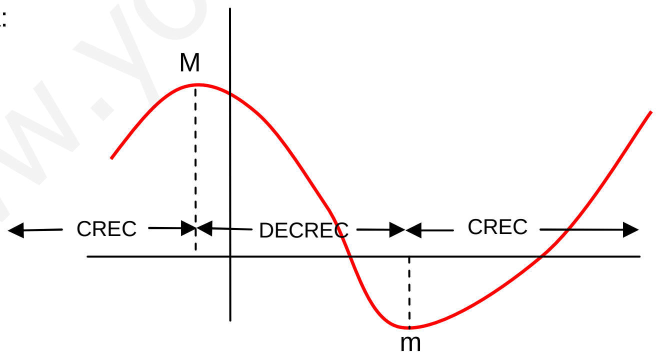
f(x) es **decreciente** en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple: $x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$

Observaciones:

1º) Para indicar que una función es creciente utilizaremos el símbolo ↗, y ↘ si es decreciente.

2º) En el caso de una función constante, la definición sería: $x < x' \Rightarrow f(x) = f(x')$

- En general, las funciones no son siempre crecientes o siempre decrecientes, sino que presentan intervalos de crecimiento o monotonía:



Def: «Una función presenta un **máximo** (M) en un punto si en las proximidades de dicho punto pasa de forma continua de creciente (↗) a decreciente (↘) ».

«Una función presenta un **mínimo** (M) en un punto si en las proximidades de dicho punto pasa de forma continua de decreciente (↘) a creciente (↗) ».

Más formalmente:

f(x) tiene un M en x=**a** si en todos los x próximos a ese punto se verifica f(x)<f(a)

f(x) tiene un m en x=**a** si en todos los x próximos a ese punto se verifica f(x)>f(a)

Observaciones:

1º) Los intervalos de crecimiento, también llamados de monotonía, se indican respecto al eje x.

2º) Los M y m que hemos definido se llaman extremos relativos[4].

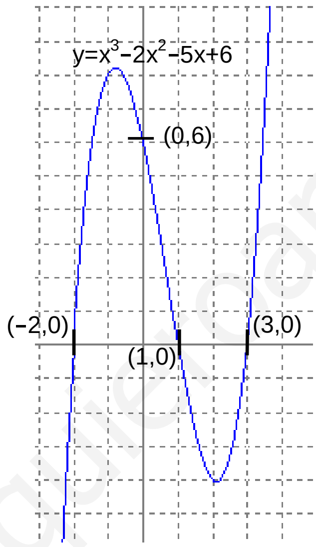
3º) Cuando veamos el último tema (Derivadas), veremos una forma rápida y cómoda de obtener los intervalos de crecimiento y los extremos relativos, no gráfica sino analíticamente.

4º) Puede haber varios **M** o **m**, no haber, o infinitos.

5º) Si la f(x) es continua, entre dos **M** siempre hay un **m**, y viceversa.

IV.3) Cortes con los ejes:

Observando la siguiente gráfica ejemplo:



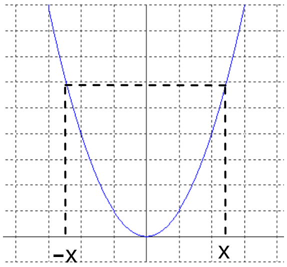
es fácil entender la forma de obtener analíticamente –es decir, sin necesidad de dibujar previamente su gráfica– los puntos donde una función corta a los ejes de coordenadas, y que se resume en la siguiente tabla:

CORTE CON:	¿CÓMO SE CALCULA?	¿CUÁNTOS CORTES PUEDE HABER?
eje x	Haciendo y=0 (Supone resolver una ecuación)	ninguno, uno, o varios
eje y	Sustituyendo x=0	uno o ninguno

[4] El máximo y mínimo que estamos definiendo se llaman extremos relativos o locales; el próximo curso los definiremos más formalmente, y también veremos que hay extremos absolutos…

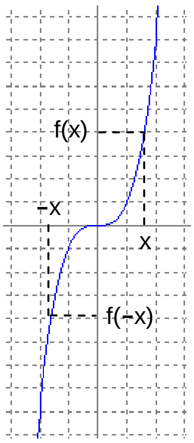
IV.4) Simetría:

a) f(x) PAR:



$f(-x)=f(x) \Rightarrow$ f(x) simétrica respecto al eje y $\big[$f(x) SIMÉTRICA PAR$\big]$

b) f(x) IMPAR:



$f(-x)=-f(x) \Rightarrow$ f(x) simétrica respecto al origen $\big[$f(x) SIMÉTRICA IMPAR$\big]$

Observaciones:

1º) En la práctica, para ver si una función es simétrica a priori, es decir, sin necesidad de representarla gráficamente, tenemos que hallar f(–x), es decir, reemplazar x por –x (¡utilizando, cuando sea necesario, paréntesis!), y simplificar la expresión resultante; a continuación, tenemos que ver si f(–x) corresponde a alguno de los siguientes tres casos:

$$f(-x)=\begin{cases} f(x) & \Rightarrow \text{PAR} \\ -f(x) & \Rightarrow \text{IMPAR} \\ \text{ninguno de los anteriores} & \Rightarrow \text{no es simétrica} \end{cases}$$

2º) Existen más tipos de simetría, pero nosotros este curso sólo vamos a ver estos dos.

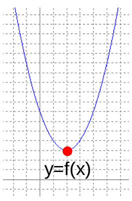
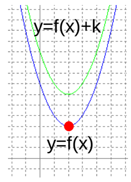
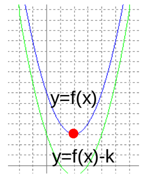
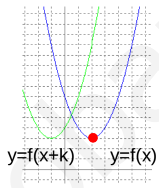
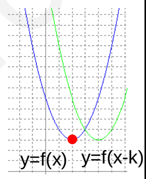
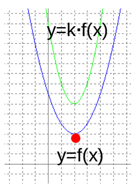
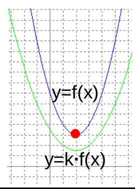
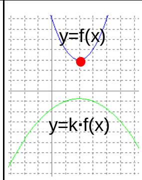
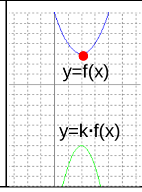
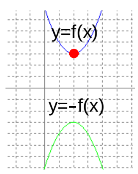
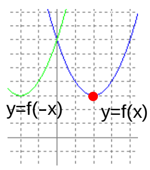
3º) Una función no tiene por qué ser siempre simétrica; de hecho, la mayoría de las funciones no lo son.

4º) **Utilidad de advertir** a priori –sin necesidad de hacer previamente una tabla de valores para dibujar su gráfica– **si una función es simétrica:** en caso de ser simétrica, podemos dedicar nuestros esfuerzos a la parte positiva del eje x, y dibujar cómodamente su mitad negativa sabiendo que será simétrica...

Por ejemplo, si una función es par y presenta un M(2,5), necesariamente tendrá otro en M(–2,5); ahora bien, si fuera impar, lo que presentaría es un m(–2,–5).

5º) Se utiliza el adjetivo "par" porque la función simétrica par típica es $y=x^2$, es decir, con exponente par (también tendría la misma simetría $y=x^4$, $y=x^2-2x^6$, etc.). De la misma forma, la función impar por antonomasia es $y=x^3$.

V) TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

<table>
<tr><th>FUNCIÓN ORIGINAL</th><th>TIPO DE TRANSFORMACIÓN</th><th>FUNCIÓN TRANSFORMADA</th><th colspan="2">GRÁFICA</th><th>RESULTADO</th></tr>
<tr><td rowspan="10"></td><td rowspan="4">TRASLACIONES</td><td rowspan="2">y=f(x)±k</td><td colspan="2"></td><td>TRASLACIÓN hacia ARRIBA</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>TRASLACIÓN hacia ABAJO</td></tr>
<tr><td rowspan="2">y=f(x±k)</td><td colspan="2"></td><td>TRASLACIÓN hacia la IZQUIERDA</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>TRASLACIÓN hacia la DERECHA</td></tr>
<tr><td rowspan="4">CONTRACCIONES o EXPANSIONES</td><td rowspan="4">y=k · f (x)</td><td>k>1</td><td></td><td>CONTRACCIÓN</td></tr>
<tr><td>0<k<1</td><td></td><td>EXPANSIÓN</td></tr>
<tr><td>−1<k<0</td><td></td><td>(Reflexión +) EXPANSIÓN</td></tr>
<tr><td>k<−1</td><td></td><td>(Reflexión +) CONTRACCIÓN</td></tr>
<tr><td rowspan="2">REFLEXIONES</td><td>y=−f(x)</td><td colspan="2"></td><td>REFLEXIÓN respecto al EJE X</td></tr>
<tr><td>y=f(−x)</td><td colspan="2"></td><td>REFLEXIÓN respecto al EJE Y</td></tr>
</table>

VI) ALGUNOS CASOS PARTICULARES DE FUNCIONES

VI.1) Hipérbolas[5]: Son curvas cuya expresión es de la forma $\boxed{y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\text{, donde } c\neq 0}$

A la vista de los ejercicios anteriores, para representar una hipérbola ya no es necesario hacer una tabla de valores, sino seguir los siguientes pasos:

1º) CORTES EJES: $x=0 \Rightarrow$

$y=0 \Rightarrow$

1º) CORTES EJES: A.H: $\boxed{y=\dfrac{a}{c}}$

A.V: $cx+d=0 \Rightarrow \boxed{x=-\dfrac{d}{c}}$

VI.2) Función "parte entera" f(x)=Ent(x)

«Es la función que asocia a cada x el entero más próximo situado a su izquierda en la recta real».

Por ejemplo: Ent (5,3)=5

Ent (5)=5

Ent (-4,7)=-5

Ent (-3)=-3

etc...

VI.3) Funciones a trozos

Para obtener la gráfica de una función definida a trozos, también llamada definida por ramas, hay que representar cada rama en su dominio particular de definición, como puede observarse en los siguientes ejercicios:

---

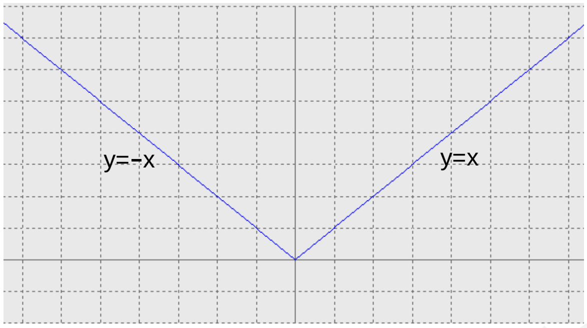
5 En realidad las hipérbolas que aquí definimos se llaman hipérbolas equiláteras; el caso más general se verá en el apdo. VIII.

VI.4) Función valor absoluto: *(pág. 251 libro de texto)*

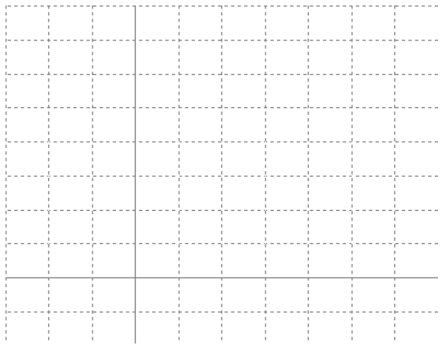
Definición:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, su representación gráfica será:

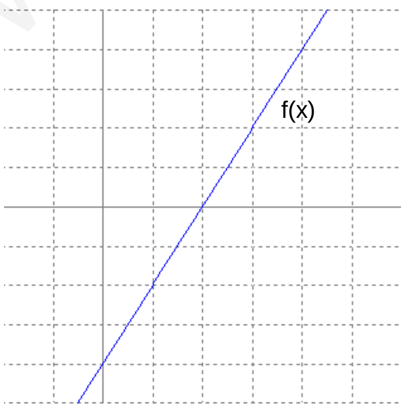


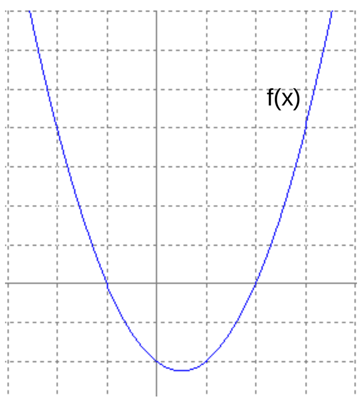
Ejemplo 6: Representar f(x)=|2x-4| y expresarla como función definida a trozos.



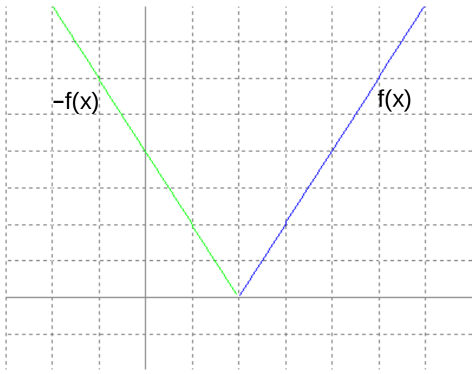
Conclusión: Pasos a seguir para representar |f(x)|:

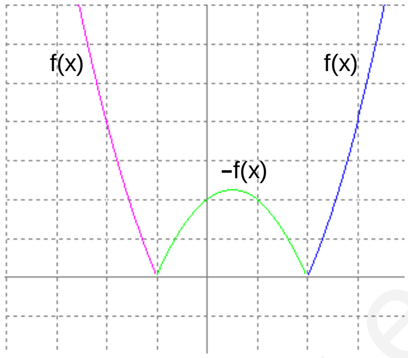
1º) Representar f(x):





2º) Las partes positivas (i.e. por encima del eje x) de f(x) se dejan igual, y las negativas se reflejan respecto al eje x:





Por lo tanto, la clave a la hora de dibujar $|f(x)|$ es ver cuándo se anula la función del interior del valor absoluto, es decir, f(x).

VII) COMPOSICIÓN DE FUNCIONES. FUNCIÓN INVERSA *(págs. 256 y 257 libro de texto)*

Supongamos $\left.\begin{array}{l} f(x) \\ g(x) \end{array}\right\}$

Se define: $\boxed{(g \circ f)(x)=g[f(x)]=\text{meter f en g}}$ Se lee "f compuesta con g"

$(f \circ g)(x)=f[g(x)]=\text{meter g en f}$ Se lee "g compuesta con f"

Más en detalle:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & f(x) \arrow[r, "g"] & g[f(x)] \end{tikzcd}$$

meter **f** en **g**

Ejemplo 7: Sean $\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2+1 \\ g(x)=\dfrac{1}{x} \end{array}\right\}$ $(g \circ f)(x)=g[f(x)]=$

$(f \circ g)(x)=f[g(x)]=$

meter **g** en **f**

¿Para qué se define todo esto? Para entender el concepto de **función inversa**:

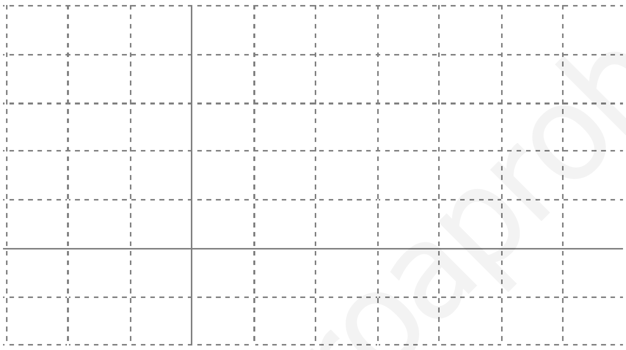
«Cuando dos funciones son tales que al componerlas entre sí se neutralizan (es decir, se obtiene x), entonces se dice que son inversas entre sí».

Notación: «A la función inversa de f se le denomina f^{-1}».

Ejemplo 8: Comprobar que $\left.\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{x} \\ f^{-1}(x)=x^2 \end{array}\right\}$ son inversas: $(f\circ f^{-1})(x)=$

$(f^{-1}\circ f)(x)=$

Representarlas gráficamente sobre los mismos ejes, y sacar conclusiones:



Conclusiones:

1º) **Se llama función inversa de f, y se designa como f^{-1}, a otra función que verifica:**

$$\boxed{\begin{array}{c} (f\circ f^{-1})(x)=x \\ (f^{-1}\circ f)(x)=x \end{array}}$$

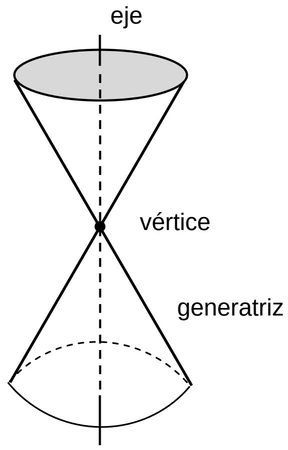
2º) «La gráfica de $\mathbf{f^{-1}}$ se obtiene a partir de la de **f** intercambiando la **x** y la **y** $\Rightarrow$ las gráficas de $\mathbf{f^{-1}}$ y **f** son simétricas respecto a la recta y=x, bisectriz del 1^er^ cuadrante».

Método para hallar analíticamente la función inversa de otra: **1º)** Intercambiar x y

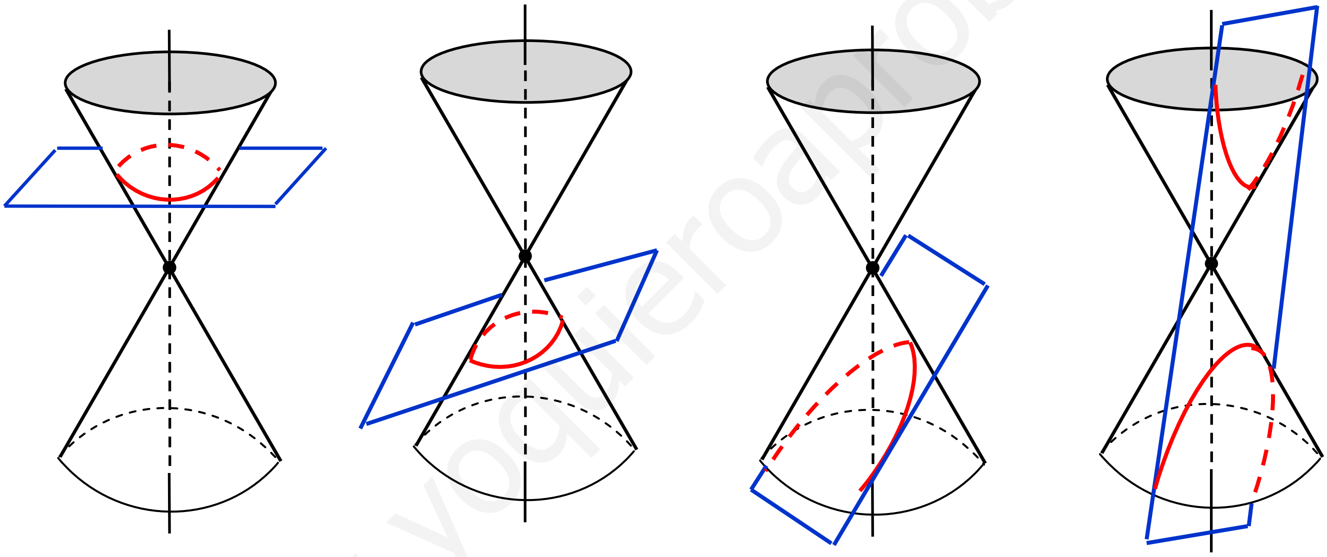
2º) Despejar la nueva **y**

CÓNICAS

Si giramos una recta (llamada **generatriz**) alrededor de un eje, se obtiene la superficie cónica de la figura, formada por dos conos opuestos por el vértice:

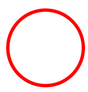
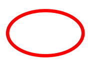
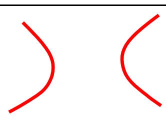


Si dicha superficie es cortada por un plano en diferentes posiciones se obtendrá toda una variedad de cónicas, que se pueden concretar básicamente en 4 casos:



CIRCUNFERENCIA | ELIPSE | PARÁBOLA | HIPÉRBOLA

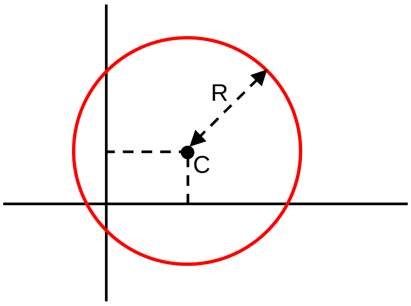
Todo ello se puede resumir en la siguiente tabla:

CÓNICAS CERRADAS	**CIRCUNFERENCIA**		El plano que corta es ⊥ al eje (y no pasa por el vértice)	Si el plano pasa por el vértice, la cónica degenerada es UN PUNTO
	ELIPSE		El plano que corta es oblicuo al eje y corta a todas las generatrices (y no pasa por el vértice)	
CÓNICAS ABIERTAS	**PARÁBOLA**		El plano que corta es // a una de las generatrices –por lo tanto corta a un solo cono– (y no pasa por el vértice)	Si el plano pasa por el vértice, la cónica degenerada es UNA RECTA
	HIPÉRBOLA		El plano corta a los dos conos (y no pasa por el vértice)	Si el plano pasa por el vértice, la cónica degenerada son DOS RECTAS

Veamos a continuación sucintamente las ecuaciones de estas curvas:

VIII.1) Circunferencia: *(págs. 216 y 217 libro de texto)*

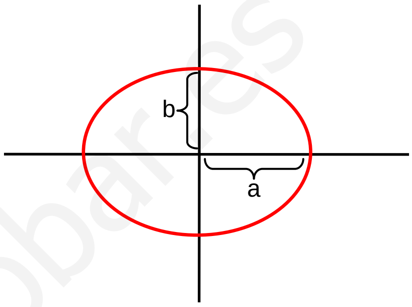
Su ecuación es de la forma[6] $\boxed{x^2+y^2+Ax+By+C=0}$



VIII.2) Elipse: *(pág. 223 libro de texto)*

La ecuación reducida (i.e. centrada en los ejes) de la elipse es

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$



donde **a**: semieje mayor

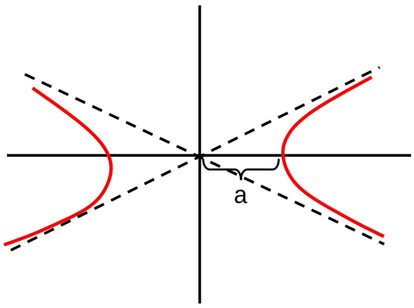
b: semieje menor

Nótese que la circunferencia es un caso particular de la elipse.

VIII.3) Hipérbola:

La ecuación reducida (i.e. centrada en los ejes) de la hipérbola es

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$



donde **a**: distancia de un vértice al origen

Nótese que la hipérbola tiene dos asíntotas[7].

VIII.1) Parábola: Ya hemos visto repetidamente a lo largo del tema que toda curva de 2º grado es una parábola, y viceversa:

$$\boxed{y=ax^2+bx+c}$$

---

[6] En realidad, para que se trate de una circunferencia, los coeficientes A, B y C deben cumplir una determinada relación, la cual por cierto nos permite conocer el centro C y el radio R de la circunferencia; pero todo ello excede los contenidos del presente curso…

[7] Si éstas son $\perp$, entonces la hipérbola se llama equilátera, y su ecuación es de la forma $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$; estas son precisamente las hipérbolas que habíamos visto en el apartado VI.1.

EJERCICIOS de FUNCIONES

Concepto de función:

1. Dada $f(x)=\sqrt{x}$, se pide: **a)** Razonar que se trata de una función.

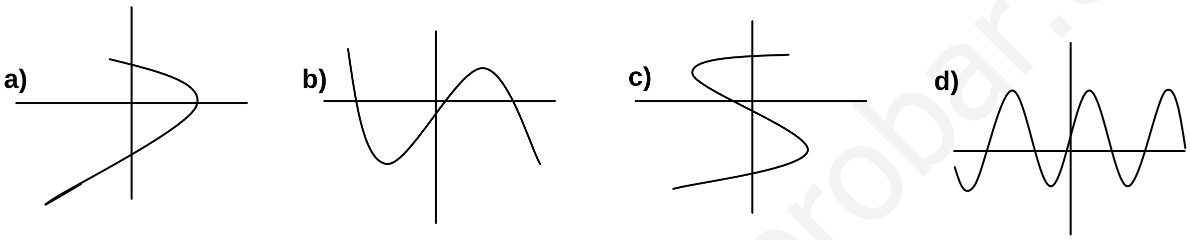
b) Calcular f(4), f(1), f(0), f(−9), f(1/4), f(2) y f(√2)

c) Hallar la antiimagen de 3, de 25 y de −4

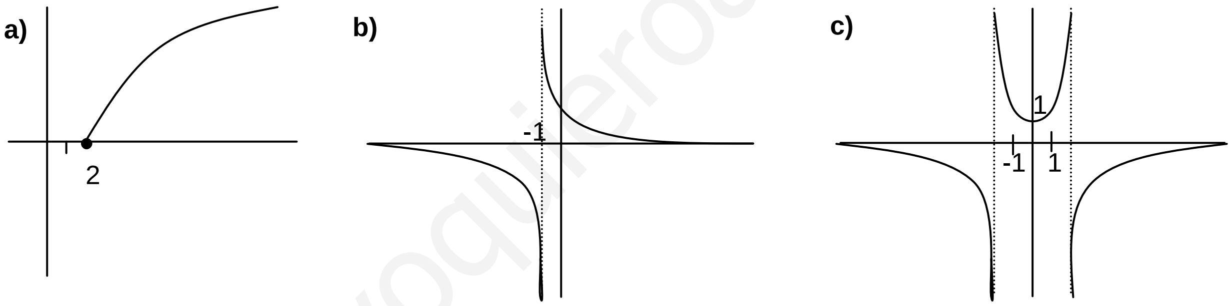
d) Razonar cuál es su Dom(f) e Im(f)

2. Ídem para f(x)=2x+1

3. ¿Cuáles de estas representaciones corresponden a la gráfica de una función? (Razonar la respuesta):



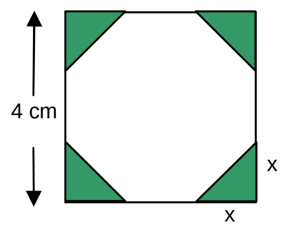
4. ¿Cuál es el Dom(f) e Im(f) de cada una de estas funciones?:



5. De un cuadrado de 4 cm de lado, se cortan en las esquinas triángulos rectángulos isósceles cuyos lados iguales miden x.

a) Escribir el área del octógono que resulta, en función de x

b) ¿Cuál es el dominio de esa función? ¿Y su recorrido?



Gráfica de una función:

6. Para cada una de las funciones que figuran a continuación se pide:

i) Tabla de valores apropiada y representación gráfica.

ii) Dom(f) e Im(f) a la vista de la gráfica.

iii) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to \infty} f(x)$

a) $f(x)=3x+5$

b) $f(x)=x^2-4x+3$ ¿vértice?

c) $f(x)=x^3$

d) $f(x)=x^4$

e) $f(x)=2$

f) $f(x)=\sqrt{x-9}$

g) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ¿asíntotas? ¿ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$?

h) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ ¿asíntotas? ¿ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$?

i) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ ¿asíntotas?

Cálculo del Dom(f):

7. Obtener **analíticamente**, de forma razonada, el Dom(f) de las funciones del ejercicio anterior, comprobando que se obtiene el mismo resultado que gráficamente.

8. Sin necesidad de representarlas, hallar **analíticamente** el Dom(f) de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^3+x^2-3x+1$

b) $f(x)=\dfrac{8x}{x+5}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-8}$

d) $f(x)=\dfrac{2}{4x-x^2}$

e) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-16}$

f) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+16}$

g) $f(x)=\sqrt{x+5}$

h) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+5}}$

i) $f(x)=\sqrt{2x-5}$

j) $f(x)=\sqrt{4-x}$

k) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

l) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-8}$

m) $f(x)=\sqrt{x^2+5x+4}$

n) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-16}}$

o) $f(x)=\dfrac{x+1}{(2x-3)^2}$

p) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x^2-x-6}}$

q) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x-12}}$

r) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+4}$

s) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

t) $f(x)=\dfrac{14}{x^2+2x+1}$

u) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+5x+4}$

v) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}$

*(Soluc: **a)** IR; **b)** IR-[-5}; **c)** IR-{-2,4}; **d)** IR-{0,4}; **e)** IR-[±4}; **f)** IR; **g)** [-5,∞); **h)** (-5,∞); **i)** [5/2,∞); **j)** (-∞,4]; **k)** (-∞ ,-3]U[3,∞); **l)** (-∞,-4]U[2,∞); **m)** (-∞,-4]U[-1,∞); **n)** (-4,0]U(4,∞); **o)** IR-{3/2}; **p)** [-3,-2)U(3,∞); **q)** (4,∞); **r)** IR; **s)** (-∞,2)U(3,∞); **t)** IR-{-1}; **u)** IR; **v)** IR)*

Propiedades que se deducen de la gráfica de una función:

9. A la vista de sus gráficas, indicar la continuidad de las funciones del ejercicio 6.

10. A la vista de sus gráficas, indicar los intervalos de crecimiento y los posibles M y m de las funciones del ejercicio 6.

11. Hallar analíticamente los posibles puntos de corte con los ejes de las funciones del ejercicio 6, y comprobar que lo obtenido coincide con la gráfica.

12. Hallar los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones (en el caso de las cuatro primeras, dibujar además, únicamente con esa información, la gráfica):

a) $y=2x-6$

b) $f(x)=x^2+2x-3$

c) $f(x)=x^2+x+1$

d) $f(x)=x^3-x^2$

e) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$

f) $f(x)=\sqrt{2x+4}$

g) $f(x)=\sqrt{2x}+4$

h) $y=\dfrac{x+4}{2x+2}$

i) $y=\dfrac{x^2-3}{x^2-1}$

j) $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$

k) $y=\sqrt{x^2+9}$

l) $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

m) $y=\dfrac{x^2+4}{x+2}$ | **n)** $f(x)=\dfrac{4}{x-4}$ | **o)** $f(x)=x^4-1$

*(Soluc: **a)** (3,0),(0,-6); **b)** (-3,0),(1,0),(0,-3); **c)** (0,1); **d)** (0,0),(1,0); **e)** (-2,0),(2,0),(0,-2); **f)** (-2,0),(0,2); **g)** (0,4); **h)** (-4,0),(0,2); **i)** (√3,0),(-√3,0),(0,3); **j)** (-2,0),(1,0); **k)** (0,3); **l)** (1,0),(2,0),(3,0),(0,-6); **m)** (0,2); **n)** (0,-1); **o)** (-1,0),(1,0),(0,-1))*

13. Hallar analíticamente la posible simetría de las funciones del ejercicio 6, y comprobar que lo obtenido coincide con la gráfica.

14. Hallar la posible simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^4$
b) $f(x)=x^3$
c) $f(x)=x^4-x^2$
d) $f(x)=x^2-x^3$
e) $f(x)=2x-3$
f) $f(x)=x^5-x^3$
g) $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$
h) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$
i) $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$
j) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+6}$
k) $y=\dfrac{3x}{2x^2-1}$
l) $f(x)=\dfrac{x}{x-5}$
m) $y=\dfrac{5x^2}{x-1}$
n) $f(x)=x+\dfrac{x^2+1}{x^2+3}$
o) $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2+3}$

*(Soluc: **a)** par; **b)** impar; **c)** par; **d)** no simétrica; **e)** no simétrica; **f)** impar; **g)** par; **h)** impar; **i)** impar; **j)** par; **k)** impar; **l)** no simétrica; **m)** no simétrica; **n)** no simétrica; **o)** no simétrica)*

15. a) ¿Una función puede ser simétrica par e impar al mismo tiempo? Razonar la respuesta.

b) Demostrar que toda función impar definida en el origen necesariamente pasa por éste

16. Estudiar los puntos de corte con los ejes y la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{4}{x^2+1}$ **b)** $y=\dfrac{x+3}{x^2+1}$ **c)** $y=\dfrac{14}{x^3}$ **d)** $y=\dfrac{x^2-9}{x^2+1}$ **e)** $f(x)=\dfrac{4x+12}{3x+6}$

Estudio completo de una función (I):

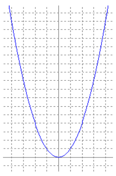
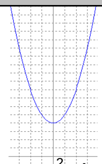
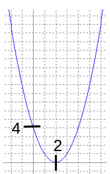
17. Dada $f(x)=2x^3-3x^2$ se pide: **i)** Dom(f) **ii)** Posible simetría. **iii)** Posibles cortes con los ejes. **iv)** Tabla de valores apropiada y representación gráfica. **v)** Intervalos de crecimiento. Posibles M y m. **vi)** ¿Es continua? **vii)** A la vista de la gráfica, indicar su Im(f) **viii)** Ecuación de las posibles asíntotas. **ix)** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ **x)** Hallar la antiimagen de y=–1

18. Ídem para:

a) $f(x)=x^3-3x$ Antiimagen de y=2
b) $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ Antiimagen de y=1
c) $y=x^4-2x^2$ Antiimagen de y=–1/2
d) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ Antiimagen de y=4/5
e) $f(x)=x^3-3x^2$ Antiimagen de y=–2
f) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ Antiimagen de y=2
g) $y=-x^3+12x$ Antiimagen de y=-11
h) $f(x)=\dfrac{9}{x^2-9}$ Antiimagen de y=–1/3
i) $f(x)=\dfrac{16-8x}{x^2}$ Antiimagen de y=–2
j) $y=\dfrac{x}{x^2+x+1}$ Antiimagen de y=–1/2
k) $y=\dfrac{x}{x^2-x+1}$ Antiimagen de y=–1/2
l) $y=\dfrac{4x}{(x-1)^2}$
m) $y=\sqrt{-x^2+4x+5}$

Transformaciones de funciones:

19. Completar la siguiente tabla (véase el primer ejemplo):

FUNCIÓN ORIGINAL	TIPO DE TRANSFORMACIÓN		FUNCIÓN TRANSFORMADA	RESULTADO
 $y=x^2$	TRASLACIONES	$f(x) \pm k$	 $y=x^2+4$	**TRASLACIÓN hacia ARRIBA**
			$y=x^2-2$	**TRASLACIÓN hacia ABAJO**
		$f(x \pm k)$	$y=(x-2)^2$	**TRASLACIÓN hacia la DERECHA**
			$y=(x+3)^2$	**TRASLACIÓN hacia la IZQUIERDA**
	CONTRACCIONES o EXPANSIONES		$y=2x^2$	**CONTRACCIÓN**
			$y=\frac{1}{3}x^2$	**EXPANSIÓN**
			$y=-3x^2$	**(Reflexión +) CONTRACCIÓN**
 $y=x^2-4x+4$	REFLEXIONES		$y=-(x^2-4x+4)=-x^2+4x-4$	**REFLEXIÓN respecto al EJE X**
			$y=(-x)^2-4(-x)+4=x^2+4x+4$	**REFLEXIÓN respecto al EJE Y**

20. a) A partir de la gráfica de $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, representar las gráficas de $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+3$, $f(x)=\sqrt[3]{(x+3)^2}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-2$ y $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$ (cada una en distintos ejes), indicando el nombre de la transformación obtenida.

b) Ídem con $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ y las funciones $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$, $f(x)=\dfrac{1}{3(x^2+1)}$ y $f(x)=\dfrac{-1}{x^2+1}$

c) Ídem con $f(x)=\sqrt[3]{x}$ y las funciones $f(x)=\sqrt[3]{-x}$ y $f(x)=-\sqrt[3]{x}$

21. A partir de la gráfica de la hipérbola $f(x)=\dfrac{1}{x}$, representar sucesivamente (cada una en distintos ejes) las hipérbolas $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ y $f(x)=\dfrac{x+3}{x+2}=1+\dfrac{1}{x+2}$

22. a) Representar gráficamente la hipérbola $f(x)=-\dfrac{1}{x-2}+3$ partiendo de la gráfica de $f(x)=\dfrac{1}{x}$

b) Ídem con $f(x)=\sqrt[3]{-x+2}$, partiendo de $f(x)=\sqrt[3]{x}$

23. Representar la función f(x)=Ent(x)

Estudio completo de una función (II):

24. Dadas las siguientes **funciones definidas a trozos** se pide: **i)** Gráfica. **ii)** Dom(f) e Im(f) **iii)** Posibles cortes con los ejes. **iv)** Intervalos de crecimiento. Posibles M y m. **v)** Continuidad. **vi)** Ecuación de las posibles asíntotas. **vii)** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ **viii)** Responder, además, a las preguntas particulares de cada apartado:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\in(-\infty,2) \\ x & \text{si } x\in[2,\infty) \end{cases}$

¿f(1), f(2) y f(3)?
¿Antiimagen de y=3?

b) $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{si } x\in(-\infty,2) \\ x-2 & \text{si } x\in[2,4] \\ 5 & \text{si } x\in(4,\infty) \end{cases}$

Hallar la antiimagen de y=16
Hallar la antiimagen de y=1

c) $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x<-1 \\ 1-2x & \text{si } -1\le x<1 \\ 3x-1 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

¿f(1) y f(−1)?
¿Antiimagen de y=2?
¿Antiimagen de y=−3?

d) $f(x)=\begin{cases} 5x-2 & \text{si } x\le 1 \\ -2 & \text{si } x=2 \\ x/2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

¿f(1), f(3/2), f(2) y f(−3)?
¿Antiimagen de y=1?
¿Antiimagen de y=2?
¿Antiimagen de y=18?

e) $f(x)=\begin{cases} -3 & \text{si } -5\le x<0 \\ x^2 & \text{si } 0\le x<2 \\ x+2 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$ ¿f(-6), f(0)?

f) $f(x)=\begin{cases} x/2 & \text{si } x\in(-\infty,1] \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x\in(1,\infty) \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & \text{si } x<0 \\ -2 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{4}{x-2} & \text{si } x>0 \end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases} -x-2 & \text{si } x\in(-\infty,2] \\ x^2-4x & \text{si } x\in(2,\infty) \end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{x-5} & \text{si} \quad x\le 0\\ \sqrt{x+1} & \text{si} \quad 0<x\le 3\\ \dfrac{10}{x+2} & \text{si} \quad x>3\end{cases}$

¿f(0) y f(3)?
¿Qué x tiene por imagen y=0?
¿Qué x tiene por imagen y=3/2?
¿Qué x tiene por imagen y=1/2?

j) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<0\\ 3x-x^2 & \text{si} \quad 0\le x<3\\ x-4 & \text{si} \quad 3\le x<6\\ 0 & \text{si} \quad x>6\end{cases}$

¿Vértice de la parábola?

k) $f(x)=\begin{cases}x^2+8x+7 & \text{si} \quad x\le -2\\ \sqrt{x+2} & \text{si} \quad -2<x\le 2\\ \dfrac{5x\text{-}18}{2x-8} & \text{si} \quad x>2\end{cases}$

Hallar la antiimagen de 1 y –8

l) $f(x)=\begin{cases}x+4 & \text{si} \quad x<-1\\ x^2-2x & \text{si} \quad -1\le x<2\\ 0 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$

Hallar la antiimagen de y=1

m) $f(x)=\begin{cases}x+15 & \text{si} \quad x\le -2\\ x^2-4x+1 & \text{si} \quad -2<x\le 4\\ -x+7 & \text{si} \quad x>4\end{cases}$

Hallar la antiimagen de y=6

n) $f(x)=\begin{cases}x+10 & \text{si} \quad x\le -4\\ x^2+2x & \text{si} \quad -4<x\le 1\\ 3/x & \text{si} \quad x>1\end{cases}$

Hallar qué x tiene por imagen 0

o) $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+1 & \text{si} \quad x\le 0\\ 1 & \text{si} \quad 0<x<4\\ x-3 & \text{si} \quad x\ge 4\end{cases}$

Hallar la antiimagen de y=4

p) $f(x)=\begin{cases}-x+4 & \text{si} \quad x\le -2\\ x^2-x-6 & \text{si} \quad -2<x\le 6\\ 24 & \text{si} \quad x>6\end{cases}$

Hallar la antiimagen de y=14

q) $f(x)=\begin{cases}x^2-4 & \text{si } x\in(-\infty,2)\\ x-2 & \text{si } x\in[2,5]\\ -x+6 & \text{si } x\in(5,\infty)\end{cases}$

¿Cuáles son las antiimágenes de 1 y 16?

r) $f(x)=\begin{cases}x^2+8x+7 & \text{si} \quad x<-3\\ x-5 & \text{si} \quad -3\le x<2\\ \sqrt{x-2} & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$

Hallar la antiimagen de -5

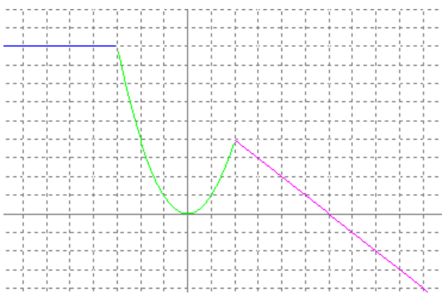
s) $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+3 & \text{si} \quad x<1\\ x-1 & \text{si} \quad 1<x\le 4\\ x^2-4x+3 & \text{si} \quad x>4\end{cases}$

t) $f(x)=\begin{cases}x+5 & \text{si} \quad x<-3\\ x^2+2x-3 & \text{si} \quad -3\le x<2\\ \dfrac{5}{x-1} & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$

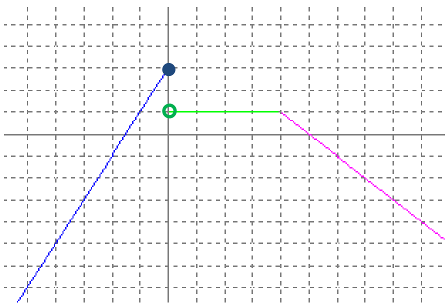
Hallar la antiimagen de 1

25. Hallar la expresión analítica –es decir, como función definida por ramas– de las siguientes funciones:

a)



b)



26. Dadas las siguientes **funciones valor absoluto** se pide: **i)** Definición analítica por ramas. **ii)** Gráfica. **iii)** Dom(f) e Im(f) **iv)** Posibles cortes con los ejes. **v)** Intervalos de crecimiento. Posibles M y m. **vi)** Continuidad. **vii)** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to \infty} f(x)$

a) $f(x)=|x-1|$ **b)** $f(x)=|-3x+3|$ **c)** $f(x)=|3x+6|$ **d)** $f(x)=|x^2-5x+6|$

e) $f(x)=|x^2-4x+3|$ **f)** $f(x)=|-x^2-4x-5|$ **g)** $f(x)=\left|\frac{1}{2}x^2-x-4\right|$ **h)** $f(x)=|x^2-4x+5|$

i) $f(x)=|-x^2+x-1|$ **j)** $f(x)=|x^2-4x|$ **k)** $f(x)=\frac{|x|}{x}$ **l)** $f(x)=|9-x^2|$

m) $f(x)=|x|+x$ **n)** $f(x)=|x+1|+|x-1|$ **o)** $f(x)=|3x+6|-|2x-2|$ **p)** $f(x)=\sqrt{\frac{|x|}{x}}$

q) $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}+1 & \text{si } x<2 \\ |2x-6| & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$ **r)** $f(x)=\begin{cases} |x^2+4x+3| & \text{si } x<-1 \\ (x-1)^2-2 & \text{si } x\geq -1 \end{cases}$

27. A partir de la gráfica de $f(x)=|x|$, representar sucesivamente (cada una en distintos ejes) $f(x)=|x|+3$, $f(x)=|x-2|$, $f(x)=-|x|$, $f(x)=|2x|$ y $f(x)=\left|\frac{x}{3}\right|$

Composición de funciones. Función inversa:

28. Hallar $f\circ g$ (léase *g compuesta con f*) y $g\circ f$ (*f compuesta con g*) en los siguientes casos:

a) $f(x)=3x-5$ $g(x)=1/x$
b) $f(x)=x^2$ $g(x)=3x-5$
c) $f(x)=1/x$ $g(x)=\sqrt{x}$
d) $f(x)=x^2$ $g(x)=\sqrt{x}$
e) $f(x)=\sqrt{x}$ $g(x)=\frac{1}{x^2-4}$

29. ¿Se puede componer una función consigo misma? ¿Qué obtenemos si hacemos $(f\circ f)(x)$ para f(x)=2x+1? Hacerlo también para $f(x)=\frac{1}{x}$ y $f(x)=\frac{1-x}{x+1}$

30. Comprobar que las siguientes funciones son inversas y representarlas gráficamente sobre los mismos ejes:

a) $f(x)=2x$ $g(x)=\frac{x}{2}$ **b)** $f(x)=x^3$ $g(x)=\sqrt[3]{x}$ **c)** $f(x)=x+1$ $g(x)=x-1$

¿Qué conclusión se obtiene a la vista de sus gráficas?

31. Hallar la función inversa de:

a) $y=\sqrt{x+4}$
b) $y=3+2(x-1)$
c) $y=2\sqrt{x+1}$
d) $y=3/x$ *(Soluc: coincide con f^{-1})*
e) $y=x^2-1$
f) $f(x)=\frac{1}{2x+3}$
g) $y=2+\sqrt{x}$
h) $y=\frac{x+1}{3x-1}$ *(Soluc: coincide con f^{-1})*

Problemas de aplicación:

32. Un técnico de una compañía ha calculado que los costes de producción (en €) de un determinado producto vienen dados por la siguiente expresión:

$$C(x)=x^2+20x+40000$$

donde x representa el número de unidades producidas. Por otra parte, cada unidad se vende al público a un precio de 520 €.

a) Expresar, en función del número de artículos producidos x, el beneficio y representarlo gráficamente.

b) ¿Cuántas unidades hay que producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

(Sol: 250 unidades; 22500 €)

33. La dosis de un fármaco comienza con 10 mg y cada día debe aumentar 2 mg hasta llegar a 20 mg. Debe seguir 15 días con esa cantidad y a partir de entonces ir disminuyendo 4 mg cada día.

a) Representar la función que describe este enunciado y determinar su expresión analítica, como función definida por ramas.

b) Indicar cuál es su dominio y recorrido. *(Sol: Dom(f)=[0,25]; Im(f)=[0,20])*

Cónicas:

34. Dadas las siguientes expresiones, razonar en cada caso si corresponden a una circunferencia y, en caso afirmativo, dibujar su gráfica e indicar el centro y el radio:

a) $x^2+y^2+25=0$ *(Soluc: C(0,0); R=5)*

b) $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ *(Soluc: C(2,−1); R=3)*

c) $x^2+y^2-2xy+8=0$

d) $x^2+y^2-10x+6y-15=0$ *(Soluc: C(5,−3); R=7)*

e) $x^2+2y^2-3x-6y+5=0$

f) $x^2+y^2-4x+2y=0$

35. Dadas las siguientes expresiones, razonar en cada caso si corresponden a una elipse y, en caso afirmativo, obtener su gráfica:

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y}{4}=1$

c) $x^2+4y^2=4$

d) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$

e) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

f) $25x^2+9y^2=225$

36. Hallar la ecuación reducida o canónica de una elipse de semieje mayor 4 y menor 3. Comprobarlo gráficamente.

37. Representar las siguientes hipérbolas:

a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

b) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{36}=1$

c) $\frac{x^2}{9}-y^2=1$

d) $4y^2-x^2=4$

e) $4x^2-9y^2=36$

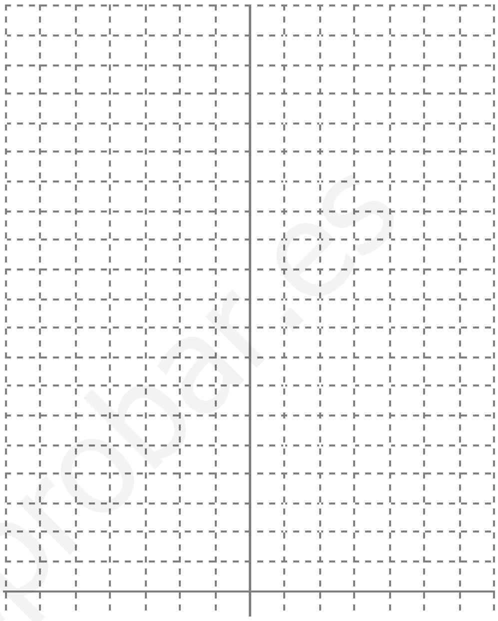
f) $2x^2-y^2+2=0$

FUNCIÓN EXPONENCIAL de BASE a $f(x)=a^x$

«Es aquella función en la que la variable independiente figura en un exponente, es decir, toda función[1] del tipo $f(x)=a^x$, donde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$».

Ejemplo 1: Construir una tabla de valores apropiada y representar $f(x)=2^x$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=2^x$									



Consecuencias:

1º) Signo de f(x):

2º) Crecimiento:

3º) Dom(f)=   Im(f)=

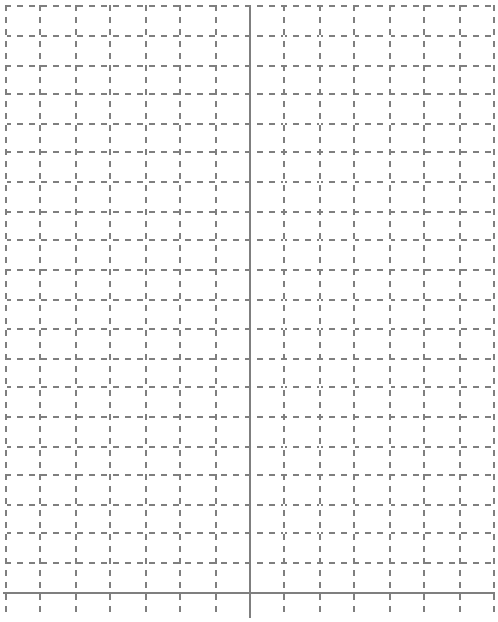
4º) Asíntotas:

5º) $\lim_{x\to\infty} 2^x =$

$\lim_{x\to-\infty} 2^x =$

Ejemplo 2: Ídem con $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0{,}5^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$									



Consecuencias:

1º) Signo de f(x):

2º) Crecimiento:

3º) Dom(f)=   Im(f)=

4º) Asíntotas:

5º) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x =$

$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x =$

[1] En la siguiente página se explica por qué se impone que $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

Definición: Función exponencial de base a>0 (a≠1): $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$x \longrightarrow a^x$

NOTA: Se considera a>0 porque, en caso contrario, obtendríamos una función poco "congruente"; por ejemplo, para $f(x)=(-2)^x$:

$$f(2)=(-2)^2=4>0$$

Pero $f(3)=(-2)^3=-8<0$

$$f(1/2)=(-2)^{1/2}=\sqrt{-2}=\nexists$$

etc.

Propiedades de la función exponencial:

1º) La función a^x siempre pasa por (0,1) y (1,a)

2º) $a>1 \Rightarrow a^x$ CRECIENTE

$a<1 \Rightarrow a^x$ DECRECIENTE

3º) $Dom(f)=\mathbb{R}$, es decir, «**La función exponencial a^x siempre está definida**[2]»

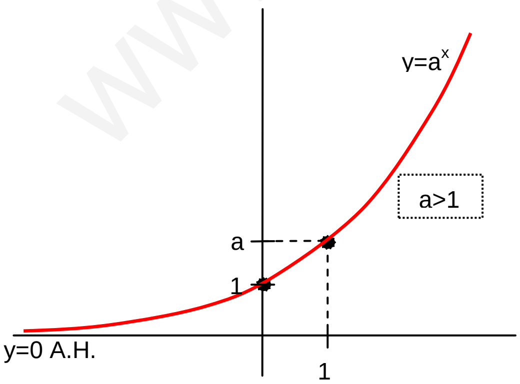
4º) $Im(f)=\mathbb{R}^+-\{0\}$, o dicho de otra forma, $a^x>0\ \forall x\in\mathbb{R}$, es decir, «**La función exponencial siempre es** estrictamente **positiva**»

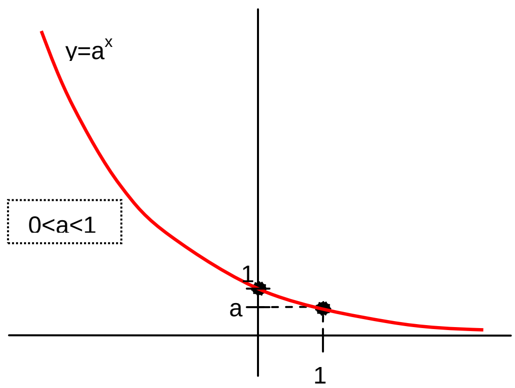
5º) $a>1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0^+ \qquad \lim\limits_{x\to\infty} a^x=\infty$

$0<a<1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} a^x=\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} a^x=0^+$

6º) y=0 A.H., es decir, «**La función exponencial a^x siempre presenta el eje x como A.H.**[3]»

- Todo lo visto hasta ahora se puede resumir en las siguientes gráficas:





[2] Nótese que nos referimos a a^x; por ejemplo, $a^{1/x}$ no estará definida en x=0

[3] De nuevo, nos referimos a a^x; por ejemplo, $a^{1/x}$ presenta la A.H. y=1

■ **Caso particular:** Cuando la base es $e \simeq 2{,}718281828459\ldots$ (cte. de Euler[4]), tenemos la función exponencial de base e, utilizada muy frecuentemente. (Construiremos su gráfica en el ejercicio 1 del final del tema).

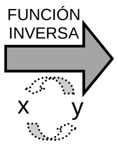
II) FUNCIÓN LOGARÍTMICA de BASE a $f(x)=\log_a x$

La enorme complejidad de los cálculos que se presentaron durante el siglo XVI en los estudios astronómicos dio lugar a numerosos intentos de simplificación, entre ellos la sustitución de multiplicaciones por sumas. Se debe al escocés John Napier (en latín, Neper) la invención en aquella época de los logaritmos, lo cual trajo consigo la función logarítmica. En cambio, el reciente desarrollo de la electrónica ha originado que en la actualidad prácticamente haya desaparecido la importancia de su utilización como técnica de cálculo, aunque no como concepto matemático.

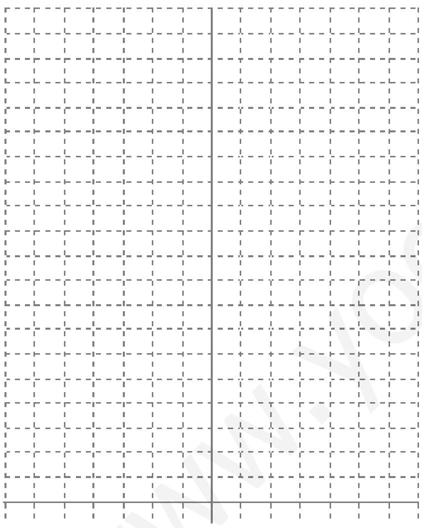
Definición: «La función logarítmica $y=\log_a x$ (con $a>0$ y $a\neq 1$) es la inversa de la función exponencial $y=a^x$»

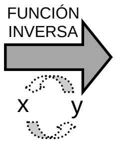
Ejemplo 3: Utilizando la tabla de la función $y=2^x$ (ejemplo 1), obtener la tabla de $y=\log_2 x$ y su gráfica.

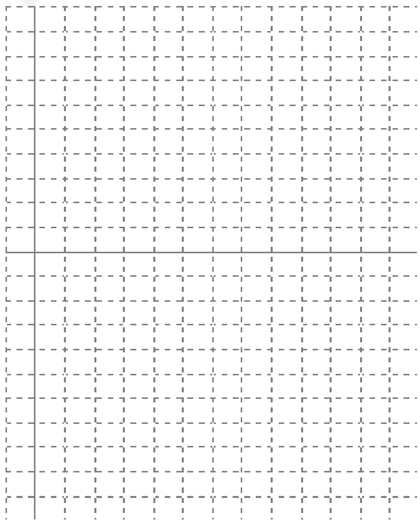
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$y=2^x$									



x									
$y=2^x$									







---

[4] El número e, llamado constante de Euler –en honor al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783)–, surge como límite de la siguiente sucesión:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Por ejemplo,

$n=1 \Rightarrow a_1=2$	$n=100 \Rightarrow a_{100}=$
$n=2 \Rightarrow a_2=1{,}5^2=2{,}25$	$n=1\,000 \Rightarrow a_{1\,000}=$
$n=3 \Rightarrow a_3=1{,}33^3=2{,}3703$	$n=10\,000 \Rightarrow a_{10\,000}=$
$n=4 \Rightarrow a_4=1{,}25^4=$	$n=100\,000 \Rightarrow a_{100\,000}=$
$n=5 \Rightarrow a_5=$	$n \to \infty \Rightarrow \boxed{e \simeq 2{,}718281828459\ldots}$

Se trata de un número irracional, es decir, consta de ∞ cifras decimales no periódicas.

Nótese en la tabla que: $\log_2 4=2 \quad (\text{pq } 2^2=4)$

$\log_2 8=3 \quad (\text{pq } 2^3=8)$

$\log_2 16=4 \quad (\text{pq } 2^4=16)$

$\vdots$

Y, en general:

Definición: «El logaritmo en base **a** de un número es el exponente al que hay que elevar la base para obtener dicho número»

argumento o antilogaritmo

$$\boxed{\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N}$$

base logaritmo

Ejemplos: $\log_3 81=$ pq

$\log_{10} 100=$ pq

$\log_2 64=$ pq

$\log_2 1/2=$ pq

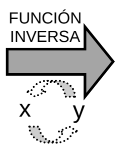
$\log_9 3=$ pq

$\log_3 (-9)=$ pq

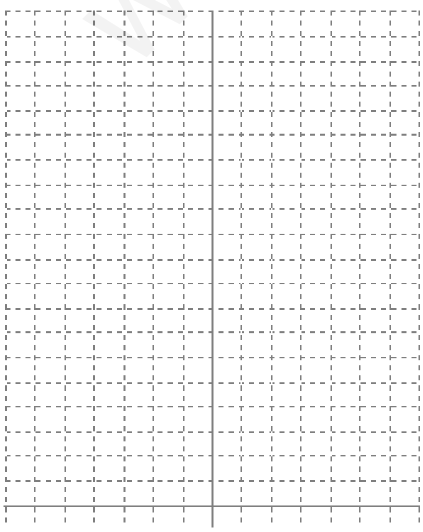
Nótese que en todo esto hay cierta analogía con la conocida definición de $\sqrt[n]{a}=x$ como inversa de x^n

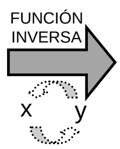
Ejemplo 4: Utilizando la tabla de la función $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (ejemplo 2), obtener la tabla de $y=\log_{1/2}x$ y su gráfica.

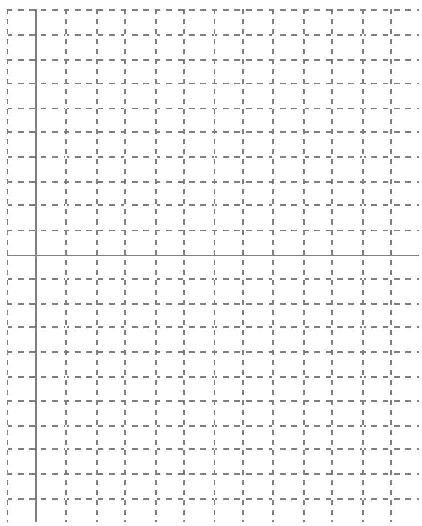
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$									



x									
$y=\log_{1/2}x$									







CONCLUSIÓN: Propiedades de la función logarítmica:

1º) $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}^{+}-\{0\}$, o dicho de otra forma, «**No existe el logaritmo de un número negativo**[5]»

2º) $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}$, por lo que podemos añadir: «**…pero un logaritmo puede ser negativo**»

3º) $\boxed{\log_a a=1}$ y $\boxed{\log_a 1=0}$

4º) $a>1 \Rightarrow \log_a x$ CRECIENTE

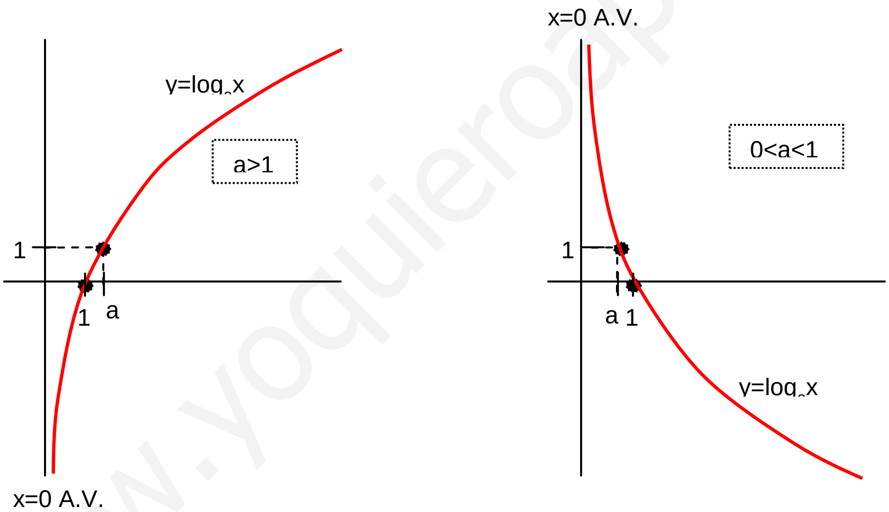
$0<a<1 \Rightarrow \log_a x$ DECRECIENTE

5º) $a>1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x=-\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=\infty$

$a<1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x=\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=-\infty$

6º) x=0 A.V., es decir, «**La función logarítmica $\log_a x$ siempre presenta el eje y como A.V.**[6]»

- Todo lo visto hasta ahora se puede resumir en las siguientes gráficas:



- **Caso particular: LOGARITMOS NEPERIANOS[7]:** Son los que utilizan como base $e\simeq 2,718281828459\ldots$; tienen una notación especial:

$$\log_e x=\ln x$$

[5] Nótese que, puesto que la función exponencial y la logarítmica son inversas, el dominio de una coincide con el recorrido de la otra, y viceversa.

[6] Nótese que nos referimos a $\log_a x$; por ejemplo, $\log\dfrac{2-x}{x-1}$ presenta únicamente A.V. en x=1 y x=2

[7] Se llaman así en honor a John Neper (1550-1617), matemático escocés que, como ya se ha dicho, ideó los logaritmos.

III) CÁLCULO LOGARÍTMICO

III.1) Logaritmo de un producto:

$$\boxed{\log\,(p\cdot q)=\log p+\log q}$$

Es decir, **«El logaritmo de un producto es la suma de logaritmos»**

conocemos p y q

Dem: $\left.\begin{array}{l}\log_a p = x \Rightarrow a^x=p\\ \log_a q=y\Rightarrow a^y=q\end{array}\right\}\ p\cdot q=a^x\cdot a^y=a^{x+y}\ \Rightarrow \boxed{\log_a(p\cdot q)=x+y=\log_a p+\log_a q}$ (C.Q.D.)

Observaciones: **1)** Esta fórmula es válida en cualquier base.

2) Esta fórmula se puede generalizar a 3 o más argumentos:

$$\log\,(p\cdot q\cdot r)=\log p+\log q+\log r \qquad \text{etc.}$$

3) Esta fórmula –y las siguientes que veremos a continuación– nos puede servir para comprender cómo surgieron los logaritmos en el siglo XVI como instrumento para facilitar los cálculos astronómicos con cantidades elevadísimas para la época (como ya indicamos al comienzo del apartado II). Vamos a explicarlo con un ejemplo:

Supongamos que queremos hallar el valor de $N=1\,638\,457\cdot 1\,968\,334$

(Recordar que, antes de la aparición de las calculadoras, operaciones de este tipo eran muy laboriosas) Tomamos logaritmos en ambos miembros:

$$\log 1\,638\,457+\log 1\,968\,334=\log N$$

Se disponía de tablas de logaritmos muy completas, con las que se podía reemplazar cada logaritmo por su valor:

$$6{,}2144\ldots+6{,}2940\ldots=\log N$$

Es decir: $$12{,}5085\ldots=\log N$$

A continuación, se buscaba en las tablas el caso inverso, es decir, cuál es el número cuyo logaritmo es 12,5085… (lo que se conoce como **antilogaritmo**[8]):

$$\log N=12{,}5085\ldots\Rightarrow N=\boxed{3\,225\,030\,620\,638}$$

Hoy en día todo esto se nos puede antojar algo laborioso, pero situémonos en aquellos tiempos –no muy remotos[9]–, sin ordenadores ni calculadoras…

III.2) Logaritmo de un cociente:

$$\boxed{\log\frac{p}{q}=\log p-\log q}$$

Es decir, **«El logaritmo de un cociente es la resta de logaritmos»**

---

[8] En la calculadora, para hallar un antilogaritmo, normalmente se utiliza la combinación $\boxed{\text{SHIFT}}$–$\boxed{\log}$:

$$\log N=12{,}5085\ldots\Rightarrow N=\boxed{\text{SHIFT}}\text{–}\boxed{\log}\ 12{,}5085\ldots=3\,225\,030\,620\,638$$

[9] Por ejemplo, el uso generalizado de las calculadoras se produjo en la década de los 70 del siglo pasado…

III.3) Logaritmo de una potencia: $\boxed{\log p^n = n \cdot \log p}$ Es decir, **«El logaritmo de una potencia es el exponente por el logaritmo de la base»**

Dem: Vamos a probarlo para $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\log p^n} = \log(\underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{n \text{ términos}}) = \underbrace{\log p + \log p + \ldots + \log p}_{n \text{ términos}} = \boxed{n \cdot \log p} \quad \text{(C.Q.D.)}$$

Observaciones: **1)** En realidad esta fórmula es válida $\forall n \in \mathbb{R}$

2) Caso particular: LOGARITMO DE UNA RAÍZ:

$$\boxed{\log \sqrt[n]{p}} = \log p^{1/n} = \boxed{\frac{1}{n} \cdot \log p} \quad \text{(C.Q.D.)}$$

Es decir: **«El logaritmo de una raíz es el inverso del índice por el logaritmo del radicando»**

IV) ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS *(págs. 78 y 79 libro de texto)*

«Una **ecuación exponencial** es aquella en la que la incógnita aparece como exponente». Existen varios procedimientos para su resolución, dependiendo del tipo de ecuación; básicamente, se pueden resumir en tres:

1^er caso: Algunas ecuaciones exponenciales se resuelven consiguiendo una igualdad entre dos potencias de la misma base, con lo cual los exponentes tendrán que ser iguales.

Ejemplo 5: $4^{2x+1} = 8^{2x}$

2º caso: Cuando figuran sumas y/o restas de expresiones exponenciales, lo que suele funcionar es aplicar un cambio de variable del tipo $\mathbf{a^x = t}$, con lo cual la ecuación exponencial se transforma en una ecuación algebraica en **t**.

Ejemplo 6: $9^x + 3^x = 6642$

3$^{\underline{er}}$ caso: En otros casos lo que suele funcionar es tomar logaritmos decimales (o también neperianos, según convenga…) en ambos miembros (¡evidentemente, esto no funciona cuando al menos uno de los miembros es una suma!).

Ejemplo 7: $2^{2x-1} = 3^x$

NOTA: El saber cuál de los tres procedimientos aplicar a una ecuación exponencial concreta es una técnica que requiere práctica y sentido común; en algunos casos sólo funciona uno de los tres métodos, mientras que en otros es posible que se pueda elegir entre dos de ellos, o cualquiera de los tres… Para adquirir dicha técnica, resultará útil el siguiente ejercicio:

- «Una **ecuación logarítmica** es aquella en la que la incógnita aparece en el argumento de un logaritmo». Se resuelven siempre aplicando las propiedades de los logaritmos en orden inverso hasta lograr una igualdad de logaritmos de la misma base, con lo cual sus argumentos serán iguales (esto se conoce como ***propiedad inyectiva***):

$$\boxed{\log_a x = \log_a y \quad \Rightarrow \quad x = y}$$

¡IMPORTANTE!: En este caso **es fundamental comprobar las posibles soluciones obtenidas** sustituyéndolas en la ecuación del principio, y descartar aquellas que conduzcan a un logaritmo con argumento negativo.

Ejemplo 8: $\log x = 2 \log 4$

Ejemplo 9: $4 \log x - 1 = \log 4 + \log (2x)$ $\left(Soluc: x = 2\sqrt[3]{10}\right)$

V) CAMBIO DE BASE

Fórmula del cambio de base de sistema de logaritmos: $\boxed{\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x}$

Dem: Puesto que el logaritmo y la exponencial son funciones inversas, es evidente que:

$$x = a^{\log_a x}$$

Tomando $\log_b$ en ambos miembros, y aplicando la fórmula del logaritmo de una potencia, obtenemos la fórmula anterior (desordenada):

$$\boxed{\log_b x} = \log_b a^{\log_a x} = \boxed{\log_a x \cdot \log_b a} \qquad \text{(C.Q.D)}$$

Utilidad: La fórmula del cambio de base permite calcular logaritmos en cualquier base con las calculadoras habituales, que sólo disponen de logaritmos decimales; en efecto, para ello basta con tomar b=10 en la fórmula, con lo cual se obtiene:

$$\log x = \log_a x \cdot \log a$$

Despejando:

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log x}{\log a}}$$

Ejemplo: $\log_3 9 = \dfrac{\log 9}{\log 3} = \dfrac{0{,}9542...}{0{,}4771...} = 2$ (Como puede comprobarse, aplicando la definición…)

EJERCICIOS de LOGARITMOS

Función exponencial y logarítmica:

1. Para cada una de las funciones que figuran a continuación, se pide: **i)** Tabla de valores y representación gráfica. **ii)** Signo de f(x). **iii)** Cortes con los ejes. **iv)** Intervalos de crecimiento. **v)** Dominio y recorrido. **vi)** Asíntotas. **vii)** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$

a) $f(x)=10^x$ y $f(x)=\log x$ **b)** $f(x)=0{,}1^x$ y $f(x)=\log_{0,1} x$ **c)** $f(x)=e^x$ y $f(x)=\ln x$

d) $f(x)=3^x$ y $f(x)=\log_3 x$

■ **Definición de logaritmo:** $\boxed{\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N}$ (donde a>0, a≠1)

■ **Sistemas de logaritmos más utilizados:**

NOMBRE	BASE	NOTACIÓN	DEFINICIÓN
Logaritmo decimal	a=10	log	$\log N = x \Leftrightarrow 10^x = N$
Logaritmo neperiano[1]	a=e	Ln, ln	$\ln N = x \Leftrightarrow e^x = N$

donde e ≅ 2,718281828459… se llama cte. de Euler; es un número irracional.

Definición de logaritmo:

2. Utilizando la definición, hallar los siguientes logaritmos:

a) $\log_3 9$
b) $\log_3 81$
c) $\log_3 1/9$
d) $\log_3(-9)$
e) $\log_2 \sqrt{2}$
f) $\log_2 \sqrt{8}$
g) $\log_{10} 1000$
h) $\log_4 2$
i) $\log_4 64$
j) $\log_{10} 0{,}01$
k) $\log_4 1/16$
l) $\log_5 0{,}2$
m) $\log_4 256$
n) $\log_4 1/64$
o) $\log_2 0{,}125$
p) $\log_4 1$
q) $\log_2 1024$
r) $\log_2 1/64$
s) $\log_3 \sqrt{27}$
t) $\log_2 \log_2 4$

(*Soluc:* ***a)*** *2;* ***b)*** *4;* ***c)*** *-2;* ***d)*** *∄;* ***e)*** *1/2;* ***f)*** *3/2;* ***g)*** *3;* ***h)*** *1/2;* ***i)*** *3;* ***j)*** *-2;* ***k)*** *-2;* ***l)*** *-1;* ***m)*** *4;* ***n)*** *-3;* ***o)*** *-3;* ***p)*** *0;* ***q)*** *10;* ***r)*** *-6;* ***s)*** *3/2;* ***t)*** *1*)

3. Calcular los logaritmos decimales de los siguientes números (sin calculadora) y comprobar el resultado:

a) 10.000 **b)** 1.000.000 **c)** 0,001 **d)** 1/1.000.000 **e)** 10^8 **f)** 10^{-7}
g) 10 **h)** 1

(*Soluc:* ***a)*** *4;* ***b)*** *6;* ***c)*** *-3;* ***d)*** *-6;* ***e)*** *8;* ***f)*** *-7;* ***g)*** *1;* ***h)*** *0*)

[1] En honor a John Napier (Neper, en latín), matemático inglés (1550-1617) inventor de los logaritmos.

4. Utilizando la definición de logaritmo, hallar el valor de x en cada una de las igualdades siguientes:

a) $\log_2 8=x$	**e)** $\ln x=2$	**i)** $\ln e^3=x$	**m)** $\log_x 0.01=2$	**q)** $\log_{0.25} x=2$
b) $\log_2 1/8=x$	**f)** $\log_3 x=-2$	**j)** $\log_x 64=1$	**n)** $\ln x=-1/2$	**r)** $\log_2(-16)=x$
c) $\log 100=x$	**g)** $\log_x 49=2$	**k)** $\log_x 25=-1$	**o)** $\log_{1/36} x=2$	**s)** $\log_x 125=-3$
d) $\log_3 x=3$	**h)** $\log_x 8=3$	**l)** $\log_{1/100} 100=x$	**p)** $\log_x 2=0$	**t)** $\log_3 \log_3 3)=x$

(Soluc: ***a)*** *3;* ***b)*** *−3;* ***c)*** *2;* ***d)*** *27;* ***e)*** *e^2;* ***f)*** *1/9;* ***g)*** *7;* ***h)*** *2;* ***i)*** *3;* ***j)*** *64;* ***k)*** *1/25;* ***l)*** *−1;* ***m)*** *0,1;* ***n)*** *$\sqrt{e}/e$;* ***o)*** *1/1296;* ***p)*** *∄;* ***q)*** *0,0625;* ***r)*** *∄;* ***s)*** *1/5;* ***t)*** *0)*

Cálculo logarítmico:

■ **Fórmulas del cálculo logarítmico:**

$$\boxed{\log(p\cdot q)=\log p+\log q}$$

$$\boxed{\log\frac{p}{q}=\log p-\log q}$$

$$\boxed{\log p^n=n\cdot\log p}\quad\boxed{\log\sqrt[n]{p}=\frac{1}{n}\log p}$$ (todas son válidas en cualquier base)

Casos particulares: $\boxed{\log_a a^x=x}$ $\boxed{a^{\log_a x}=x}$ $\boxed{\ln e^x=x}$ $\boxed{e^{\ln x}=x}$

$\boxed{\log_a a=1}$ $\boxed{\log_a 1=0}$ $\boxed{\ln e=1}$ $\boxed{\ln 1=0}$

5. Aplicando las fórmulas anteriores, calcular:

a) $\log_6\frac{1}{36}$

b) $\log_3\sqrt[4]{27}$

c) $\log_3\frac{\sqrt{243}}{3}$

d) $\log_a\frac{1}{\sqrt{a}}$

e) $\ln e^2$

f) $\log_4\frac{1}{\sqrt[5]{64}}$

g) $\log_3\sqrt[3]{9}$

h) $\ln\frac{1}{e}$

i) $\log_4 2$

j) $\log_8 2$

k) $\log_8\sqrt{32}$

l) $\ln\sqrt[3]{e}$

m) $\log_2 64$

n) $\log_4\frac{1}{64}$

o) $\log_3\frac{3}{\sqrt[5]{81}}$

p) $\log_3\frac{\sqrt{3}}{9}$

q) $\ln\frac{\sqrt{e}}{e}$

r) $\log_4(-4)$

s) $\log_2\sqrt[3]{32}$

t) $\log_3\sqrt{27}$

u) $\log_2\frac{\sqrt[5]{64}}{8}$

v) $\ln\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$

w) $\log_3\frac{1}{\sqrt{243}}$

x) $\log\sqrt{20}+\log\sqrt{5}$

y) $\log\frac{\sqrt[3]{100}}{10}$

z) $\log_3\frac{1}{27\sqrt[3]{9}}$

α) $\ln\frac{e}{\sqrt[4]{e}}$

β) $\log\frac{\sqrt{10}}{0,1}$

γ) $\ln\frac{e}{\sqrt[3]{e^2}}$

δ) $\log_3\frac{1}{3\sqrt[4]{27}}$

ε) $\log_{1/5}125$

(Soluc: ***a)*** *−2;* ***b)*** *3/4;* ***c)*** *3/2;* ***d)*** *−1/2;* ***e)*** *2;* ***f)*** *−3/5;* ***g)*** *2/3;* ***h)*** *−1;* ***i)*** *1/2;* ***j)*** *1/3;* ***k)*** *5/6;* ***l)*** *1/3;* ***m)*** *6;* ***n)*** *−3;* ***o)*** *1/5;* ***p)*** *−3/2;* ***q)*** *−1/2;* ***r)*** *∄;* ***s)*** *5/3;* ***t)*** *3/2;* ***u)*** *−9/5;* ***v)*** *−2/3;* ***w)*** *−5/2;* ***x)*** *1;* ***y)*** *−1/3;* ***z)*** *−11/3;* ***α)*** *3/4;* ***β)*** *3/2;* ***γ)*** *1/3;* ***δ)*** *−7/4;* ***ε)*** *−3)*

6. Expresar en función de log 2 los logaritmos decimales de los siguientes números, y comprobar con la calculadora:

a) 16	**d)** 0,25	**g)** 1/40	**j)** 0,32	**m)** $\sqrt[3]{0,08}$
b) 5	**e)** 0,625	**h)** $\sqrt[3]{16}$	**k)** 0,08	
c) 32/5	**f)** 250	**i)** 16/5	**l)** $\sqrt[5]{80}$	

*(Soluc: **a)** 4log 2; **b)** 1-log 2; **c)** -1+6log 2; **d)** -2log 2; **e)** 1-4log 2; **f)** 3-2log 2; **g)** -1-2log 2; **h)** $\frac{4}{3}\log 2$; **i)** -1+5log 2;*

***j)** -2+5log 2; **k)** -2+3log 2; **l)** $\frac{1}{5}(1+3\log 2)$; **m)** $-\frac{2}{3}+\log 2$)*

7. Expresar en función de ln 2:

a) ln 8 **b)** $\ln\frac{e}{2}$ **c)** $\ln\frac{e^3}{4}$ **d)** $\ln\frac{4}{\sqrt{e}}$ **e)** $\ln\sqrt{2e}$

*(Soluc: **a)** 3 ln 2; **b)** 1−ln 2; **c)** 3−2 ln 2; **d)** $-\frac{1}{2}+2\ln 2$; **e)** $\frac{1+\ln 2}{2}$)*

8. Expresar en función de log 2 y log 3 los logaritmos siguientes, y comprobar con la calculadora:

a) log 25	**d)** log 9/4	**g)** log 162	**j)** log 90	**m)** log $\sqrt{3,6}$
b) log 24	**e)** log $\sqrt[3]{6}$	**h)** log 3,6	**k)** log 0,27	
c) log 4/3	**f)** log 30	**i)** log 1,2	**l)** log 0,72	

*(Sol: **a)** 2−2 log 2; **b)** 3 log 2+log 3; **c)** 2 log 2−log 3; **d)** 2 log 3−2log 2; **e)** $\frac{\log 2+\log 3}{3}$; **f)** 1+log 3; **g)** log 2+4 log 3;*

***h)** −1+2 log 2+2 log 3; **i)** −1+2 log 2+ log 3; **j)** 1+2 log 3; **k)** −2+3 log 3; **l)** −2+3 log 2+2 log 3; **m)** −1/2+ log 2+ log 3)*

9. Expresar en función de log 2, log 3 y log 7 los logaritmos siguientes:

a) log 84 **b)** log 0,128 **c)** log 0,125 **d)** log 14,4 **e)** log $\sqrt[3]{12}$

10. Justificar las siguientes igualdades:

a) $\frac{\log 6+\log 2}{\log 9+\log 8-\log 6}=1$ **b)** log 125=3(1−log 2) **c)** $\frac{\log 6+\log 3-\log 2}{\log 9-\log 3}=2$ **d)** $10^{-2\log 2}=\frac{1}{4}$

e) $\frac{1+\log 8}{\log 5+2\log 4}=1$

.

11. Sabiendo que log 7,354=0,866524..., hallar (sin calculadora):

a) log 735,4 **b)** log 0,007354 **c)** log 7354

12. Utilizando las fórmulas del cálculo logarítmico, desarrollar al máximo las expresiones siguientes:

a) $\log (2x)^3$	**d)** $\ln (ax^2)$	**g)** $\log\frac{mnp}{qr}$	**i)** $\log\left(\frac{mn}{p}\right)^r$
b) $\log (2x^3)$	**e)** $\ln (ax)^2$	**h)** $\log a^{3/4}$	**j)** $\ln\frac{1}{ex}$
c) $\log\left(\frac{2x}{y}\right)^2$	**f)** $\log\sqrt[3]{c}$		**k)** $\log\sqrt{mn}$

l) $\ln\sqrt{x^3}$

m) $\log(x^2-y^2)$

n) $\log\sqrt{\dfrac{m^n}{pq^r}}$

o) $\log\sqrt{m^2-n^2}$

p) $\log\dfrac{m^2-x^2}{\sqrt{m^2+x^2}}$

q) $\log\left(10\sqrt[3]{x}\right)$

r) $\log\sqrt{\dfrac{a^2b^3c^5}{mp}}$

s) $\log(x^n y^m)$

t) $\log\dfrac{2m^2n^3}{pq^4}$

u) $\ln\dfrac{\sqrt{x}}{x}$

*(Sol: **a)** 3 log 2+3 log x; **b)** log 2+3 log x; **c)** 2 log 2+2 log x−2 log y; **d)** ln a+2 ln x; **e)** 2 ln a+2 ln x; **f)** $\frac{1}{3}\log c$; **g)** log m+log n+log p−log q−log r; **h)** $\frac{3}{4}\log a$; **i)** r log m+r log n−r log p; **j)** −1−ln x; **k)** $\frac{\log m+\log n}{2}$; **l)** $\frac{3}{2}\ln x$; **m)** log(x+y)+log(x−y); **n)** $\frac{n\log m-\log p-r\log q}{2}$; **o)** $\frac{\log(m+n)+\log(m-n)}{2}$; **p)** $\log(m+x)+\log(m-x)-\frac{1}{2}\log(m^2+x^2)$; **q)** $\frac{1+\log x}{3}$; **r)** $\frac{2\log a+3\log b+5\log c-\log m-\log p}{2}$; **s)** n log x+m log y; **t)** log 2+2 log m+3 log n−log p−4 log q; **u)** $-\frac{1}{2}\ln x$)*

13. Obtener **x** en las siguientes expresiones:

a) $\log x = 1+2\log a$ *(Soluc: $x=10a^2$)*

b) $\log x = 2(\log a+3\log b)-\frac{1}{2}(2\log c+\log d)$ *(Soluc: $x=\dfrac{a^2b^6}{c\sqrt{d}}$)*

c) $\ln x=\dfrac{\ln a+2\ln b}{2}-3(2\ln a-\ln b)$

14. Sabiendo que x=7 e y=3, utilizar la calculadora para hallar:

a) $\log x^2$ **b)** $\log(2x)$ **c)** $\log^2 x$ **d)** $\log(x+y)$ **e)** $\log x + y$ **f)** $\log\dfrac{x+y}{2}$ **g)** $\dfrac{\log(x+y)}{2}$

15. a) Hallar **a** sabiendo que $\log_7\dfrac{a}{b}+\log_7 b=2$ *(Soluc: a=49)*

b) Si $\log_4 N=3$, ¿cuánto vale $\log_4\dfrac{\sqrt[3]{N}}{N^3}$? ¿Cuánto vale N? *(Soluc: −8; N=64)*

16. ¿En qué base se cumple que $\log_a 12+\log_a 3=2$? *(Soluc: a=6)*

17. ¿V o F? Razona la respuesta:

a) log (A+B)=log A + log B

b) $\log(A^2+B^2)=2\log A+2\log B$

c) $\dfrac{\ln 2x}{2}=\ln x$

d) $\ln\dfrac{2x}{2}=\ln x$

e) $\log\dfrac{AB}{C}=\dfrac{\log(AB)}{\log C}$

f) El logaritmo de un número siempre da como resultado un número irracional.

g) Los logaritmos decimales de números <1 son negativos; en caso contrario, son positivos.

18. CURIOSIDAD MATEMÁTICA: Comprobar la veracidad de la siguiente fórmula, debida al físico británico Paul Dirac (1902-1984), que permite escribir cualquier número N empleando solamente tres doses:

$$N = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\overset{\text{(N raíces)}}{\cdots}\sqrt{\sqrt{2}}}}$$

19. ¿Cuáles son los números cuyos logaritmos decimales están comprendidos entre 0 y 2? ¿Y entre 0 y −2? *(Soluc: 1 y 100; 0,01 y 1)*

Ecuaciones exponenciales:

20. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales por el método más apropiado, y comprobar el resultado en cada caso:

a) $3^x = 48$ *(Soluc: x≅3,5237)*

b) $2^x = \dfrac{8}{27}$ *(Soluc: x≅ −1,7549)*

c) $2^{x+1} + 4 = 80$ *(Soluc: x≅5,2479)*

d) $2\cdot 3^x - 3^{2x} + 3 = 0$ *(Soluc: x=1)*

e) $3^{x-1} + 3^{x+1} - 3^x = 63$ *(Soluc: x=3)*

f) $2^{2x-3} = 8^{x+1}$ *(Soluc: x=-6)*

g) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$ *(Soluc: x=2)*

h) $2^{x-3} = -3$ *(Soluc: ∄ soluc.)*

i) $5^{x-1} = 2 + \dfrac{3}{5^{x-2}}$ *(Soluc: x=2)*

j) $2\,e^{x-4} = 3$ *(Soluc: x≅4,4055)*

k) $100\cdot 10^x = \sqrt[x]{1000^5}$ *(Soluc: x=3)*

l) $3^{x/2} = 768$ *(Soluc: x≅12,0949)*

m) $4^{x^2+2} = 2^{-2}$ *(Soluc: ∄ soluc.)*

n) $3^{2x+5} = 3^7$ *(Soluc: x=1)*

o) $\dfrac{1}{e^x} = 27$ *(Soluc: x≅−3,2958)*

p) $5^{x^2-5x+6} = 1$ *(Soluc: x_1=2, x_2=3)*

q) $3^x\cdot\left(3^2\right)^x = 9^3$ *(Soluc: x=2)*

r) $e^{2x} - 2e^{x+1} + e^2 = 0$ *(Soluc: x=1)*

s) $2^x - 10\cdot 2^x + 16 = 0$ *(Soluc: x≅0,83)*

t) $2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4} + 2^{x+5} + 2^{x+6} = 31$ *(Soluc: x=−2)*

u) $e^{4x} - 5e^{3x} + 5e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$ *(Sol: x_1=2, x_2=ln2; x_3=ln3)*

v) $2^{x+1} = 4^{2x-4}$ *(Soluc: x=3)*

w) $3^{2x}\cdot 2^{3x-1} = 6^{x+1}$ *(Soluc: x=1)*

x) $e^{4x-x^2} = e^3$ *(Sol: x_1=1, x_2=3)*

y) $2^{x-3} = 3^{x+1}$ *(Soluc: x≅ −7,8380)*

z) $2^{2x} - 3\cdot 2^{x+1} + 8 = 0$ *(Soluc: x_1=1, x_2=2)*

α) $3^{2x-4} = 729$ *(Soluc: x=5)*

β) $e^{x-9} = \sqrt{73}$ *(Soluc: x≅11,1452)*

γ) $2^{x+9} = 3^x$ *(Soluc: x≅15,38)*

δ) $2^{1-x^2} = \dfrac{1}{8}$ *(Soluc: x=±2)*

ε) $10^{3-x} = 1$ *(Soluc: x=3)*

ζ) $3^x + 3^{1-x} = 4$ *(Soluc: x_1=0, x_2=1)*

η) $e^{x+2} + e^{x-1} = e^{2x} + e$ *(Soluc: x_1=−1, x_2=2)*

θ) $2^{x/2} = 768$

ι) $\sqrt[x]{a} = a^x$ *(Soluc: x=1)*

κ) $e^{2x} - 2e^x + 2 = 0$ *(Soluc: ∄ soluc.)*

λ) $4^x - 14\cdot 2^{x-1} + 12 = 0$ *(Soluc: x_1=2, x_2=log 3/log 2)*

μ) $2^{x-1}\cdot 3^{1-x} = 5^{2x-2}$ *(Soluc: x=1)*

ν) $2^{2x} = 4^{x^2}$ *(Soluc: x_1=0, x_2=1)*

ξ) $2^{x+1}\cdot 3^{x-1} = 4^x$ *(Soluc: x=1)*

ο) $2^{x+1} = 3^{x-1}\cdot 4^x$ *(Soluc: x=1)*

π) $9^x + 2\cdot 3^{x+1} = 27$ *(Soluc: x=1)*

ρ) $4^x - 2\cdot 2^{x-1} = 6$ *(Soluc: x≅1,5850)*

σ) $11\cdot 3^x - 9^x = 18$ *(Soluc: x_1=2, x_2=log 2/log 3)*

τ) $3^{x-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-1}$ *(Soluc: x=−2)*

υ) $2^{2x-1}-16=2^{x+1}$ *(Soluc: x=3)*

21. Considérese la siguiente fórmula:

$$U=P(\rho+V)^{-1/D}$$

Despejar ρ (Ayuda: no es necesario utilizar logaritmos) *(Soluc: $\rho=-V+P^{D}\cdot U^{-D}$)*

22. Sin necesidad de operar, razonar que ecuaciones del tipo:

$$2^x+3^x=0$$
$$4^{x-2}+2^{x^2+1}+2=0$$
$$x^2+5^x=0,\quad \text{etc.}$$

no pueden tener solución.

Ecuaciones logarítmicas:

23. Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas, comprobando la validez de las soluciones obtenidas:

a) 2 log x−log (x+6)=3 log 2 *(Soluc: x=12)*

b) $4\log_2(x^2+1)=\log_2 625$ *(Soluc: x=±2)*

c) $\log(x^2+1)-\log(x^2-1)=\log\frac{13}{12}$ *(Soluc: x=±5)*

d) ln (x−3)+ln (x+1)=ln 3+ln (x−1) *(Soluc: x=5)*

e) $2\log^2 x+7\log x-9=0$ *(Soluc: $x_1=10;\ x_2=\sqrt{10}/10^5$)*

f) 2 ln (x−3)=ln x−ln 4 *(Soluc: x=4)*

g) log (x+3)−log (x−6)=1 *(Soluc: x=7)*

h) log (x+9)=2+log x *(Soluc: x=1/11)*

i) log (x+1)+log (x−1)=1/100 *(Soluc: ∄ soluc.)*

j) $\log\sqrt{3x+5}+\log\sqrt{x}=1$ *(Soluc: x=5)*

k) $\log(x^2-7x+110)=2$ *(Soluc: $x_1=2;\ x_2=5$)*

l) 2 ln x+3 ln (x+1)=3 ln 2 *(Soluc: x=1)*

m) $\log(x^2+3x+36)=1+\log(x+3)$ *(Soluc: $x_1=1;\ x_2=6$)*

n) ln x+ln 2x +ln 4x=3 *(Soluc: x=e/2)*

o) 4 log x−2 log (x−1)=2 log 4 *(Soluc: x=2)*

p) ln (x−1)+ln (x+6)=ln (3x+2) *(Soluc: x=2)*

q) 2 log x+log (x−1)=2 *(Soluc: x=5)*

r) 2 log (x+9)−log x=2 *(Soluc: x≅1,81)*

s) log (2x+6)−1=2 log(x−1) *(Soluc: $x_1=2;\ x_2=1/5$)*

t) log (x+11)−2 log x=1 *(Soluc: x=11/10)*

u) $\log(6x-1)-\log(x+4)=\log x$ *(Soluc: x=1)*

v) $\log x^2+\log x^3=5$ *(Soluc: x=10)*

Sistemas de ecuaciones exponenciales y/o logarítmicas:

Cambio de base:

$\boxed{\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x}$ (fórmula del cambio de base)

24. Utilizando la fórmula del cambio de base se pide:

a) Demostrar que $\log_a b \cdot \log_b a=1$

b) Hallar la relación entre el logaritmo neperiano y el logaritmo decimal.

c) Expresar $\log_2 x$ en función de $\log x$ *(Soluc: $\log_2 x=3,3219 \log x$)*

25. a) Nuestra calculadora sólo dispone de logaritmos decimales. Usando la fórmula del cambio de base, hallar $\log_4 5$

b) Razonar que $\log_4 5$ es irracional.

26. Volver a hacer el ejercicio 2, pero utilizando esta vez la calculadora y la fórmula del cambio de base.

LÍMITES DE FUNCIONES

I) IDEA INTUITIVA DE $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

Ejemplo 1: La función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ no está definida en x=1; investigar, rellenando las siguientes tablas (mediante calculadora), su comportamiento en las proximidades de dicho punto, y explicar gráficamente la situación:

NUMÉRICAMENTE

$x \to 1^-$	0,9	0,99	0,999…
$f(x) \to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$

$x \to 1^+$	1,1	1,01	1,001…
$f(x) \to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to 1} f(x) =}$

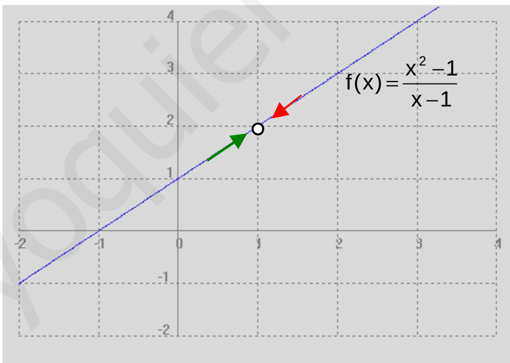
ANALÍTICAMENTE

En la práctica, los límites no se suelen calcular de esta forma, sino operando:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

Es decir, nótese que la f(x) del enunciado se comporta como la recta y=x+1, salvo en x=1 (punto en el cual no está definida); por lo tanto, su representación gráfica es:

GRÁFICAMENTE



Vemos que cuando las x se acercan a 1^- (flecha izqda.; 1ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 2^-, mientras que cuando las x se acercan a 1^+ (flecha dcha.; 2ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 2^+. Y todo ello es independiente de que, exactamente en x=1, la función no está definida.

■ Conclusiones:

1º Para que exista límite han de coincidir los límites laterales.

2º A efectos de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, no hay que tener en cuenta lo que ocurre exactamente en x=a, sino en las proximidades; de hecho, hay casos en los que en un punto no existe imagen pero sí límite (como en el ejemplo anterior), y esta es precisamente la utilidad del concepto de límite.

3º De todos modos, normalmente existen límite e imagen, y ambos coinciden, como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2: Dada $f(x)=x^2$, obtener numéricamente, mediante las siguientes tablas, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$:

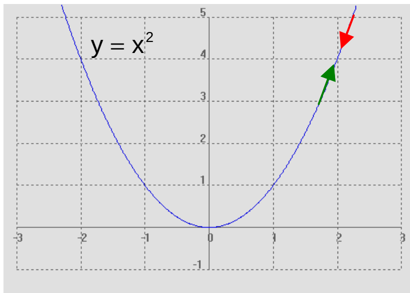
$x \to 2^-$	1,9	1,99	1,999…
$f(x) \to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$

$x \to 2^+$	2,1	2,01	2,001…
$f(x) \to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$

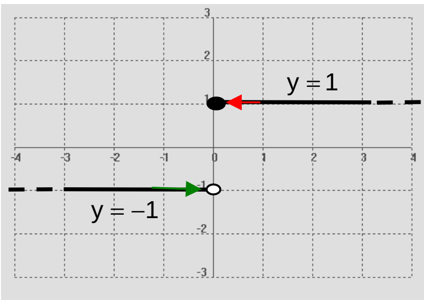
$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to 2} f(x) =}$



Es decir, cuando las x se acercan a 2^- (flecha izqda.; 1ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 4^-, mientras que cuando las x se acercan a 2^+ (flecha dcha.; 2ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 4^+. En este caso, la función sí está definida precisamente en x=2, y su valor es 4; es decir, en este ejemplo límite e imagen coinciden (lo cual, por cierto, es lo más habitual).

- Veamos ahora un ejemplo de función en el que no hay límite:

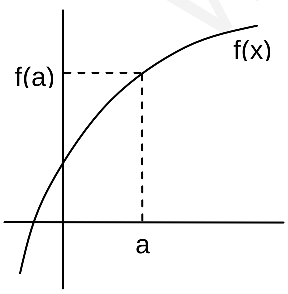
Ejemplo 3: Dada $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ se pide: **a)** Representarla. **b)** Hallar $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ gráficamente.



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (-1) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \ 1 \ = \ 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)}$$

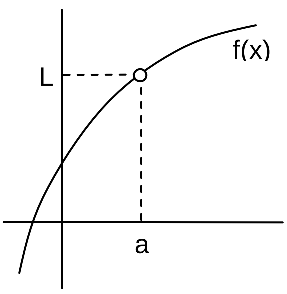
En este caso, al acercarnos a $x=0^-$ por la rama izquierda, las imágenes tienden exactamente a -1 (aunque precisamente en x=0 no tengan el valor esperado, sino 1; de nuevo, téngase en cuenta que a efectos del límite no hay que tener en cuenta lo que hace la función exactamente en el punto sino en sus proximidades…), mientras que al acercarnos a $x=0^+$ por la rama derecha, las imágenes tienden exactamente a 1. Por lo tanto, **como no coinciden los límites laterales, el límite global no existe**.

- Podríamos ver más ejemplos, pero todos ellos se resumirían en alguno de los 4 casos del siguiente esquema; va a existir límite cuando x→a sólo en los tres primeros supuestos:



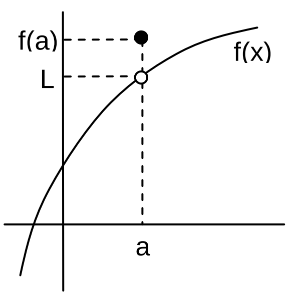
$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

[Lo más habitual]

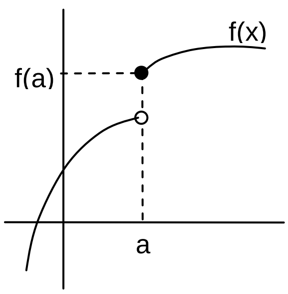


$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

[aunque $\nexists f(a)$]



$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L \neq f(a)$



$\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$

[aunque $\exists f(a)$]

Como resumen: **«A efectos gráficos, no va a haber $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ si en x=a las dos ramas no coinciden»**

II) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. ASÍNTOTA VERTICAL

Ejemplo 4: Vemos fácilmente que la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$ no está definida en x=3; investigar, rellenando las siguientes tablas (inténtese sin calculadora), su comportamiento en las proximidades de dicho punto, y explicar analítica y gráficamente la situación:

NUMÉRICAMENTE

$x \to 3^-$	2,9	2,99	2,999…
$f(x) \to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) =$

$x \to 3^+$	3,1	3,01	3,001…
$f(x) \to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) =$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to 3} f(x) =}$

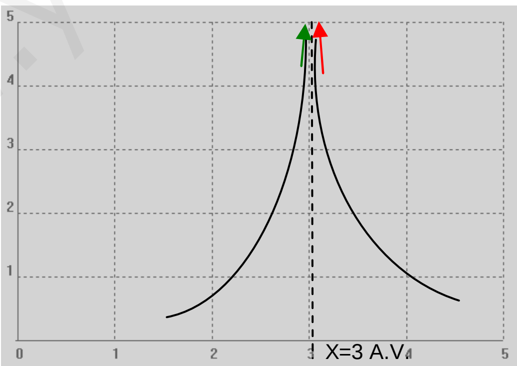
ANALÍTICAMENTE

En la práctica, se procede así[1]:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{(x-3)^2} = \dfrac{1}{(0^-)^2} = \dfrac{1}{0^+} = \infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{(x-3)^2} = \dfrac{1}{(0^+)^2} = \dfrac{1}{0^+} = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2} = \infty$$

GRÁFICAMENTE

Gráficamente, la situación es la siguiente:



Es decir, cuando las x se acercan a 3^- (flecha izqda; rama izquierda) las imágenes correspondientes tienden a hacerse infinitamente grandes i.e. ∞, y cuando las x se aproximan a 3^+ (flecha dcha.; rama derecha) las imágenes tienden también a ∞. Y todo ello, volvemos a insistir, es independiente de que concretamente en x=3 la función no está definida. Esta es precisamente la **utilidad de la noción de límite:** incluso **aunque la función no esté definida en un punto, el límite da cuenta del comportamiento de la función en dicho punto**.

[1] 0^+ o 0^- se conocen como *infinitésimos*.

En el ejemplo anterior, se dice que f(x) presenta una asíntota vertical en x=3.

Observaciones:

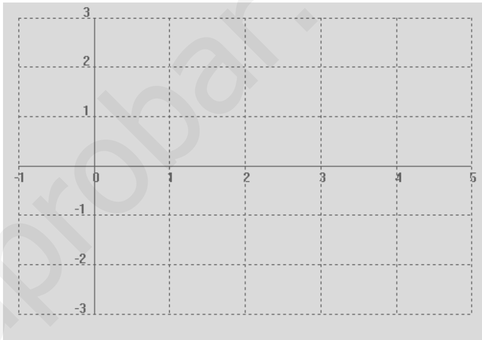
1º Cuando por sustitución directa en un límite obtengamos k/0, automáticamente tenemos que plantear límites laterales, para discernir si el denominador es 0^+ o 0^-, lo cual determinará si el límite finalmente es ∞ o $-\infty$ (en función también del signo de k).

2º Nótese que, a la hora de calcular un límite, en el momento en que sustituyamos en la función, desaparece el símbolo de lim.

Definición de asíntota vertical:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \underset{(o\ -\infty)}{\infty} \Leftrightarrow x = a \ \text{A.V.}}$$

Ejemplo 5: Estudiar analíticamente $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}$ y explicar gráficamente la situación. ¿Qué asíntota vertical presenta la función?



$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}=\\&\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=\end{aligned}\right\}\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}=}$$

III) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$. ASÍNTOTA HORIZONTAL

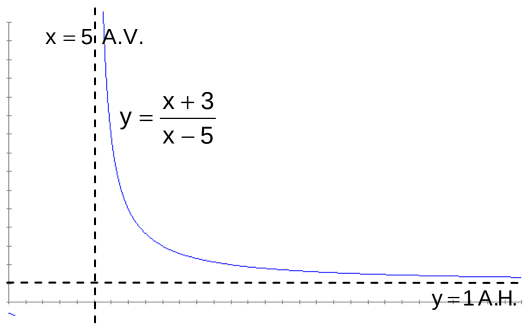
(Ver págs. 282–283 y 286 del libro de texto)

Ejemplo 6: Estudiar, mediante la siguiente tabla de valores, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3}{x-5}$

x	10	100	1 000	10 000… ∞
$f(x)=\frac{x+3}{x-5}$				

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x-5}=}$$

En la práctica, como $x\to\infty$, lógicamente podemos despreciar el efecto de sumar o restar un número finito a x, por lo cual podemos proceder de la siguiente forma:



$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x-5}\approx\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}=\lim_{x\to\infty}1=1$$

Es decir, **cuando x→∞** (o −∞), **nos quedaremos con el término de mayor grado del polinomio** (lo que se conoce como **término dominante**), y despreciaremos términos de menor grado. ¡Nótese que esto sólo tiene sentido cuando x→∞ (o −∞)! Ésta será una técnica muy utilizada para calcular límites.

Gráficamente, la situación está indicada al margen.

Es decir, cuando las x se hacen cada vez más grandes, las imágenes correspondientes tienden a aproximarse cada vez más a 1^+, pero sin llegar a alcanzar jamás el valor 1. Se dice entonces que f(x) presenta una asíntota horizontal de ecuación y=1. (Por cierto que, por las razones explicadas en el anterior apartado, también presenta una A.V. en x=5).

- **Definición de asíntota horizontal**: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (o\ -\infty)}} f(x) = L \Leftrightarrow y = L \ \text{ A.H.}}$

- **Observaciones**: **1º** La gráfica puede cortar a la A.H. para valores finitos de x

  2º En cambio, la gráfica de una función nunca puede cortar a una A.V.

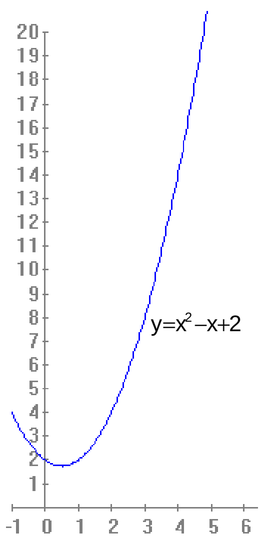
  3º En el próximo tema veremos un tercer tipo: las asíntotas oblicuas

IV) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. RAMAS INFINITAS *(Ver págs. 286 a 289 del libro de texto)*

Ejemplo 7: Obtener $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 - x + 2)$ mediante la siguiente tabla de valores:

x	10	100	1 000… ∞
$f(x)=x^2-x+2$			

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 - x + 2) = \qquad}$



Es decir, cuando las x se hacen cada vez más grandes, las imágenes correspondientes tienden a hacerse tan grandes como queramos, como queda reflejado en la gráfica adjunta. En la práctica, y como ya hemos comentado en el apartado anterior, **cuando x→∞** (o -∞) **nos quedaremos con el término de mayor grado del polinomio** (lo que se conoce como **término dominante**), y despreciaremos términos de menor grado:

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 - x + 2) \approx \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty^2 = \infty$$

De nuevo, adviértase que esta forma de proceder sólo tiene sentido cuando x→∞ (o -∞), no cuando x tiende a un número finito. En el ejemplo anterior, se dice además que f(x) presenta una rama infinita.

- **Regla práctica**: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (o\ -\infty)}} P(x) = \lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (o\ -\infty)}} (\text{tº de mayor grado})}$

V) PROPIEDADES DE LOS LÍMITES[2]

1º) «El límite –en caso de existir– es único»

2º) $\lim\,[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$ es decir, «El límite de la suma (diferencia) es la suma (diferencia) de los límites».

3º) $\lim\,[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$ es decir, «El límite del producto es el producto de los límites».

4º) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ (siempre y cuando lim g(x)≠0)

5º) $\lim k = k$ es decir, «El límite de una constante es igual a dicha constante»

6º) $\lim\,[k \cdot f(x)] = k \cdot \lim f(x)$ es decir, «Las constantes multiplicativas pueden salir (o entrar) en el límite».

7º) Límite de una potencia: $\lim\,[f(x)]^{g(x)} = [\lim f(x)]^{\lim g(x)}$ **Ejemplo:** $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = e^\infty = \infty$

8º) Límite de una raíz: $\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}$

9º) Límite de un logaritmo: $\lim \log f(x) = \log \lim f(x)$

VI) LÍMITES INFINITOS E INDETERMINACIONES

▪ **SUMA Y RESTA:** ∞+∞=∞ ∞+k=∞ ∞–∞=**INDTDO.** –∞–∞=–∞

Nótese que no podemos concluir que ∞–∞ sea siempre igual a 0, puesto que ambos ∞ pueden ser, en general, de distinto orden[3]; por lo tanto, **el resultado de ∞–∞ tendrá valores distintos dependiendo de cada ejemplo concreto, y se dice entonces que su resultado es indeterminado, o bien que se trata de una indeterminación**. La mayor parte de las indeterminaciones se deshacen operando. Veamos un sencillo ejemplo justificativo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2}-\frac{x}{2}\right) = \infty-\infty = \text{INDTDO.} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2-x}{2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{2} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1$$

Es decir, en este caso concreto ∞–∞ ha resultado ser igual a 1, pero veremos muchos más ejemplos en los que puede resultar otro número (incluido, por supuesto 0), o ∞, o –∞, o incluso no existir.

---

[2] Todas estas propiedades son válidas independientemente de que x→∞ o a un valor finito. Pueden consultarse las demostraciones de estas propiedades en el libro de texto.

[3] En el caso de una incógnita, sí es cierto que **a–a**, o **x–x**, etc. es obviamente igual a cero; ahora bien, adviértase que en el caso de ∞–∞ estamos hablando de límites, es decir, ambos ∞ no tienen por qué ser exactamente iguales, sino que pueden ser de distinto orden.

▪ PRODUCTO:

$$\infty\cdot\infty=\infty \qquad \infty\cdot(-\infty)=-\infty \qquad -\infty\cdot(-\infty)=\infty \qquad \infty\cdot k=\begin{cases}\infty & \text{si } k>0\\ \textbf{INDTDO.} & \text{si } k=0\\ -\infty & \text{si } k<0\end{cases}$$

Veamos un ejemplo justificativo de la indeterminación anterior:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{2}\cdot\frac{1}{x}=\infty\cdot 0=\text{INDTDO.}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{2x}\approx\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

▪ COCIENTE:

$$\frac{\infty}{k}=\begin{cases}\infty & \text{si } k>0\\ \text{operar y/o hacer lim laterales} & \text{si } k=0\\ -\infty & \text{si } k<0\end{cases} \qquad \frac{k}{\infty}=0 \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}=\textbf{INDTDO.}$$

$$\frac{0}{0}=\textbf{INDTDO.} \qquad \frac{k}{0}=\text{hacer lim laterales}$$

Veamos ejemplos prácticos de algunos de los casos anteriores:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{0}=\lim_{x\to\infty}[(x+2)x]=\lim_{x\to\infty}(x^2+2x)\approx\lim_{x\to\infty}x^2=\infty^2=\infty$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x+3}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\text{INDTDO}\approx\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x}=\lim_{x\to\infty}3=3$

c) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{0}{0}=\text{INDTDO}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$

d) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x+3}{x-1}=\frac{4}{0}=\begin{cases}\lim_{x\to1^-}\frac{x+3}{x-1}=\frac{4}{0^-}=-\infty\\ \lim_{x\to1^+}\frac{x+3}{x-1}=\frac{4}{0^+}=\infty\end{cases}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to1}\frac{x+3}{x-1}$ (o bien, $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x+3}{x-1}=\pm\infty$)

e) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x+3}{(x-1)^2}=\frac{4}{0}=\begin{cases}\lim_{x\to1^-}\frac{x+3}{(x-1)^2}=\frac{4}{(0^-)^2}=\frac{4}{0^+}=\infty\\ \lim_{x\to1^+}\frac{x+3}{(x-1)^2}=\frac{4}{(0^+)^2}=\frac{4}{0^+}=\infty\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to1}\frac{x+3}{(x-1)^2}=\infty$

Como conclusión, hemos visto una serie de indeterminaciones que podemos resumir en cuatro[4]:

$$\boxed{\frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 0\cdot(\pm\infty),\ \infty-\infty}$$

[4] El próximo curso veremos las indeterminaciones de tipo exponencial: $1^{\pm\infty}$, $(\pm\infty)^0$, 0^0

VII) CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS

1º) Límites de polinomios:

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to\infty \\ (o\ -\infty)}} P(x) = \lim_{\substack{x\to\infty \\ (o\ -\infty)}} (\text{tº de mayor grado})}$$

2º) Límites de cocientes de polinomios:

a) $\boxed{\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}}$ «Se resuelve factorizando numerador y denominador (habitualmente por Ruffini) y eliminando a continuación el factor x–a que figura repetido en ambos términos de la fracción»

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x-8}{x^2-x-2} = \frac{0}{0} = \text{INDTDO} = \lim_{x\to 2} \frac{(\cancel{x-2})(x+4)}{(\cancel{x-2})(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+4}{x+1} = \frac{6}{3} = 2$$

b) $\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\infty}{\infty}}$ «Se resuelve recurriendo en numerador y denominador a los términos de mayor grado de cada polinomio[5]»

Ejemplos: Hay tres posibilidades:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+x+2}{2x^2+3x-1} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \approx \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} 2 = 2$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+3}{x+3} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \approx \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} \approx \lim_{x\to\infty} x = \infty$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{x^2+x+3} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDTDO} \approx \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0^+$

3º) Límites de funciones irracionales:

a) $\boxed{\frac{0}{0}}$ «Se resuelve multiplicando numerador y denominador por el conjugado[6] de la expresión radical, y operando a continuación»

(NOTA: Caso de existir dos expresiones radicales, una en el numerador y otra en el denominador, habría que realizar el procedimiento anterior dos veces, una por cada expresión)

[5] Existe otra forma alternativa, en general más laboriosa, que consiste en dividir numerador y denominador por la mayor potencia de x que aparezca en ambos polinomios.

[6] El conjugado de un binomio radical consiste en cambiar el signo intermedio de éste; por ejemplo, el conjugado de $\sqrt{x}+2$ es $\sqrt{x}-2$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\frac{0}{0}=\text{INDTDO}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\cancel{x-4}}=\lim_{x\to 4}\left(\sqrt{x}+2\right)=4$$

b) $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ «Se resuelve dividiendo numerador y denominador por la mayor potencia **efectiva**[7] de x que aparezca en cualquiera de las expresiones»

Ejemplo:

$$\frac{4}{\infty}=0^+$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-4}{\sqrt{x^2-2}}=\frac{\infty}{\infty}=\text{INDTDO}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x-4}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-2}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x}}{\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}=\frac{1}{1}=1$$

$$\frac{2}{\infty}=0^+$$

Obsérvese en el ejemplo anterior dos detalles importantes:

- La x entra dividiendo en una raíz cuadrada también dividiendo, pero al cuadrado.
- El hecho de dividir por la mayor potencia efectiva de x nos garantiza que los límites parciales que aparecen al final serán siempre cero.

c) $\boxed{\infty-\infty}$ «Se resuelve:

1º) Multiplicando y dividiendo por el conjugado de la expresión radical, y operando a continuación; en algunos casos (cuando el numerador resultante dependa de x), como la indeterminación no desaparece sino que pasa a ser ∞/∞, además hay que recurrir al siguiente paso:

2º) Dividiendo a continuación numerador y denominador por la mayor potencia **efectiva** de x»

Ejemplos:

a) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\infty-\infty=\text{INDTDO}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\infty}=0^+$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\infty-\infty=\text{INDTDO}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{\infty}{\infty}=\text{INDTDO}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}+\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\infty}=0^+$$

[7] El adjetivo «efectiva» alude al hecho de que hay que tener en cuenta que, por ejemplo, en la expresión $\sqrt{x^2-2}$, la x no se comporta como x^2 sino, de forma efectiva, como x

Nótese que en el primer ejemplo ha bastado con aplicar el primer paso del procedimiento, mientras que en el segundo ha habido que aplicar los dos pasos.

CONSEJO: En los casos en que $x\to-\infty$, se recomienda hacer el cambio de variable $z=-x$, que hace que $z\to\infty$, como puede verse en el siguiente ejemplo:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x}}=\frac{\infty}{\infty}=\text{INDTDO}\ \overset{\text{cambio de variable } x=-z}{=}\ \lim_{z\to\infty}\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1+z}}=\lim_{z\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}}{\frac{\sqrt{1+z}}{z}}=$$

$$=\lim_{z\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{z^2}{z^2}}}{\sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{z}{z^2}}}=\lim_{z\to\infty}\frac{\sqrt{\overbrace{\frac{1}{z^2}}^{0^+}+1}}{\sqrt{\underbrace{\frac{1}{z^2}}_{0^+}+\underbrace{\frac{1}{z}}_{0^+}}}=\frac{1}{0^+}=\infty$$

VIII) CONTINUIDAD *(Ver pág. 276 del libro de texto)*

Intuitivamente, una función es continua cuando se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

Más formalmente, se define **función continua en un punto** de la siguiente forma:

$$\boxed{f(x)\text{ continua en }x=a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a)}$$

Es decir: **"Una función es continua en un punto si el límite coincide con la imagen en dicho punto"**.

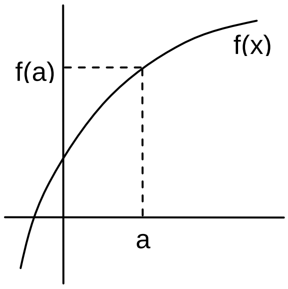
A efectos prácticos, para estudiar si una función es continua en un punto, hay que comprobar:

1) que exista imagen
2) que exista límite
3) y que ambos coincidan

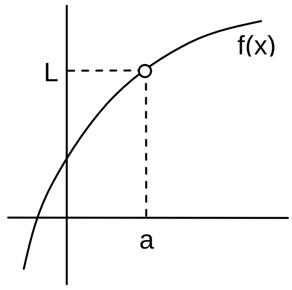
(En caso de no ser continua en un punto, se dice que es discontinua).

Por extensión, diremos que una función es **continua en un intervalo** cuando lo es en todos los puntos de dicho intervalo.

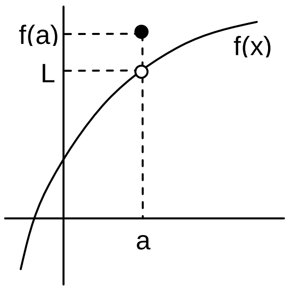
Vamos a recordar de nuevo el esquema-resumen visto en el apartado I del tema, e investigar en cada uno de los cuatro casos si la función es continua en x=a, para lo cual aplicaremos los tres requisitos de la continuidad arriba mencionados; observamos que la función es continua en x=a sólo en el primer supuesto:



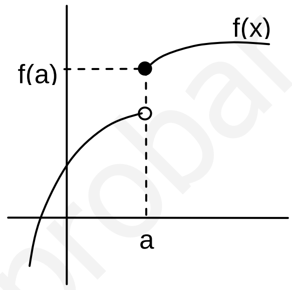
$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \Rightarrow$ f(x) CONTINUA en x=a



$\left.\begin{array}{l} \nexists\, f(a) \\ \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L \end{array}\right\} \Rightarrow$ f(x) DISCONTINUA en x=a



$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L \neq f(a) \Rightarrow$ f(x) DISCONTINUA en x=a



$\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x) \Rightarrow$ f(x) DISCONTINUA en x=a

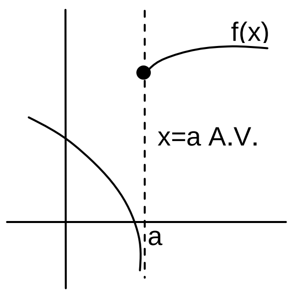
Nótese que en el último caso la función es discontinua, independientemente de que exista o no imagen.
Este hecho conduce a los siguientes **5 tipos de discontinuidades:**

1) Evitable: *«la función no es continua en x=a, pero* $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ *finito»*; se llama evitable porque podemos redefinir $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ de modo que la función pasará a ser continua. A este tipo responden los supuestos 2º y 3º anteriores.

2) De 1ª especie: Existen tres tipos:

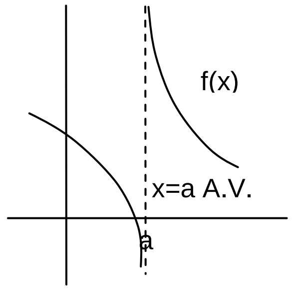
2.1) De salto finito: *«Existen ambos límites laterales y son finitos, pero no coinciden»*. El salto viene dado por la diferencia entre los límites. A este caso pertenece el 4º gráfico.

2.2) De salto infinito: *«Un límite lateral es finito y el otro infinito»*. Se presenta entonces una asíntota vertical, pero por un lado. Gráficamente, la situación es la siguiente:



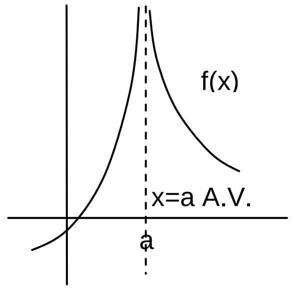
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

2.3) Asintótica: *«Los dos límites laterales son infinitos»*. Se da entonces una asíntota vertical, por ambos lados. Gráficamente, la situación puede ser la siguiente:



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$

o bien:



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$

3) Esencial, o de 2ª especie: «*Uno, o los dos límites laterales, no existe*»

Ejemplo 8: Dada $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, estudiar su continuidad en x=2

Aplicando los tres requisitos de la continuidad, vemos que falla el 1º, ya que $\nexists\, f(2) \Rightarrow$ f(x) es discontinua en x=2 $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) \text{ continua } \forall\, x \in \Re-\{2\}}$

(Nótese que ello es independiente de que exista límite, como de hecho ocurre:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} \underset{\text{INDTDO.}}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

Por lo tanto, se trata de discontinuidad evitable, es decir, bastaría redefinir la función de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

para que pasara a ser continua en x=2

Ejercicio 1: Representar las siguientes funciones, y estudiar su continuidad. Caso de presentar discontinuidades, clasificarlas razonadamente:

a) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

b) $f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } x\le 0 \\ \ln x & \text{si } x>0 \end{cases}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

Continuidad lateral: Se dice que una función es continua por la derecha bajo la siguiente condición:

$$\boxed{f(x) \text{ continua en } x=a^{+} \Leftrightarrow \lim_{x\to a^{+}} f(x)=f(a)}$$

Análogamente se define la continuidad por la izquierda.

Observaciones: **1º** Obviamente, $\boxed{f(x) \text{ continua en } x=a^{+} \text{ y } a^{-} \Leftrightarrow f(x) \text{ continua en } x=a}$

2º La continuidad lateral se suele aplicar a funciones definidas por ramas (ver, por ejemplo, el ejercicio 18, o la pág. 279 del libro)

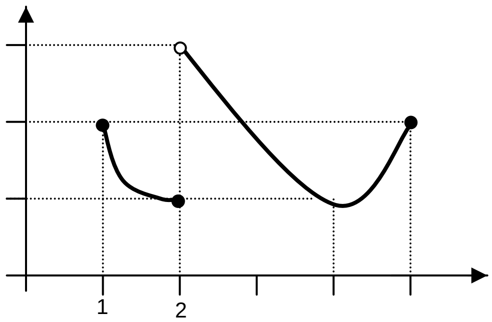
EJERCICIOS de LÍMITES DE FUNCIONES y CONTINUIDAD

1. Calcular los siguientes límites no indeterminados[1]:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-1}{x+2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 4} (x^2-4x+3)$ **d)** $\lim\limits_{x\to 1} (x^2+4x)$ **e)** $\lim\limits_{x\to -1} (3x+5)$

f) $\lim\limits_{x\to e} (1+\ln x)$ **g)** $\lim\limits_{x\to 0,1} \log x$ **h)** $\lim\limits_{x\to -2} (x^3-3x^2+4x)$ **i)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}$ **j)** $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

2.



Dada la gráfica de la figura, indicar si existe lim f(x) en los siguientes casos:

a) Cuando $x \to 1$

b) Cuando $x \to 2$

c) Cuando $x \to 4$

d) Cuando $x \to 5$

3. Representar la función

$$f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x<1 \\ 4-x & \text{si } 1\le x<3 \\ x-2 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$$

y obtener analíticamente lim f(x) cuando $x \to 1$, $x \to 3$, $x \to 5$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$

4. Dados los siguientes límites, se pide: **i)** Calcularlos. **ii)** En caso de deducirse de ellos la existencia de A.V., indicar su ecuación. **iii)** Explicar gráficamente el comportamiento a ambos lados de la hipotética asíntota:

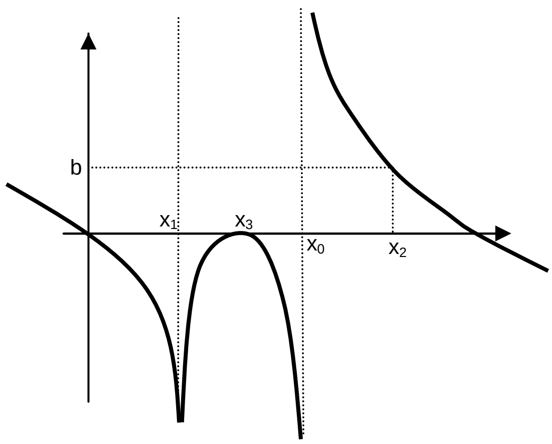
a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{(x-4)^2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-2}{(x-1)^2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2}{x-3}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-2}{(x-1)(x-4)}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-1}{(x-2)(x-5)}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)}$ **g)** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x-1}{(x+1)^3}$ **h)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **i)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+3}{(x-2)^3}$ **j)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-1}{x^2-2x-3}$

k) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x-1}{x^2+6x+8}$ **l)** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^2-5x+6}$ **m)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-3}{x^2-3x+2}$ *(Soluc: a)∞; b)$-\infty$; c)$\pm\infty$; d)$\pm\infty$; e)$\pm\infty$; f) 0; g)$\pm\infty$; h)∞; i)$\pm\infty$; j)$\pm\infty$; k)$\pm\infty$; l)$\pm\infty$; m)$\pm\infty$)*

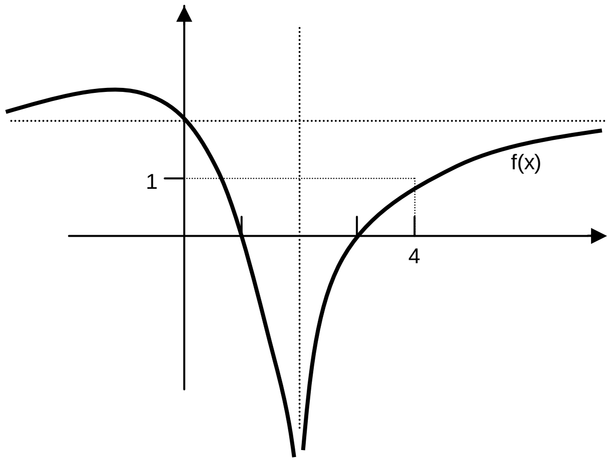
5. **a)** Si la gráfica de una función f(x) es la de la figura, averiguar lim f(x) cuando $x \to 0$, $x \to x_1$, $x \to x_3$, $x \to x_0$, $x \to x_2$

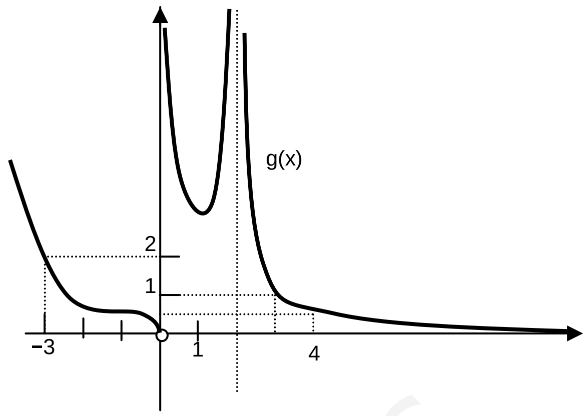
b) ¿Qué rectas son asíntotas?

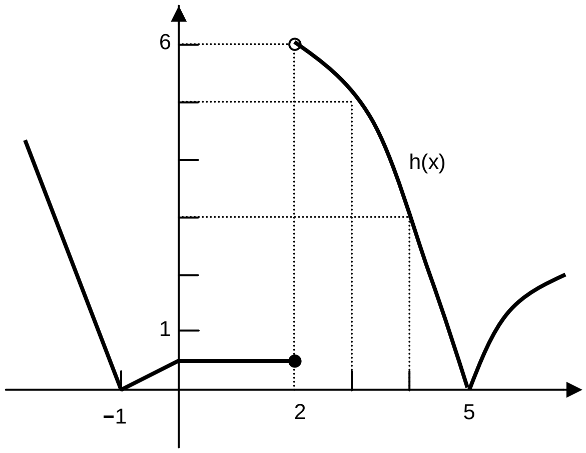


[1] Es decir, se pueden hacer por sustitución directa, ya que límite e imagen coinciden.

6.







a) Dadas las funciones cuyas gráficas aparecen en las figuras, calcular sus límites cuando $x \to 0$, $x \to 2$, $x \to 3$, $x \to 4$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$

b) ¿Cuáles son las asíntotas en cada gráfica?

7. Calcular los siguientes límites de funciones polinómicas:

a) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 + x + 1)$ **b)** $\lim\limits_{x\to \infty} (x^2 + x + 1)$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1} (x - 1)^7$ **d)** $\lim\limits_{x\to \infty} (x - 1)^7$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} (x^3 - 2x^2 - 3x - 10)$ **f)** $\lim\limits_{x\to \infty} (-x^2 + 2x + 5)$ **g)** $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2 + 3x + 1)$ **h)** $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^3 + x^2 + x + 7)$

i) $\lim\limits_{x\to \infty} (3x^2 - 100x - 50)$ **j)** $\lim\limits_{x\to -\infty} (-2x^3 + 100x + 200)$

(Soluc: a) 7; b) ∞; c) 0; d) ∞; e) ∞; f) −∞; g) ∞; h) −∞; i) ∞ ; j) ∞)

8. Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{1}{x^2} + 3\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1} \left(5 - \frac{1}{x^2}\right)$ **d)** $\lim\limits_{x\to \infty} \left(5 - \frac{1}{x^2}\right)$ **e)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2}{x}$ **g)** $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2}{x}$ **h)** $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{9x+2}{x^2}$ **i)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{9x+2}{x^2}$ **j)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{9x+2}{x^2}$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{9x+2}{x^2}$ **l)** $\lim\limits_{x\to \infty} 2^{x-1}$ **m)** $\lim\limits_{x\to -\infty} 2^{x-1}$ **n)** $\lim\limits_{x\to \infty} 0{,}5^{x-1}$ **o)** $\lim\limits_{x\to -\infty} 0{,}5^{x-1}$

p) $\lim\limits_{x\to \infty} (1 + e^x)$ **q)** $\lim\limits_{x\to -\infty} (1 + e^x)$ **r)** $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{e^x}$ **s)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{e^x}$ **t)** $\lim\limits_{x\to \infty} \log x$

u) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x$ **v)** $\lim\limits_{x\to \infty} \log (x^2 + 1)$ **w)** $\lim\limits_{x\to \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ **x)** $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{1 + \log\sqrt{x}}$ **y)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln\frac{1}{x^2}$

z) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\log x+\dfrac{3x+2}{x^2}\right)$ **α)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)$ **β)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+3}\ln x\right)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{x^2\log x}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}-x\right)$

ε) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x-\dfrac{3x+2}{x^2}\right)$ **ζ)** $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{3x^2+2}{x^2+3}\log x\right)$ **η)** $\lim\limits_{x\to0}x^2\,\text{sen}\dfrac{1}{x}$ **θ)** $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\,\text{sen}\dfrac{1}{x}$

(Soluc: a) 3; b) 0; c) 4; d) 5; e) 0; f) 1; g) 0; h) 0; i) 0; j) 5; k) ∞; l) ∞; m) 0; n) 0; o) ∞; p) ∞; q) 1; r) 0; s) ∞; t) ∞; u) −∞; v) ∞; w) 0; x) 0; y) −∞; z) ∞; α) ∞; β) ∞; γ) 0; δ) −∞; ε) −∞; ζ) −∞; η) 0; θ) ∞)

9. Calcular los siguientes límites por sustitución directa y, en algunos casos, operando:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-3x^2\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x^3-3x^2\right)$ **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{4}$ **d)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^2}{x}$ **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^2}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x-2}$ **g)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x^2}$ *(Soluc: a) -∞; b) ∞; c) ∞; d) −∞; e) ∞; f) ∞; g) 0^+)*

Resolución de indeterminaciones:

10. Calcular los siguientes límites de funciones racionales (nótese que en el 2º miembro de la igualdad se indica la solución):

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=3$

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x^4+x^2+x-3}=\dfrac{3}{7}$

c) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{2x-4}=\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x-2}{x^2-1}=2$

e) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^3+9x^2+24x+16}{x^3+11x^2+40x+48}=3$

f) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-5x^2+3x+9}=\pm\infty$

g) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^2+ax-3a^2}{3x^2-ax-2a^2}=1$

h) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{3x^3-18x^2+36x-24}=\pm\infty$

i) $\lim\limits_{x\to1/2}\dfrac{2x^3+3x^2-1}{4x^3+16x^2-19x+5}=\pm\infty$

j) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-5x^3+6x^2+4x-8}{x^3-4x^2+4x}=0$

k) $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{b^2-bx}{b^3+5b^2x-3bx^2-3x^3}=\dfrac{1}{10b}$

l) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}=\pm\infty$

m) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x+5}{x^2+6}=\dfrac{1}{2}$

n) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3+a^3}{x^2-a^2}=\pm\infty$

o) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+2}{x+5}=-2$

p) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}=\dfrac{3}{4}$

q) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+2x^2-3x}{x^3-1}=\dfrac{4}{3}$

r) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x^3+3x^2-4}=\pm\infty$

s) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+3+\dfrac{x-2}{x+1}}{x+\dfrac{x^2}{x-2}}=0$

NOTA: *Cuando señalamos que el resultado de un límite es ±∞, no estamos indicando que haya dos límites (recordar que el límite, caso de existir, es único), sino que, a ambos lados de un valor finito, la función diverge a ∞ o −∞*

11. Calcular los siguientes límites infinitos (en algunos casos figura la solución):

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-2}{x^4+x^2+x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{2x-4}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+x-2}{x^2-1}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-5x^2+3x+9}$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2+ax-3a^2}{3x^2-ax-2a^2}$

g) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^3+3x^2-1}{4x^3+16x^2-19x+5}$

h) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3-3x^2+4}{3x^3-18x^2+36x-24}$

i) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4-5x^3+6x^2+4x-8}{x^3-4x^2+4x}$

j) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3+a^3}{x^2-a^2}$

k) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{b^2-bx}{b^3+5b^2x-3bx^2-3x^3}$

l) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-2x+5}{x^2+6}$

m) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3+2}{x+5}$

n) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}$

o) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}$

p) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+3+\dfrac{x-2}{x+1}}{x+\dfrac{x^2}{x-2}} = \dfrac{1}{2}$

q) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x-3}{x^2-3x+2}$

r) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{x-3}$

s) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$

t) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-4}{x^3+3x^2-4}$

12. En una empresa se ha comprobado que el número de unidades diarias producidas depende de los días trabajados, de acuerdo con la siguiente función:

$$N(t) = \frac{30t}{t+4} \qquad \text{(donde t viene expresado en días)}$$

a) ¿Cuántas unidades se producen el primer día? ¿Y el décimo?

b) Representar la función N(t). ¿Qué ocurre si el período de producción se hace muy grande?

13. Siendo $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x}$, $g(x)=\dfrac{x-1}{x}$ y $h(x)=\dfrac{2x-1}{3x+2}$, hallar:

a) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \pm\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = -1/2$

c) $\lim\limits_{x\to 0} [f(x)\cdot g(x)] = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} h(x) = 2/3$

e) $\lim\limits_{x\to 0} [f(x)-g(x)] = \pm\infty$

f) $\lim\limits_{x\to \infty} g(x) = 1$

g) $\lim\limits_{x\to \infty} [f(x)\cdot g(x)] = 0$

14. Hallar una función f(x) que cumpla a la vez $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 4$

15. Calcular los siguientes límites de funciones irracionales (en el 2º miembro de la igualdad se indica la solución):

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}} = -2$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = 1/2$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = 1/4$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x+1}-x\right) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = 1/2$

g) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = 1$

h) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right) = 0$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x} = -1/2$

j) $\lim\limits_{x\to \infty} \left[\sqrt{(x+2)(x-3)}-x\right] = -1/2$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} = -1$

l) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right) = 0$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = 0$

n) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \infty$

o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4} = 4/3$

p) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

q) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{3}}{x^2+2x-3}=\sqrt{3}/6$ **r)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^3+x}+x}=0$ **s)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x}=-1$ **t)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}=1/3$

u) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{2x-5}}=\sqrt{2}/2$ **v)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)$ **w)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}}=-\infty$ **x)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x-1}=-1$

y) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$ **z)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)=1/2$

16. Calcular los siguientes límites, aplicando el procedimiento apropiado en cada caso (en el 2º miembro de la igualdad se indica la solución):

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^3-6x^2+12x-8}=\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+x-6}=-\infty$ **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)=-2$

d) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+x^2-x-1}=0$ **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right)=\dfrac{3}{2}$ **f)** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3+2x^2-x-2}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ **h)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x^2-x+1}=0$ **i)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x^2-x+1}=1$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=1$ **k)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$ **l)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3+x}{x^2-1}-\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)=0$

Continuidad:

RECORDAR:

$$\boxed{f(x)\text{ continua en }x=a \iff \lim_{x\to a} f(x)=f(a)}$$

Es decir: "*Una función es continua en un punto si el límite coincide con la imagen en dicho punto*".

- A efectos prácticos, para estudiar si una función es continua en un punto, hay que comprobar:
  1) que exista imagen
  2) que exista límite
  3) y que coincidan

17. Indicar en qué puntos son discontinuas las funciones cuyas gráficas se muestran en los ejercicios gráficos 2, 5 y 6, razonando el porqué e indicando el tipo de discontinuidad.

18. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones, indicando el tipo de discontinuidad:

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ **b)** $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-5x+6}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2+x+1}$ **d)** $f(x)=\dfrac{1}{\text{sen } x}$

e) $f(x)=\sqrt{x-3}$ **f)** $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}$ **g)** $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ **h)** f(x)=tg x

i) f(x)=log (x+3) **j)** f(x)=ln(x^2–4) **k)** f(x)=ln(x^2+4)

(*Soluc: a) discont. asintótica en x=2; b) discont. asintótica en x=2 y x=3; c) continua $\forall\Re$; d) discont. asintótica en x=n·π donde n∈Z; e) continua en [3,∞); f) continua en (–∞,–2] ∪ [3, ∞); g) continua $\forall\Re$; h) discont. asintótica en x=(2n+1)· π/2; i) continua en (–3,∞) ; j) continua en (–∞,–2]U[2, ∞); k) continua $\forall\Re$*)

19. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones (caso de presentar discontinuidades, clasificarlas) y representarlas gráficamente:

a) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\geq 0 \\ x-1 & \text{si } x<0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<0 \\ 2 & \text{si } x=0 \\ 2x-1 & \text{si } x>0 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\in(-\infty,2) \\ 2x-1 & \text{si } x\in(2,\infty) \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x\leq 2 \\ 2x-6 & \text{si } x>2 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} 1/x & \text{si } x\in(-\infty,1) \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x\in[1,\infty) \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<3 \\ x^2 & \text{si } 3\leq x<4 \\ 0 & \text{si } x\geq 4 \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\leq 1 \\ x^2-1 & \text{si } 1<x\leq 2 \\ x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-2} & \text{si } x\in(-\infty,1) \\ \mathrm{Ln}\,x & \text{si } x\in[1,\infty) \end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x\leq 0 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x>0 \end{cases}$

(Soluc: a) discont de salto finito en x=0; b) discont evitable en x=0; c) discont evitable en x=2; d) continua $\forall\Re$; e) discont asintótica en x=0 y de salto finito en x=1; f) discont. de salto finito en x=3 y x=4; g) discontinua de salto finito en x=2; h) continua $\forall\Re$; i) discont. de salto finito en x=0)

20. TEORÍA: **a)** ¿Se puede calcular el límite de una función en un punto en el que la función no está definida? ¿Puede ser la función continua en ese punto? Razonar la respuesta con ejemplos.

b) ¿Puede tener una función dos asíntotas verticales? En caso afirmativo, poner algún ejemplo.

c) El denominador de una determinada función se anula en x=a ¿Presenta necesariamente una asíntota vertical en x=a? Poner ejemplos.

d) ¿Puede tener una función más de dos asíntotas horizontales? ¿Por qué?

e) Si $\lim_{x\to 2} f(x)=5$, ¿podemos afirmar que f(x) es continua en x=2?

21. Probar que la función

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^3+7x-8}$$

no es continua en x=1 e indicar qué tipo de discontinuidad presenta en dicho punto.

(Soluc: no es continua pues $\nexists$ f(1); discontinuidad evitable)

22. Considerar la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

a) ¿Es discontinua en algún punto? ¿Por qué?

b) En x=1 la función no está definida. Ampliar esta función de modo que sea continua $\forall\Re$.

(Soluc: discontinua en x=1 pues $\nexists$ f(1); basta hacer f(1)=2)

23. La función $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+x+a}{x-1}$ no está definida en x=1. Hallar el valor de **a** para que sea posible definir el valor de f(1), resultando así una función continua. *(Soluc: a=−3; f(1)=6)*

24. Hallar el valor de **k** para que la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ k & \text{si } x=3 \end{cases}$$

sea continua $\forall\Re$. *(Soluc: k=6)*

25. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+3x-2}{2x^2-5x+2} & \text{si } x \neq 1/2 \\ 5/3 & \text{si } x = 1/2 \end{cases}$$

(Soluc: discontinua asintótica en x=2)

26. Calcular cuánto debe valer **a** para que la siguiente función sea continua $\forall\Re$:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(Soluc: a=0)

27. Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} \text{Ln } x & \text{si } 0 < x < 1 \\ ax^2+b & \text{si } 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

Determinar los valores de *a* y *b* para que f(x) sea continua y f(2)=3
(Soluc: a=1 y b=−1)

28. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & \text{si } x < 0 \\ ax+b & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

hallar **a** y **b** para que la función sea continua y dibujar la gráfica de la función.
(Soluc: a=3 y b=−1)

29. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } x \leq 1 \\ mx+n & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -x^2+10x-11 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

hallar los valores de **m** y **n** para que f(x) sea continua (puede ser útil dibujar la gráfica).
(Soluc: m=3, n=1)

30. Ídem:

$$f(x)=\begin{cases} -2x+1 & \text{si } x \leq -2 \\ ax+2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2+b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(Soluc: a=−1/2, b=−3)

31. Ídem:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+a & \text{si } x<-1 \\ x^2-4 & \text{si } -1\le x<2 \\ \ln(x-b) & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

(Soluc: a=−2, b=1)

32. Ídem:

$$f(x)=\begin{cases} ax+2 & \text{si } x<-1 \\ b/x^2 & \text{si } -1\le x<3 \\ cx & \text{si } 3\le x<5 \\ 10 & \text{si } x\ge 5 \end{cases}$$

(Soluc: a=−52, b=54, c=2)

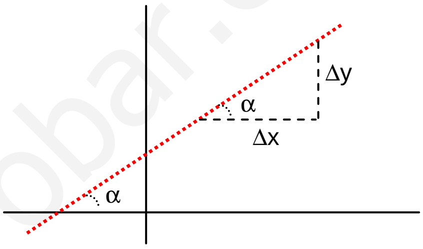
I) DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

En este tema vamos a conocer y emplear un operador matemático muy útil, llamado ***derivada de una función***, que opera sobre una función y da como resultado otra función (habitualmente más simple). Su utilidad radica en que, como veremos más adelante, el signo de la derivada de una función en un punto nos dirá si la función es creciente o decreciente en dicho punto; ello nos permitirá deducir, por tanto, los máximos y mínimos de la función, algo muy importante en infinidad de funciones extraídas de situaciones reales: pensemos en una función que represente los beneficios de una empresa, o el coste de fabricación de un determinado producto, etc.

El tema tiene dos grandes partes: en los apartados I, II y III aprenderemos a derivar; en los apartados IV, V y VI veremos algunas aplicaciones de la derivada.

Concepto previo: pendiente de una recta

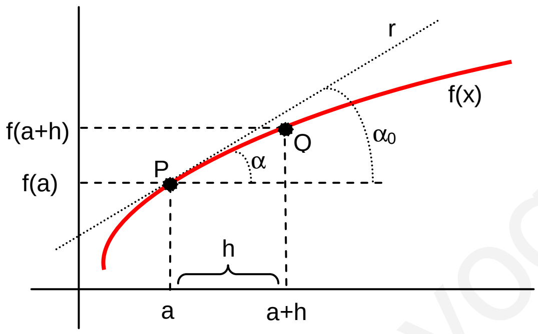
Para entender qué es la derivada necesitamos repasar previamente en qué consistía la pendiente de una recta (tema 4):



La pendiente de una recta, que suele llamarse **m**, mide la inclinación de ésta, y se define (ver figura) como el cociente incremental siguiente:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\alpha \qquad (1)$$

Derivada de una función en un punto f'(a):



Consideremos una función f(x) y un punto P de su gráfica (ver figura), de abscisa x=a. Supongamos que damos a la variable independiente x un pequeño incremento h (en el dibujo lo hemos exagerado, para que se pueda ver la situación…); por lo tanto, nos desplazaremos a un nuevo punto Q de la curva próximo. Consideremos la tangente del ángulo que forma el segmento $\overline{PQ}$ con la horizontal:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad (2)$$

Si $h\to 0$, el segmento $\overline{PQ}$ tenderá a confundirse con la recta r tangente a la curva f(x) en x=a, es decir, los ángulos α y α_0 tenderán a ser iguales:

$$\operatorname{tg}\alpha_0=\lim_{h\to 0}\operatorname{tg}\alpha=\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)} \qquad (3)$$

por (2) por definición

Debido a (1), la fórmula anterior –que en el fondo es un cociente incremental– nos da por tanto la pendiente de la recta tangente a la curva en x=a. Esta fórmula se conoce como derivada de la función f(x) en el punto x=a, y se designa como f '(a); por lo tanto:

«La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto», y se calcula mediante el límite dado por (3)[1]

[1] Por lo tanto, veremos en el apdo. IV que la derivada nos permitirá hallar la ecuación de la recta tangente a una función en un punto dado.

Observaciones:

1º) La derivada de una función en un punto puede resultar un número positivo, negativo o cero[2]. Como veremos en el apdo. V, su signo indicará el crecimiento de la función.

2º) Veamos una expresión alternativa para calcular la derivada:

Supongamos que hacemos el cambio de variable a+h=x $\Rightarrow$ si $h\to 0$, entonces $x\to a$, con lo cual (3) queda como:

$$\boxed{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \qquad (4)$$

Esta fórmula es, sin duda, más cómoda que (3), y es la que más usaremos.

3º) «Una función es derivable en un punto x=a si $\exists$ f '(a)»

4º) «Una función es derivable en un intervalo si lo es en todos los puntos de dicho intervalo»

II) <u>FUNCIÓN DERIVADA</u> f´(x) *(ver pág. 306 del libro de texto)*

Supongamos que nos piden la derivada de una función en, por ejemplo, diez puntos distintos. ¿Haremos diez límites? Es evidente que no; para evitar tanto trabajo, vamos a definir la función derivada, que se designa como f'(x), y es la derivada en un punto genérico x (y sustituiríamos a continuación en ella cada uno de los diez puntos); por lo tanto, se obtendrá reemplazando en (3) **a** por **x**:

$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} \qquad (5)$$

Observaciones:

1º) La función derivada, es decir, el límite anterior, da como resultado una función. Habitualmente abreviaremos diciendo simplemente derivada en vez de función derivada.

2º) En Física se utiliza la siguiente notación incremental: $\boxed{f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}$, o bien, p. ej. $\boxed{v=\frac{ds}{dt}}$

3º) La notación que nosotros seguiremos será la siguiente:

- Si la función a derivar se llama f(x), entonces su derivada la denotaremos como f'(x)
- " " " " " " " y, " " " " " y'

Utilizaremos indistintamente ambas notaciones.

[2] Como veremos también en el apdo. V, los puntos en que la derivada se anule resultarán muy interesantes, ya que serán los máximos o mínimos de la función.

III) DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

III.1) Función constante: $\boxed{y = K \rightarrow y' = 0}$

Es decir, **«La derivada de una constante es siempre cero»**

NOTA: Esta derivada, y todas las de este apartado, pueden ser demostradas, pero ello excede los límites de este curso. Todas estas reglas de derivación están recogidas en la tabla de derivadas que se adjunta al final del cuaderno.

Ejercicio 1: Hallar la derivada de las siguientes funciones constantes:

a) $y = 2$

b) $y = -3$

c) $y = \frac{1}{2}$

d) $y = 0$

e) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $y = \pi$

g) $y=0{,}5$

III.2) Función identidad: $\boxed{y = x \rightarrow y' = 1}$

III.3) Función de proporcionalidad directa: $\boxed{y = K \cdot x \rightarrow y' = k}$

Ejercicio 2: Hallar la derivada de las siguientes funciones de proporcionalidad directa:

a) $y = 2x$

b) $f(x) = -5x$

c) $y = 0{,}01x$

d) $y = \frac{x}{2}$

e) $y = x$

f) $f(x) = \frac{2}{3}x$

g) $y = -x$

h) $y = -\frac{5x}{3}$

i) $f(t) = 7t$

III.4) Derivada de una potencia: $\boxed{y = x^n \rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}}$

(donde $n \in \mathbb{R}$)

Ejercicio 3: Hallar la derivada de las siguientes potencias:

a) $y=x^2$

b) $f(x)=x^3$

c) $y=x^4$

d) $f(t)=t^5$

e) $y=x^{100}$

Este caso nos permite, dado que el exponente puede ser cualquier número real, abordar otros tipos de derivadas:

Ejercicio 4: Demostrar la fórmula de la derivada de: **a)** $y = \frac{1}{x}$ **b)** $y = \sqrt{x}$

Ejercicio 5: Hallar la derivada simplificada de las siguientes funciones, pasándolas previamente a forma de potencia:

a) $y=\sqrt[3]{x}$

b) $y=\sqrt[4]{x^3}$

c) $f(x)=\sqrt[5]{x^2}$

d) $y=x^2\sqrt{x}$

e) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

f) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^3}$

Generalización de la fórmula anterior a una función compuesta:

$$\boxed{y=u^n \rightarrow y'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'} \quad \text{(donde } n\in\mathbb{R}\text{)}$$

(esta fórmula la aplicaremos más adelante en el ejercicio 8)

III.5) $\boxed{y=K\cdot u \rightarrow y'=k\cdot u' \quad \text{donde u es función}}$, es decir, **«Las constantes multiplicativas pueden salir de la derivada»**

Ejercicio 6: Hallar la derivada de las siguientes funciones compuestas:

a) $y = 3x^2$

b) $y = 4x^3$

c) $f(x) = -2x^4$

d) $y=\dfrac{x^2}{2}$

e) $y = -x^5$

f) $y=\dfrac{2}{3}t^6$

g) $y = -x$

h) $y=3\sqrt[3]{x^4}$

i) $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x}}{2}$

j) $y=-\dfrac{3x^4}{2}$

k) $f(t) = -2t^7$

l) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}$

m) $y = 2x\sqrt[5]{x}$

III.6) Derivada de la suma (resta): $\boxed{y = u \pm v \rightarrow y' = u' \pm v' \quad \text{donde } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v} \text{ son funciones}}$

Es decir: **«La derivada de la suma** (resta) **es la suma** (resta) **de las derivadas»**

Esta regla, combinada con las anteriores, es muy útil para derivar polinomios, como puede verse en el siguiente ejemplo:

Ejercicio 7: Hallar la derivada simplificada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + x^3$

b) $y = x^4 + 5$

c) $y = x^2 - 2$

d) $y = x - 2$

e) $f(t) = 3t - 5$

f) $y = 3x^2 - x^4$

g) $y = 2x^3 - 3x^4$

h) $y = 2t^4 - t^2 + 3$

i) $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

j) $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 8$

k) $f(x) = -3x^5 + 4x^3 - x + 2$

l) $y = \frac{x^4}{2} + 5x$

(Sol: $2x^3+5$)

m) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{5} - \frac{1}{2}$

(Sol: $x^2-x+1/5$)

n) $f(x) = x^5 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{6} - 3x^2 + \frac{x}{3}$

o) $y = \frac{x^4 + x^2}{2}$

(Sol: $2x^3+x$)

p) $f(x) = 0{,}05x^3 - 0{,}001x^2 + 0{,}1x - 0{,}02$

q) $y = \frac{3x^6 - x^3 + 6x - 5}{3}$

(Sol: $6x^5-x^2+2$)

III.7) Derivada del producto: $\boxed{y = u \cdot v \rightarrow y' = u'v + u\,v'}$

Esta regla se puede generalizar a tres o más funciones: $y = u \cdot v \cdot w \rightarrow y' = u'v\,w + u\,v'\,w + u\,v\,w'$

NOTA: Para derivar un producto, una alternativa, a veces, es operar previamente hasta transformar en un polinomio, y luego derivar.

Ejercicio 8: Hallar, utilizando la fórmula más adecuada en cada caso, la derivada simplificada de las siguientes funciones:

a) $y = (2x+3)(3x-2)$ [de 2 formas, y comparar]

(Sol: $12x+5$)

b) $y = (x-2)(x+3)$ *(Sol: $2x+1$)*

c) $f(x) = (2x+3)(x-5)$ *(Sol: $4x-7$)*

d) $f(x) = (x^2+2)(3x-1)$ *(Sol: $9x^2-2x+6$)*

e) $y = (x^2-5)(3x-1)+7$ *(Sol: $9x^2-2x-15$)*

f) $y = (2x-3)^2$ [de 2 formas] *(Sol: $8x-12$)*

g) $f(x) = (x+2)^3$ *(Sol: $3(x+2)^2$)*

h) $y = (1{,}2-0{,}001x^2)\,x$ *(Sol: $-0{,}003x^2+1{,}2$)*

i) $y = (2x^2-3)^2$ *(Sol: $16x^3-24x$)*

j) $f(t) = 300t(1-t)$ *(Sol: $300-600t$)*

k) $f(x) = (-4x^3-2x)^2$ *(Sol: $96x^5+64x^3+8x$)*

l) $y =(t^2+t+1)^3$ *(Sol: $3(t^2+t+1)^2(2t+1)$)*

m) $y = (3x-2)(2x-3)(x+5)$ *(Sol: $18x^2+34x-59$)*

n) $f(x) = (2x-3)^{100}$ *(Sol: $200(2x-3)^{99}$)*

III.8) Derivada del cociente:

$$\boxed{y=\frac{u}{v} \rightarrow y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}}$$

Ejercicio 9: Demostrar, utilizando la derivada del producto, la fórmula anterior (Ayuda: poner u/v como $u\cdot v^{-1}$)

Ejercicio 10: Hallar la derivada simplificada de las siguientes funciones:

a) $y=\frac{2x-3}{3x+2}$ $\left(y'=\frac{13}{(3x+2)^2}\right)$

b) $y=\frac{x^2+1}{x^2-4}$ $\left(y'=\frac{-10x}{(x^2-4)^2}\right)$

c) $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$ $\left(y'=\frac{-6}{(x-3)^2}\right)$

d) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$ $\left(y'=\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right)$

e) $y=\frac{x^2+x+1}{x}$ $\left(y'=\frac{x^2-1}{x^2}\right)$

f) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ $(y'=1)$

g) $y=3\,\frac{x^2-1}{x-2}$ $\left(y'=3\,\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}\right)$

■ NOTA: Lo que hemos calculado hasta ahora es la función derivada de una función dada, o más comúnmente llamada derivada de una función. Por lo tanto, por tratarse de una función, podemos también evaluar la derivada en un punto dado, obteniendo como resultado un número. Es lo que se conoce como **derivada de una función en un punto**, ya visto en el apartado I. Veamos, a continuación, un ejemplo:

Ejercicio 11: Para cada una de las funciones que figuran a continuación, hallar el valor de su derivada en el punto indicado:

a) $f(x)=x^2$ en $x=2$

b) $f(x)=2x-5$ en $x=1$

c) $y=x^3$ en $x=-2$

d) $f(x)=x^2+x+1$ en $x=0$

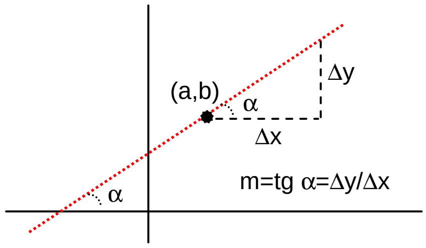
e) $y=x^2-x$ en $x=-1$

IV) RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UN PUNTO

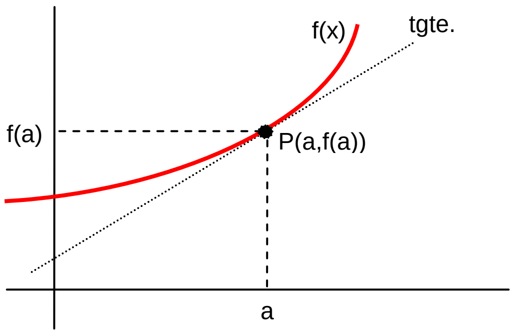
Recordatorio previo: recta en forma punto-pendiente

Conviene previamente recordar que la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto (a,b) y tiene pendiente m es [ver figura]:

$$y-b=m(x-a) \qquad (6)$$



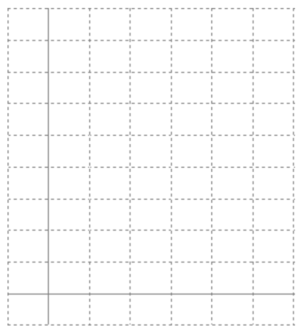
Ecuación de la recta tangente:



Hay que recordar también que, como se vio en el apartado I, la derivada de la función f(x) en el punto de abscisa x=a, la cual se designaba como f'(a), es la pendiente de la recta tangente en dicho punto (a,f(a)); por lo tanto, la ecuación de dicha recta tangente [ver figura] en ese punto se obtendrá sustituyendo convenientemente en (6):

$$\boxed{y-f(a)=f'(a)(x-a)} \qquad (7)$$

Ejercicio 12: Hallar la ecuación de la recta tangente en x=3 a la curva $f(x)=x^2-5x+8$. Dibujar la situación, e interpretar el resultado. *(Sol: y=x–1)*



Ejercicio 13: Hallar la ecuación de la recta tangente a las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=x^3-5$ en x=1

b) $y=\dfrac{1}{x}$ en x=-2

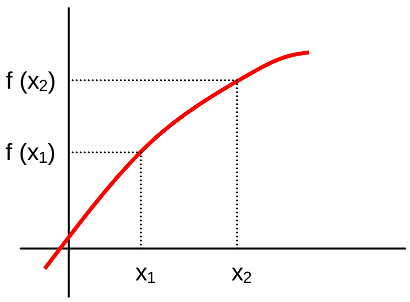
c) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ en x=0

d) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ en x=1

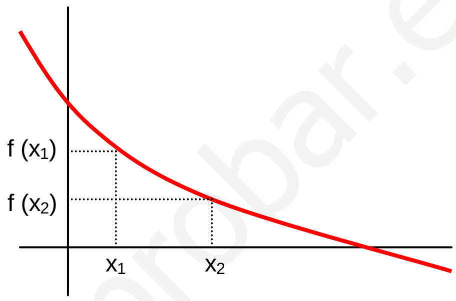
e) $y = \dfrac{-3}{x^2}$ en x=0

V) INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. M y m

V.1) Idea intuitiva:



f(x) CRECIENTE



f(x) DECRECIENTE

V.2) Definiciones:

f (x) es creciente en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

f (x) es decreciente en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

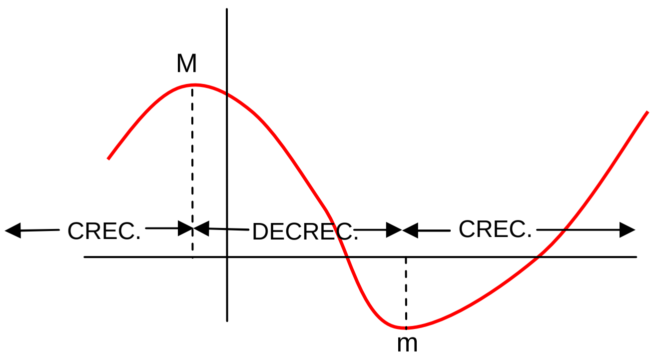
O, dicho con palabras:

“Una función es creciente en un punto si, en las proximidades de dicho punto, a medida que aumentan las x aumentan también las imágenes correspondientes”.

“Una función es decreciente en un punto si, en las proximidades de dicho punto, a medida que aumentan las x disminuyen las imágenes correspondientes”.

Acabamos de ver el concepto de función creciente en un punto. Ello es fácilmente ampliable a un intervalo, diciendo que **«una función es creciente en un intervalo si lo es en todos los puntos de dicho intervalo».**

- En general, las funciones no son siempre crecientes o siempre decrecientes, sino que presentan intervalos de crecimiento, también llamados de monotonía:



En un máximo (M), la función pasa de creciente a decreciente de forma continua. Se llama máximo relativo o local.

En un mínimo (m), la función pasa de decreciente a creciente de forma continua. Se llama mínimo relativo o local.

NOTA: Al final de este apartado veremos otros tipos de M o m, los absolutos.

V.3) Teorema 1:

$$\boxed{f'(a) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ creciente en } x = a}$$

O, dicho con palabras: **«Si la derivada de una función en un punto es positiva, entonces la función es creciente en dicho punto".**

Observaciones:

1º) La justificación de este teorema es obvia: teniendo en cuenta que la derivada era la pendiente de la recta tangente, si la derivada es positiva significará que la recta tangente tiene pendiente positiva, es decir, que la recta tangente es creciente, y, por lo tanto, también será creciente la curva.

2º) El recíproco no siempre es cierto: una función puede ser creciente en un punto y no ser necesariamente positiva su derivada (piénsese, por ejemplo, en $y=x^3$ en x=0).

3º) Naturalmente, otra forma alternativa de enunciar este teorema es decir que:

$$\boxed{f'(a) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ decreciente en } x = a}$$

4º) Por lo tanto, el **procedimiento práctico para hallar los intervalos de crecimiento será estudiar el signo de f'(x)** (debido al teorema anterior). Para ver cómo cambia el signo de f'(x), se recomienda hallar sus raíces, y construir una tabla (ver ejercicios 14, 15 y 16 que figuran a continuación). De los intervalos de crecimiento deduciremos fácilmente los posibles M y m.

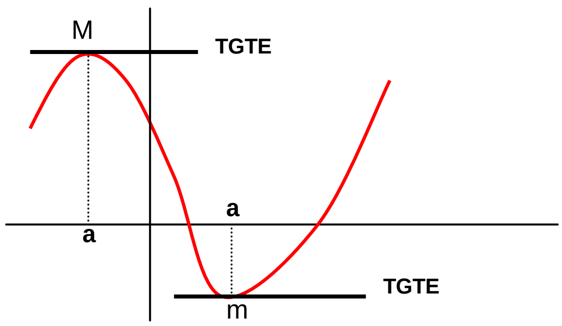
5º) Los intervalos de monotonía se expresan siempre con respecto al eje x, como veremos en los mencionados ejercicios.

V.4) Teorema 2:

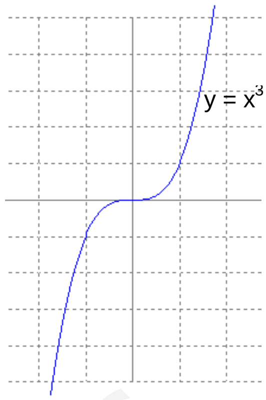
$$\boxed{x = a \text{ es M o m de } f(x) \Rightarrow f'(a) = 0}$$ (¡El recíproco no siempre se cumple!)

O, dicho con palabras: **«En un M o m la derivada siempre se anula"**.

Justificación gráfica: En un M o m la tangente es horizontal, es decir, su pendiente será nula, y por tanto su derivada también:



Observaciones:



1º) El teorema dice que la condición necesaria (pero no suficiente) para que exista un M o un m en un punto es que la derivada se anule. De hecho, **puede ocurrir que la derivada se anule en un determinado punto, pero no cambie de signo a ambos lados**; por ejemplo, $y=x^3$ entra en el origen con tangente horizontal –es decir, derivada nula–, pero no presenta M ni m, sino lo que se conoce como **punto de inflexión**[3].

2º) Puede haber varios **M** o **m**, no haber, o infinitos.

3º) Si la f(x) es continua, entre dos **M** siempre hay un **m**, y viceversa.

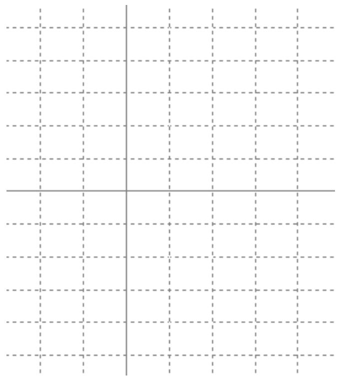
4º) Los candidatos a **M** o **m** son los que anulan $f'(x)$

5º) Si f '(x) no se anula nunca, no hay **M** ni **m**

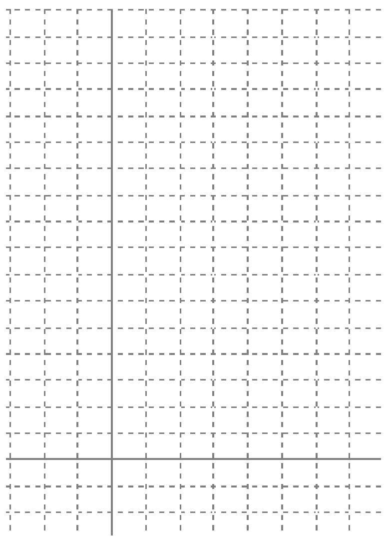
Ejercicio 14: Dada la parábola $f(x)=x^2-2x-3$ se pide:

a) Representarla gráficamente

b) Estudiar el signo de $f'(x)$ y deducir sus intervalos de crecimiento y el M, comprobando que coinciden con la información de la gráfica.

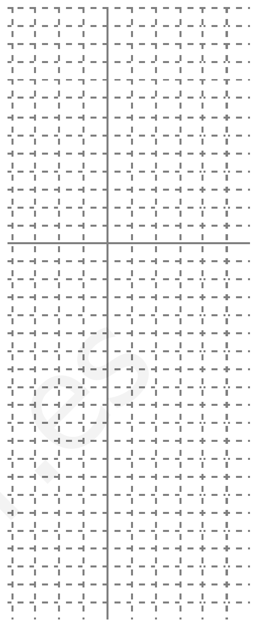


Ejercicio 15: Ídem con la parábola $y=-x^2+4x+12$



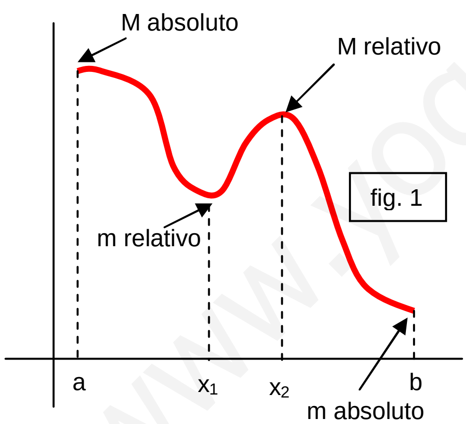
[3] Los puntos de inflexión se estudiarán el próximo curso en profundidad.

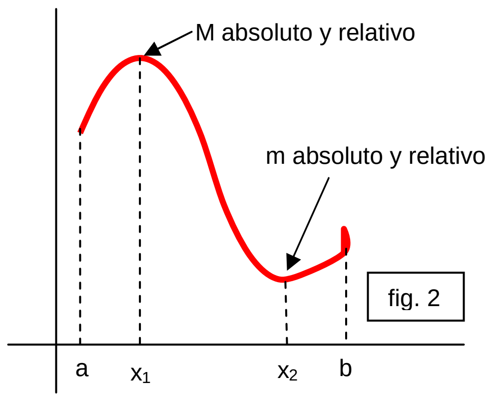
Ejercicio 16: Hallar los intervalos de monotonía y los posibles M y m de la función $f(x)=x^3-3x^2-9x+7$; dibujar, con esa información, su gráfica.

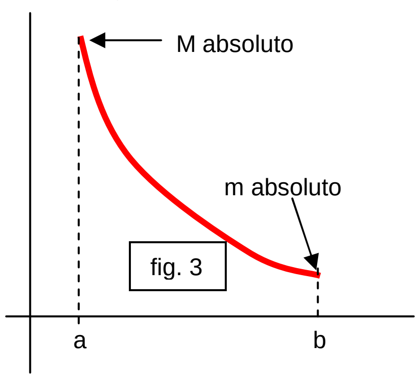


V.5) M o m absolutos:

Dada una función continua en un intervalo [a,b], pueden darse varias situaciones en dicho intervalo, que se resumen en las siguientes:







En resumen:

- Los M y m relativos (los que hemos visto en los subapartados anteriores) son máximos “locales”, mientras que para los absolutos hay que tener en cuenta todo el intervalo.
- Puede haber varios extremos relativos, o puede no haberlos (fig. 3), pero siempre hay M y m absolutos.
- Puede coincidir el M (o el m) absoluto y relativo (fig. 2); en caso contrario el M (o el m) absoluto lógicamente estará en un extremo (figs. 1 y 3)

Ejercicio 17: Unos grandes almacenes abren a las 10 horas y cierran a las 22 horas. Se ha comprobado que el número de visitantes puede representarse, en función de la hora del día, como $N(t)=-t^2+36t+260$, con $10 \leq t \leq 22$ **a)** Representar gráficamente dicha función. **b)** ¿A qué hora se da la máxima afluencia de clientes? ¿Cuál es el máximo número de clientes que registran? **c)** ¿A qué hora se da la mínima afluencia de clientes? ¿De qué número de clientes se trata? **d)** ¿Cuántos clientes quedan a la hora de cerrar?

VI) REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

A la hora de representar una función conviene hallar, por este orden, los siguientes aspectos:

1º) Dom(f):
- Recordar que es el conjunto formado por todos los x para los que existe imagen f(x)
- Las reglas para hallarlo son prácticamente las mismas que las vistas en el tema anterior para estudiar la continuidad de las funciones más usuales (Por ejemplo, recordar que las funciones polinómicas tienen Dom(f)=$\mathbb{R}$).

2º) Corte con los ejes:

CORTE CON:	¿CÓMO SE CALCULA?	¿CUÁNTOS CORTES PUEDE HABER?
eje x	haciendo y=0 (habrá que resolver una ecuación)	ninguno, uno, o varios
eje y	sustituyendo x=0	uno o ninguno

Ejercicio 18: Hallar el posible corte con los ejes de las siguientes funciones:

a) $y=x^2+2x-3$

b) $y = x^3 + 4x^2 + x - 6$

3º) Intervalos de crecimiento $\Rightarrow$ M y m: Se obtienen, como hemos visto en el apartado IV, estudiando el signo de $f'(x)$

4º) Cálculo de las posibles asíntotas: Ya hemos visto en el tema anterior cómo se calcula la ecuación de las posibles asíntotas horizontales y verticales de una función, y el comportamiento de la gráfica en las proximidades de dichas asíntotas:

Definición de asíntota vertical: $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = \underset{(o\ -\infty)}{\infty} \Leftrightarrow x = a \text{ A.V.}}$

Definición de asíntota horizontal: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ (o\ -\infty)}} f(x) = L \Leftrightarrow y = L \text{ A.H.}}$

■ **Observaciones:** **1º** La gráfica puede cortar a la A.H. para valores finitos de x

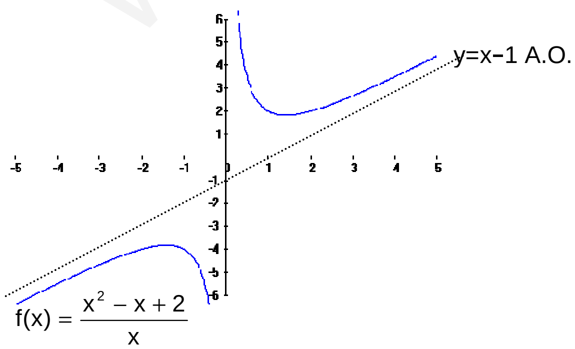
2º En cambio, la gráfica de una función nunca puede cortar a una A.V.

3º Cómo máximo puede haber dos A.H. (una cuando $x \to \infty$ y otra cuando $x \to -\infty$), aunque normalmente es una sola.

4º En la práctica, en la mayoría de los casos las A.V. serán las x que anulen el denominador, pero no el numerador, aunque a veces hay excepciones.

5º Puede haber una, ninguna o varias A.V.

Vamos a ver a continuación otro tipo, las **asíntotas oblicuas**:



$$\boxed{\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x \to \infty\ (o\ -\infty)} \dfrac{f(x)}{x} \\ n = \lim\limits_{x \to \infty\ (o\ -\infty)} [f(x) - mx] \end{array}\right\} \Rightarrow y = mx + n \text{ es A.O.}}$$

(no lo vamos a demostrar)

Ejercicio 19: Hallar las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x}$ *(Sol: A.V. x=0; A.O. y=x−1)*

b) $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x+3}$ *(Sol: A.V. x=−3; A.O. y=x−8)*

c) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-1}$ *(Sol: A.V. x=1; A.O. y=x+1)*

d) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ *(Sol: A.V. x=±2; A.O. y=x)*

■ **Observaciones:** 1) Si sale m=∞ (o −∞) o m=0 ⇒ no hay A.O.

2) IMPORTANTE: Una función no puede tener por el mismo lado (∞ o −∞) a la vez A.H. y A.O.

3) La gráfica puede cortar a la A.O. para valores finitos de x, pero no en el ∞

4) IMPORTANTE: una función racional tiene A.O. si el grado del numerador es una unidad superior al del denominador.

5) IMPORTANTE: Los polinomios no tienen asíntotas de ningún tipo (lo que presentan son ramas infinitas)

6) Un método alternativo para hallar asíntotas oblicuas consiste en hacer la división polinómica del numerador y el denominador: la expresión del cociente resultante será la ecuación de la A.O. (naturalmente, esto sólo es posible en el caso de funciones racionales).

5º) Finalmente, a la hora de representar una función, a veces puede ser útil completar la información anterior confeccionando una pequeña **tabla de valores** con los valores más imprescindibles.

Ejercicio 19: Hallar las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x}$ *(Sol: A.V. x=0; A.O. y=x−1)*

b) $y=\frac{x^2-5x+6}{x+3}$ *(Sol: A.V. x=−3; A.O. y=x−8)*

c) $f(x)=\frac{x^2-4}{x-1}$ *(Sol: A.V. x=1; A.O. y=x+1)*

d) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$ *(Sol: A.V. x=±2; A.O. y=x)*

■ **Observaciones:** 1) Si sale m=∞ (o −∞) o m=0 ⇒ no hay A.O.

2) IMPORTANTE: Una función no puede tener por el mismo lado (∞ o −∞) a la vez A.H. y A.O.

3) La gráfica puede cortar a la A.O. para valores finitos de x, pero no en el ∞

4) IMPORTANTE: una función racional tiene A.O. si el grado del numerador es una unidad superior al del denominador.

5) IMPORTANTE: Los polinomios no tienen asíntotas de ningún tipo (lo que presentan son ramas infinitas)

6) Un método alternativo para hallar asíntotas oblicuas consiste en hacer la división polinómica del numerador y el denominador: la expresión del cociente resultante será la ecuación de la A.O. (naturalmente, esto sólo es posible en el caso de funciones racionales).

5º) Finalmente, a la hora de representar una función, a veces puede ser útil completar la información anterior confeccionando una pequeña **tabla de valores** con los valores más imprescindibles.

EJERCICIOS de DERIVADAS

Derivada de una función en un punto [f'(a)]:

Fórmulas: $\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$ (1) $\boxed{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$ (2)

1. Para cada una de las funciones que figuran a continuación, hallar el valor de su derivada en el punto indicado, utilizando la fórmula que se señala:

a) $f(x)=x^2$ en x=2 mediante (1)

b) $f(x)=2x-5$ en x=1 mediante (2)

c) $f(x)=x^3$ en x=2 mediante (1)

d) $f(x)=\sqrt{x}$ en x=4 mediante (2)

e) $f(x)=1/x$ en x=–1 mediante (1)

f) $f(x)=x^2+x+1$ en x=0 mediante (2)

(Soluc: a) 4; b) 2; c) 12; d) 1/4; e) -1; f) 1)

2. Volver a hacer el ejercicio anterior por la fórmula alternativa en cada caso, y comprobar que se obtiene idéntico resultado.

3. Hallar la derivada de $f(x)=x^2-x$ en x=1. Dibujar la función y trazar la recta tangente en dicho punto. Hallar el ángulo que dicha tangente forma con OX^+ e interpretar el resultado.

Función derivada f'(x):

Fórmula: $\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$ (3)

4. Hallar la derivada de las funciones del ejercicio 1 y sustituir el punto indicado en cada caso, para comprobar que se obtiene el mismo resultado.

5. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones, y a partir de ella obtener f'(2), f'(-1) y f'(0):

a) $f(x)=3x-2$ **b)** $f(x)=x^2-5x+6$ **c)** $f(x)=x^3+1$ **d)** $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ **e)** $f(x)=\frac{1}{x+1}$

6. Hallar la derivada de $f(x)=x^2-3x$ en x=1 mediante la definición de derivada (es decir, mediante un límite) *(Sol: –1)*

Reglas de derivación. Tabla de derivadas:

7. Utilizando la derivada de la función potencial, $\boxed{y=x^n \Rightarrow y'=n\cdot x^{n-1}\ (\forall n\in\mathbb{R})}$, hallar la derivada, **simplificada**, de las siguientes funciones:

a) $y=x^2$ **b)** $y=x^3$ **c)** $y=3x^4$ **d)** $y=-2x^5$ **e)** $y=\frac{3}{2}x^4$

f) $y=\frac{x^2}{4}$ **g)** $y=\sqrt{x}$ **h)** $y=\sqrt{x^3}$ **i)** $y=\sqrt[3]{x^2}$ **j)** $y=2\sqrt[4]{x^3}$

k) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ **l)** $y=x^2\sqrt{x}$ **m)** $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2}$ **n)** y=–2x^6 **o)** $y=\frac{x^8}{4}$

p) $y=2\sqrt{x}$ **q)** $y=3\sqrt[5]{x^3}$ **r)** $y=\frac{\sqrt{x}}{x}$

(*Soluc:* ***a)*** *y'=2x;* ***b)*** *y'=3x^2;* ***c)*** *y'=12x^3;* ***d)*** *y'=-10x^4;* ***e)*** *y'=6x^3;* ***f)*** *y'=x/2;* ***g)*** $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; ***h)*** $y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}$; ***i)*** $y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$;

j) $y'=\frac{3}{2\sqrt[4]{x}}$; ***k)*** $y'=\frac{-1}{2x\sqrt{x}}$; ***l)*** $y'=\frac{5}{2}\sqrt{x^3}$; ***m)*** $y'=\frac{-3\sqrt{x}}{2x^3}$; ***n)*** *y'=-12x^5;* ***o)*** *y '=2x^7;* ***p)*** $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$;

q) $y'=\frac{9}{5\sqrt[5]{x^2}}$; ***r)*** $y'=\frac{-\sqrt{x}}{2x^2}$)

8. Utilizando la fórmula de la derivada de la suma de funciones, hallar la derivada **simplificada** de las siguientes funciones:

a) y=x^2+x+1 **b)** y=2x^3–3x^2+5x–3 **c)** $y=\frac{x^2}{3}-\frac{x}{5}+1$ **d)** $y=\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt{x}$

(*Soluc:* ***a)*** *y'=2x+1;* ***b)*** *y'=6x^2–6x+5;* ***c)*** $y'=\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}$; ***d)*** $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$)

9. Utilizando en cada caso la fórmula más apropiada de la tabla de derivadas, hallar la derivada **simplificada** de las siguientes funciones compuestas:

a) $y=\frac{1}{x^2}$ **b)** $y=\frac{1}{x^2+2x-3}$ **c)** $y=\sqrt{x^2+1}$ **d)** $y=(x^2-3)^2$ **e)** $y=\frac{2}{x^3}$

f) $y=(x^2+x+1)^3$ **g)** $y=\sqrt[3]{2x^3-3}$ **h)** $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ **i)** $y=3(x^2+1)^{10}$ **j)** $y=2(3x^2-1)^4$

k) $y=\frac{2}{(x^2+1)^3}$

(*Sol:* ***a)*** $y'=\frac{-2}{x^3}$; ***b)*** $y'=-\frac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}$; ***c)*** $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; ***d)*** *y'=4x^3–12x;* ***e)*** $y'=\frac{-6}{x^4}$; ***f)*** *y'=3(2x+1)(x^2+x+1)^2;*

g) $y'=\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(2x^3-3)^2}}$; ***h)*** $y'=\frac{-x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$; ***i)*** *y'=60x(x^2+1)^9;* ***j)*** *y'=48x(3x^2–1)^3;* ***k)*** $y'=\frac{-12x}{(x^2+1)^4}$)

10. Ídem:

a) $y=x\sqrt{x^3}$ **b)** $y=(2x-3)(x^2-5)$ **c)** $y=x^2\sqrt[3]{x}$ **d)** $y=(2x-3)\sqrt[4]{x^3}$ **e)** $y=(2x+1)(x^2-3)^2$

f) $y=\sqrt{x}\left(\frac{1}{x+1}\right)^2$

(*Soluc:* ***a)*** $y'=\frac{5}{2}\sqrt{x^3}$; ***b)*** *y'=6x^2–6x–10;* ***c)*** $y'=\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}$; ***d)*** $y'=\frac{14x-9}{4\sqrt[4]{x}}$; ***e)*** *y '=10x^4+4x^3–36x^2–12x+18;*

f) $y'=\frac{-3x+1}{2(x+1)^3\sqrt{x}}$)

11. Utilizando la fórmula para el cociente de funciones, hallar la derivada **simplificada** de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{x^2-5}{x+2}$ **b)** $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}$ **c)** $y=\dfrac{x+2}{x^2-5}$ **d)** $y=\dfrac{3x}{(2x^2+1)^2}$ **e)** $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

*(Sol: **a)** $y'=\dfrac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$; **b)** $y'=-\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$; **c)** $y'=-\dfrac{x^2+4x+5}{(x^2-5)^2}$; **d)** $y'=\dfrac{3-18x^2}{(2x^2+1)^3}$; **e)** $y'=\dfrac{3x^2+4x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$)*

12. Derivar las siguientes funciones, utilizando en cada caso el procedimiento más apropiado, y **simplificar**:

a) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2}$ **b)** $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{x}$ **c)** $y=\dfrac{x+1}{1-x}$

13. Hallar la fórmula para la derivada de $y=\dfrac{u}{v\cdot w}$ e $y=\dfrac{u\cdot v}{w}$, siendo u, v y w funciones.

Ecuación de la recta tangente:

14. Hallar la ecuación de la recta tangente a las curvas en los puntos que se indican:

a) $f(x)=3x^2+8$ en x=1 *(Sol: 6x–y+5=0)*

b) $y=2x^5+4$ en x=–1 *(Sol: 10x–y+12=0)*

c) $f(x)=x^4-1$ en x=0 *(Sol: y=–1)*

d) $f(x)=\dfrac{x^3-2}{x^2-3}$ en x=2 *(Sol: y=–12x+30)*

15. ¿En qué punto de la gráfica de la parábola $f(x)=x^2-6x+8$ la tangente es paralela al eje de abscisas? ¿Qué nombre recibe ese punto? ¿Cuál es la ecuación de la tangente? Dibujar la situación.
(Soluc: y=–1; vértice (3,–1))

16. ¿En qué punto de la gráfica de la función anterior la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? Dibujar la situación. *(Soluc: (7/2,–3/4))*

17. **(S)** Determinar los puntos de la curva $y=x^3+9x^2-9x+15$ en los cuales la tangente es paralela a la recta y=12x+5 *(Soluc: (1,16) y (–7,176))*

Intervalos de crecimiento. M y m. Representación de funciones:

18. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los M y m de las siguientes funciones. Representarlas gráficamente.

a) $f(x)=x^2$

b) $f(x)=x^4-2x^2$

c) $y=x^3-3x^2+1$

d) $f(x)=x^3-6x^2+9x-8$

e) $f(x)=x^3-4x^2+7x-6$

f) $f(x)=x^3$

g) $f(x)=x^4+8x^3+18x^2-10$

h) $y=x^3-3x^2-9x+1$

i) $f(x)=x^4-4x^3+1$

j) $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x+3$

k) $y=2x^3-9x^2$

l) $f(x)=x^3-6x^2+9x$

m) $y=x^3-12x$

(*Soluc:* ***a)*** *⬀ $(0,\infty)$ ⬂ $(-\infty,0)$;* ***b)*** *⬀ $(-1,0)U(1,\infty)$ ⬂ $(-\infty,-1)U(0,1)$;* ***c)*** *⬀ $(-\infty,0)U(2,\infty)$ ⬂ $(0,2)$;* ***d)*** *⬀ $(-\infty,1)U(3,\infty)$ ⬂ $(1,3)$;* ***e)*** *⬀ $\forall x\in\mathbb{R}$;* ***f)*** *⬀ $\forall x\in\mathbb{R}$;* ***g)*** *⬂ $(-\infty,0)$ ⬀ $(0,\infty)$;* ***h)*** *⬀ $(-\infty,-1)U(3,\infty)$ ⬂ $(-1,3)$;* ***i)*** *⬂ $(-\infty,3)$ ⬀ $(3,\infty)$*)

19. Dada $f(x)=2x^3-3x^2$ se pide: **i)** Dom (f) **ii)** Posible Simetría. **iii)** Posibles cortes con los ejes. **iv)** Intervalos de crecimiento a partir de $f'(x)$, y posibles M y m que se deducen. **v)** Ecuación de las asíntotas, en caso de existir. **vi)** Con la información anterior, representarla gráficamente.

20. Ídem para:

a) $f(x)=x^3-3x$ **b)** $y=\frac{x+2}{x-1}$ **c)** $y=x^4-2x^2$ **d)** $y=\frac{2x}{x^2+1}$ **e)** $f(x)=x^3-3x^2$

f) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ **g)** $y=-x^3+12x$ **h)** $f(x)=\frac{9}{x^2-9}$ **i)** $f(x)=\frac{16-8x}{x^2}$ **j)** $y=\frac{x}{x^2+x+1}$

k) $y=\frac{x}{x^2-x+1}$ **l)** $y=\frac{4x}{x-1\ ^{2}}$ **m)** $y=\sqrt{-x^2+4x+5}$

21. Hallar los máximos y mínimos de las siguientes funciones , y a partir de ellos los intervalos de monotonía y su representación gráfica:

a) $y=\frac{x^2}{x+2}$ **b)** $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ **c)** $f(x)=\frac{1}{x^4+3}$ **d)** $y=\frac{1}{x^3+x}$ **e)** $f(x)=|x|$

(*Soluc:* ***a)*** *M(−4,−8) m(0,0);* ***b)*** *M(0,1);* ***c)*** *M(0,1/3);* ***d)*** *no tiene;* ***e)*** *m(0,0)*)

22. Hallar los M y m y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x+3}$$

(*Soluc: m$(-1,\sqrt[3]{2})$; ⬂ $(-\infty,-1)$ ⬀ $(-1,\infty)$*)

23. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x)=\frac{4x+5}{2x-3}$$

(*Solución: decreciente $\forall x\in$ Dom(f)*)

DERIVADAS (con SOLUCIONES)

■ Hallar las derivadas **simplificadas** de las siguientes funciones:

1. $y=3$ $\quad (y'=0)$

2. $y=x$ $\quad (y'=1)$

3. $y=5x$ $\quad (y'=5)$

4. $y=x^3$ $\quad (y'=3x^2)$

5. $y=x^4+x^3+x^2+x+1$ $\quad (y'=4x^3+3x^2+2x+1)$

6. $y=4x^4-x^3+3x^2-7$ $\quad (y'=16x^3-3x^2+6x)$

7. $y=-\frac{x^5}{5}+4x^4-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}-3$ $\quad \left(y'=-x^4+16x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right)$

8. $y=3(x^2+x+1)$ $\quad (y'=3(2x+1))$

9. $y=4(3x^3-2x^2+5)+x^2+1$ $\quad (y'=36x^2-14x)$

10. $y=\frac{2x^3-3x^2+4x-5}{2}$ $\quad (y'=3x^2-3x+2)$

11. $y=(x^2+1)(2x^3-4)$ $\quad (y'=10x^4+6x^2-8x)$

12. $y=1/x$ $\quad (y'=-1/x^2)$

13. $y=1/x^3$ $\quad (y`=-3/x^4)$

14. $y=2/x^5$ $\quad (y'=-10/x^6)$

15. $y=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}$ $\quad \left(y'=\frac{3x^2-2x-6}{x^4}\right)$

16. $y=\sqrt{x}$ $\quad \left(y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

17. $y=\sqrt[3]{x^2}$ $\quad \left(y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)$

18. $y=\sqrt[5]{x^3}$ $\quad \left(y'=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}\right)$

19. $y=2\sqrt[3]{x^2}-3x^2+\frac{1}{5}$ $\quad \left(y'=\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}-6x\right)$

20. $y=(x+1)^5$ $\quad (y'=5(x+1)^4)$

21. $y=(2x^2-3x+1)^3$ $\quad (y'=3(2x^2-3x+1)^2(4x-3))$

22. $y=(x^2+1)^{100}$ $\quad (y'=200x(x^2+1)^{99})$

23. $y=\frac{x+1}{x-1}$ $\quad \left(y'=\frac{-2}{(x-1)^2}\right)$

24. $y=\frac{1}{x^2+1}$ $\quad \left(y'=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\right)$

25. $y=3\,\frac{2x^2-1}{x^3+1}$ $\quad \left(y'=3\,\frac{-2x^4+3x^2+4x}{(x^3+1)^2}\right)$

26. $y=\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)^4$ $\quad \left(y'=\frac{44(2x-3)^3}{(x+4)^5}\right)$

27. $y=\sqrt{x^2+1}$ $\quad \left(y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

28. $y=2\sqrt{x^3-x^2+1}\,(2x^2+3)$ $\quad \left(y'=\frac{14x^4-12x^3+9x^2+2x}{\sqrt{x^3-x^2+1}}\right)$

29. $y=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}$ $\quad (y'=-3x^3+x^2+x+1/x^2)$

30. $y=2/x$ $\quad (y'=-2/x^2)$

31. $y=3(x^2-x+1)(x^2+x-1)$ $\quad (y'=3(4x^3-2x+2))$

32. $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ $\quad \left(y'=\frac{4x}{(x^2+1)^2}\right)$

33. $y=x/2$ $\quad (y'=1/2)$

34. $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$ $\quad \left(y'=-\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}-\frac{9}{x^4}\right)$

35. $y=(2x^2-1)(x^2-2)(x^3+1)$ $\quad (y'=14x^6-25x^4+8x^3+6x^2-10x)$

36. $y=\sqrt{\frac{1-x^3}{x^2+1}}$ $\quad \left(y'=\frac{(-x^4-3x^2-2x)\sqrt{x^2+1}}{2(x^2+1)^2\sqrt{1-x^3}}\right)$

37. $y=(x^2+1)(3x+2)^3$ $\quad (y'=(3x+2)^2(15x^2+4x+9))$

38. $y=(3x^2+2)(2x+1)^3$ $\quad (y'=(2x+1)^2(30x^2+6x+12))$

39. $y=\dfrac{1}{3x^5-x^3+2}$ $\left(y'=\dfrac{-15x^4+3x^2}{(3x^5-x^3+2)^2}\right)$

40. $y=\sqrt{x^4-2x^2+3}$ $\left(y'=\dfrac{2x^3-2x}{\sqrt{x^4-2x^2+3}}\right)$

41. $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ $\left(y'=\dfrac{-2x\sqrt{x^2-1}}{(x^2-1)^2\sqrt{x^2+1}}\right)$

42. $y=\sqrt[5]{x^2}+1$ $\left(y'=\dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}\right)$

43. $y=\dfrac{x^4-2x^2+1}{5}$ $\left(y'=\dfrac{4x^3-4x}{5}\right)$

44. $y=\dfrac{5}{x^4-2x^2+1}$ $\left(y'=\dfrac{20x-20x^3}{\left(x^4-2x^2+1\right)^2}\right)$

45. $y=3(x+1)^3\sqrt[3]{x+1}$ $\left(y'=10\sqrt[3]{(x+1)^7}\right)$

46. $y=x^3\sqrt{x}$ $\left(y'=\dfrac{7x^2\sqrt{x}}{2}\right)$

47. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2x+1}}$ $\left(y'=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^4}}\right)$

48. $y=2x(x^2+1)(2x-1)(x+2)$

49. $y=3\ \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x+1}$ $\left(y'=3\ \dfrac{2x^3+3x^2-5}{(x+1)^2}\right)$

50. $y=\dfrac{2x+4}{\sqrt{x+3}}$ $\left(y'=\dfrac{x+4}{\sqrt{(x+3)^3}}\right)$

51. $y=\dfrac{3x^4}{4}-\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{5}+\dfrac{1}{x}$

$\left(y'=3x^3-2x^2+x-1/5-1/x^2\right)$

52. $y=\sqrt[4]{(x^4-1)^3}$ $\left(y'=\dfrac{3x^3}{\sqrt[4]{x^4-1}}\right)$

53. $y=\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$ $\left(y'=\dfrac{-6x}{(x+1)^4}\right)$

54. $y=\dfrac{2x^2-3}{3x^2-2}$ $\left(y'=\dfrac{10x}{(3x^2-2)^2}\right)$

55. $y=\dfrac{2x^2+1}{x^2-4}$ $\left(y'=\dfrac{-18x}{(x^2-4)^2}\right)$

56. $y=2\,(3x^2-2)^3$ $\left(y'=324x^5-432x^3+144x\right)$

57. $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}$ $\left(y'=\dfrac{x}{2\,(x+1)\sqrt{x+1}}\right)$

58. $y=\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{4}{x}$ $\left(y'=\dfrac{-4x^2+4x-9}{x^4}\right)$

59. $y=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{5}+\sqrt{x}$

60. $y=\sqrt[3]{(x^3-2)^2}$

61. $y=\sqrt{\dfrac{2}{x}}$

62. $y=1+\dfrac{x^3-3}{x^3+2}$

63. $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3$

64. $y=\sqrt[4]{x^3}+\dfrac{1}{2x^2}$

65. $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}$

66. $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}$

67. $y=\left(x^2-3\right)^3\ (2x-1)$

68. $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

69. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

70. $y=\sqrt[3]{x^2+1}$

71. $y=\sqrt[3]{\dfrac{2}{x}}$ $\left(y'=-\dfrac{\sqrt[3]{4x^2}}{3x^2}\right)$

EDERIVADAS (con SOLUCIONES)

■ Hallar las derivadas **simplificadas** de las siguientes funciones:

1. $y = 5$ $\qquad (y'=0)$
2. $y = 3/2$ $\qquad (y'=0)$
3. $y = 3x$ $\qquad (y'=3)$
4. $y = 2x-3$ $\qquad (y'=2)$
5. $y = -x$ $\qquad (y'=-1)$
6. $y = \frac{x}{2} - 5$ $\qquad (y'=1/2)$
7. $y = x^4$ $\qquad (y'=4x^3)$
8. $y = 2x^5$ $\qquad (y'=10x^4)$
9. $y = \frac{x^3}{2}$ $\qquad \left(y' = \frac{3x^2}{2}\right)$
10. $y = x^3+x^2+x+1$ $\qquad (y'=3x^2+2x+1)$
11. $y = 2x^4-3x^2+5x-8$ $\qquad (y'=8x^3-6x+5)$
12. $y = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{7} + 5$ $\qquad \left(y' = x^4 - x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{7}\right)$
13. $y = -x^4 + \frac{1}{7}$ $\qquad (y'=-4x^3)$
14. $y = \frac{1}{x}$ $\qquad \left(y' = -\frac{1}{x^2}\right)$
15. $y = \frac{3}{x}$ $\qquad \left(y' = -\frac{3}{x^2}\right)$
16. $y = \frac{1}{3x}$ $\qquad \left(y' = -\frac{1}{3x^2}\right)$
17. $y = \frac{1}{x^2}$ $\qquad \left(y' = -\frac{2}{x^3}\right)$
18. $y = \frac{3}{x^3}$ $\qquad \left(y' = -\frac{9}{x^4}\right)$
19. $y = \frac{1}{2x^4}$ $\qquad \left(y' = -\frac{2}{x^5}\right)$
20. $y = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1$ $\qquad \left(y' = -\frac{3}{x^4} - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)$
21. $y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$ $\qquad \left(y' = -\frac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}\right)$
22. $y = \frac{3}{x^3 - 2x^2 + 5}$ $\qquad \left(y' = -3\frac{3x^2 - 4x}{(x^3 - 2x^2 + 5)^2}\right)$
23. $y = \frac{x^3 - 2x^2 + 5}{3}$ $\qquad \left(y' = \frac{3x^2 - 4x}{3}\right)$
24. $y = \sqrt{x}$ $\qquad \left(y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$
25. $y = \sqrt{6x}$ $\qquad \left(y' = \frac{3}{\sqrt{6x}}\right)$
26. $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ $\qquad \left(y' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\right)$
27. $y = \sqrt[3]{x}$ $\qquad \left(y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$
28. $y = \sqrt[3]{x^2}$ $\qquad \left(y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)$
29. $y = 2\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt{x+1}$ $\qquad \left(y' = \frac{8}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{3}{2\sqrt{x+1}}\right)$
30. $y = (x^2+1)^2$ $\qquad (y'=4x^3+4x)$
31. $y = (x^2+1)^{100}$ $\qquad (y'=200x(x^2+1)^{99})$
32. $y = (2x^3-3x+5)^3$ $\qquad (y'=3(2x^3-3x+5)^2(6x^2-3))$
33. $y = 5(\sqrt{x}+1)^2$ $\qquad \left(y' = \frac{5(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}\right)$
34. $y = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^5$ $\qquad \left(y' = 5\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^4\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)\right)$
35. $y = (2x^2-3)(x^2-3x+1)$ $\qquad (y'=8x^3-18x^2-2x+9)$

36. $y = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$ $\quad (y'=4x^3+2x)$

37. $y = (x^2-3)(2x^2-5)^3$

38. $y = (x^2+1)(x-3)(x^2+x)$ $\quad (y'=5x^4-8x^3-6x^2-4x-3)$

39. $y = x^2\sqrt{x}$ $\quad \left(y' = \frac{5}{2}x\sqrt{x}\right)$

40. $y = \sqrt[4]{x^3}\,(2x-3)$ $\quad \left(y' = \frac{14x-9}{4\sqrt[4]{x}}\right)$

41. $y = \frac{2x-3}{2x+3}$ $\quad \left(y' = \frac{12}{(2x+3)^2}\right)$

42. $y = \frac{x^2-3}{2x+1}$ $\quad \left(y' = \frac{2x^2+2x+6}{(2x+1)^2}\right)$

43. $y = \frac{2x^2-1}{x^2+2}$ $\quad \left(y' = \frac{10x}{(x^2+2)^2}\right)$

44. $y = \frac{3}{x^2-1}$ $\quad \left(y' = \frac{-6x}{(x^2-1)^2}\right)$

45. $y = \frac{x}{\sqrt{x}}$ $\quad \left(y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

46. $y = \sqrt{\frac{1}{x}+1}$ $\quad \left(y' = \frac{-1}{2x\sqrt{x^2+x}}\right)$

47. $y = 3\,\frac{x^2-4}{x^2+1}$ $\quad \left(y' = \frac{30x}{(x^2+1)^2}\right)$

48. $y = \frac{(3x^2-1)^3}{x^2+1}$ $\quad \left(y' = \frac{108x^7+108x^5-108x^3+20x}{(x^2+1)^2}\right)$

49. $y = \sqrt[4]{x^3}$ $\quad \left(y' = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}\right)$

50. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad \left(y' = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2}\right)$

51. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $\quad \left(y' = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)$

52. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x}}$ $\quad \left(y' = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}\right)$

53. $y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ $\quad \left(y' = -\frac{3\sqrt{x}}{2x^3}\right)$

54. $y = x^3\sqrt{x}$ $\quad \left(y' = \frac{7\sqrt{x^5}}{2}\right)$

55. $y = \frac{1}{(x^2+x+1)^2}$ $\quad \left(y' = -\frac{4x}{(x^2+x+1)^3}\right)$

56. $y = \frac{x}{x^2+1}$ $\quad \left(y' = -\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\right)$

57. $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ $\quad \left(y' = \frac{4x}{(x^2+1)^2}\right)$

58. $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x+1}}$ $\quad \left(y' = \frac{(x^2+2x-1)\sqrt{x+1}}{2\,(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}\right)$

59. $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ $\quad \left(y' = -\frac{\sqrt{x-1}}{(x-1)^2\sqrt{x+1}}\right)$

60. $y = \sqrt{x^5}$ $\quad \left(y' = \frac{5\sqrt{x^3}}{2}\right)$

61. $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2}$ $\quad \left(y' = -\frac{3x+8}{2x^3\sqrt{x+2}}\right)$

62. $y = \frac{2x+3}{x^2+4x-1}$ $\quad \left(y' = -\frac{2x^2+6x+14}{(x^2+4x-1)^2}\right)$

63. $y = \frac{3x}{x^2-4}$ $\quad \left(y' = -\frac{3x^2+12}{(x^2-4)^2}\right)$

64. $y = \frac{x}{x-1}$ $\quad \left(y' = -\frac{1}{(x-1)^2}\right)$

65. $y = \sqrt{x^2-5}$ $\quad \left(y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}}\right)$

66. $y = x^6-10x^4+8x-3$ $\quad (y' = 6x^5-40x^3+8)$

67. $y = \frac{x^3-x+1}{x-3}$ $\quad \left(y' = \frac{2x^3-9x^2+2}{(x-3)^2}\right)$

68. $y = \frac{x^2}{x^2-25}$ $\quad \left(y' = -\frac{50x}{(x^2-25)^2}\right)$

69. $y = 5x^4+x^3-x+6$ $\quad (y' = 20x^3+3x^2-1)$

70. $y = \sqrt[3]{2x^7}$ $\left(y' = \dfrac{7\sqrt[3]{2x^7}}{3x} \right)$

71. $y = \dfrac{5}{x} + \sqrt{x^3}$ $\left(y' = \dfrac{-5}{x^2} + \dfrac{3}{2}\sqrt{x} \right)$

72. $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x+1}$ $\left(y' = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2} \right)$

73. $y = x^4 - 10x^2 + 8$ $(y' = 4x^3 - 20x)$

74. $y = \sqrt[6]{x}$ $\left(y' = \dfrac{1}{6\sqrt[6]{x^5}} \right)$

75. $y = \dfrac{5}{x^2} + \sqrt{x}$ $\left(y' = \dfrac{-10}{x^3} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \right)$

76. $y = 4x + \sqrt[5]{x}$ $\left(y' = 4 + \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} \right)$

77. $y = 5x + \dfrac{2}{x}$ $\left(\left(y' = 5 - \dfrac{2}{x^2} \right)\right)$

78. $y = 5x^9\,(3x+2)^3$ $(y' = 45x^8\,(3x+2)^2\,(4x+2))$

79. $y = \dfrac{x\sqrt{x}}{x+2}$ $\left(y' = \dfrac{\sqrt{x}\,(x+6)}{2\,(x+2)^2} \right)$

80. $y = \dfrac{2x}{5x+8}$ $\left(y' = \dfrac{16}{(5x+8)^2} \right)$

81. $y = (x^3+8x)^{10}$ $(y' = 10\,(x^3+8x)^9\,(3x^2+8))$

82. $y = \dfrac{3x-1}{x^5 - 4x}$ $\left(y' = \dfrac{-12x^5 + 5x^4 - 4}{\left(x^5 - 4x\right)^2} \right)$

83. Deducir la fórmula de la derivada de $y = \sqrt[n]{x}$ e $y = \sqrt[n]{u}$

84. Deducir las derivadas de $y = \dfrac{u}{v \cdot w}$ e $y = \dfrac{u \cdot v}{w}$

La **criba de Eratóstenes** es un procedimiento para hallar todos los números primos menores que un número natural dado. Se llama así en honor al astrónomo y geógrafo griego del siglo III a. C. que, parece ser, fue el primero en dar con este método. Nosotros aquí vamos a hallar los primos menores que 1000. Para ello, eliminamos de la lista sombreándolos los múltiplos de 2. Luego tomamos el primer número después del 2 que no fue eliminado (el 3) y eliminamos de la lista sus múltiplos, y así sucesivamente. Es fácil advertir que bastará continuar este proceso hasta $\sqrt{1000} \cong 31{,}62...$, es decir, hasta el 31. Los números que permanecen en blanco son los **primos**[1]:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128
129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192
193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224
225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256
257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288
289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352
353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384
385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416
417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448
449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480
481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512
513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544
545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576
577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	601	602	603	604	605	606	607	608
609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640
641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672
673	674	675	676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704
705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736
737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765	766	767	768
769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800
801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832
833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864
865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896
897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928
929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960
961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992
993	994	995	996	997	998	999	1000																								

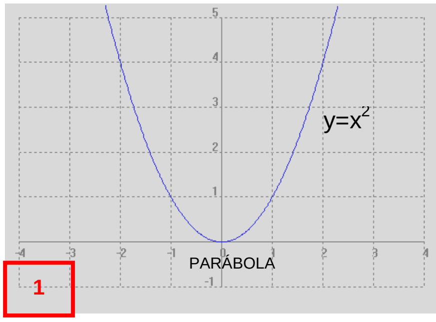
[1] Teniendo en cuenta la definición de número primo –todo número natural que tiene únicamente dos divisores naturales distintos: él mismo y el 1–, el 2 es primo (de hecho, es el único número primo par). El 1, por convenio, no se considera ni primo ni compuesto.

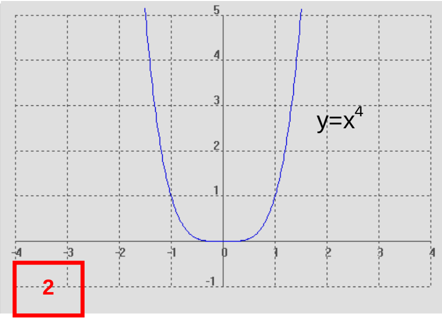
PRINCIPALES SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

	SÍMBOLO	SIGNIFICADO
1	$\forall$	Para todo
2	$\exists$	Existe al menos uno
3	$\exists!$	Existe un único
4	$\nexists$	No existe
5	/	Tal que
6	:	Tal que
7	$<$	Menor que
8	$=$	Igual que
9	$>$	Mayor que
10	$\leq$	Menor o igual que
11	$\geq$	Mayor o igual que
12	∞	Infinito
13	$\circ$	Composición de funciones
14	$\propto$	Proporcional a
15	$\perp$	Perpendicular a
16	$\neq$	Distinto de
17	$\approx$ $\cong$ $\simeq$	Aproximadamente igual a
18	$\equiv$	Idéntico a
19	$\cup$	Unión de conjuntos
20	$\cap$	Intersección de conjuntos
21	$\subset$	Contenido en
22	$\supset$	Contiene a
23	$\in$	Perteneciente a
24	$\notin$	No perteneciente a
25	$\varnothing$	Conjunto vacío
26	$\Rightarrow$	Implica
27	$\Leftrightarrow$	Si y sólo si
28	$\sum$	Sumatorio
29	$\prod$	Productorio
30	$\mathbb{N}$	Números naturales
31	$\mathbb{Z}$	Números enteros
32	$\mathbb{Q}$	Números racionales
33	$\mathbb{I}$	Números irracionales[1]
34	$\mathbb{R}$	Números reales
35	$\mathbb{C}$	Números complejos

[1] En realidad esta notación no es muy estándar; la forma correcta de nombrar los irracionales sería $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

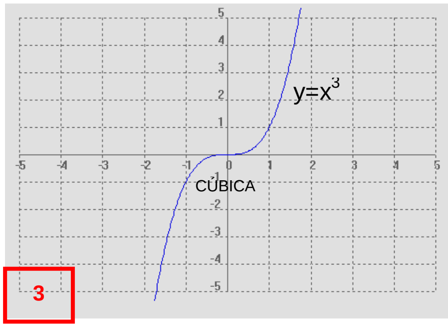
GRÁFICAS MÁS REPRESENTATIVAS

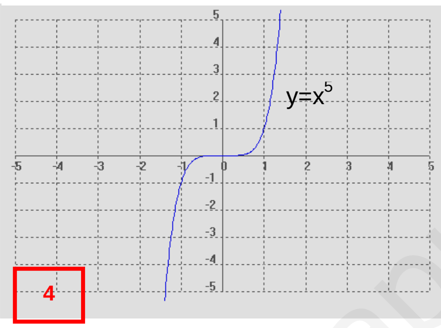




En general, las curvas $y=x^n$, siendo n positivo par, tienen esta forma.

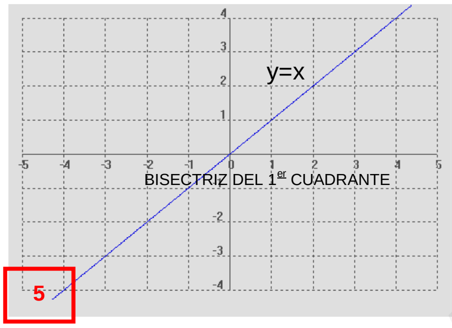
(cuanto mayor es n, más acusada es la curvatura)

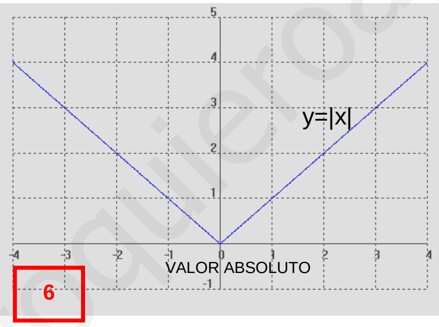




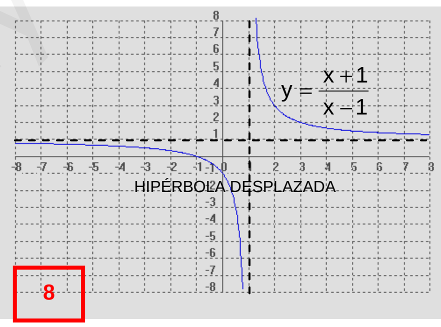
En general, las curvas $y=x^n$, siendo n positivo impar ($\neq 1$), tienen esta forma.

(cuanto mayor es n, más acusada es la curvatura)





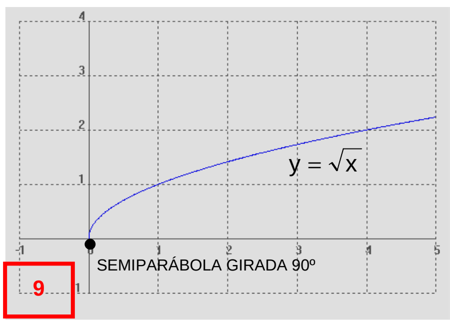
En general, la gráfica de $y=|f(x)|$ se obtiene reflejando la de $f(x)$ respecto al eje OY en el semiplano superior.

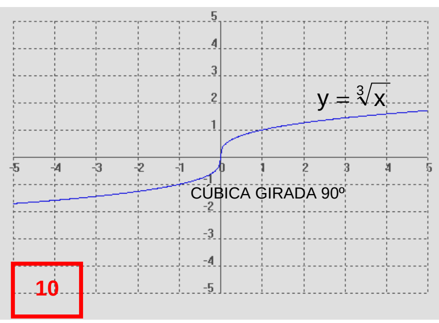


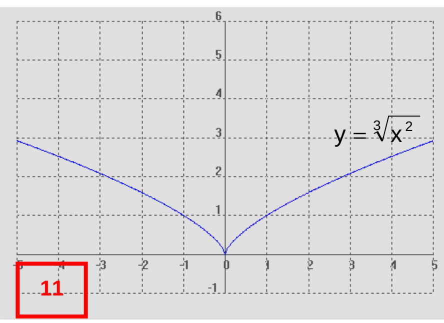
En general,

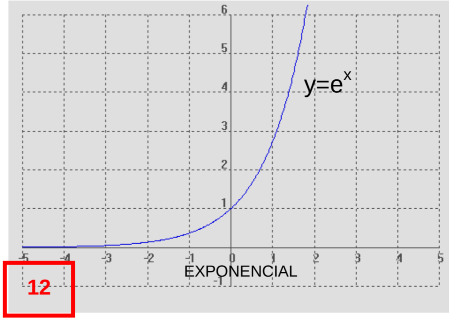
$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

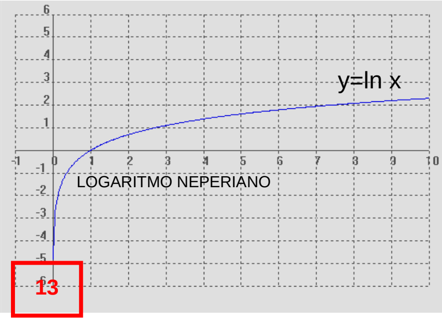
donde $c\neq 0$, es una hipérbola.

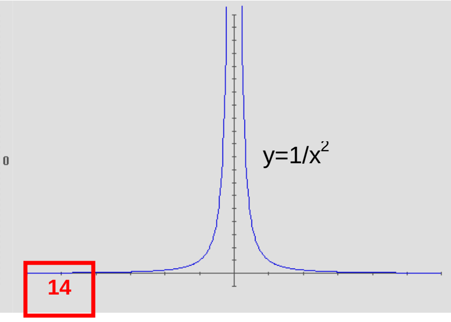


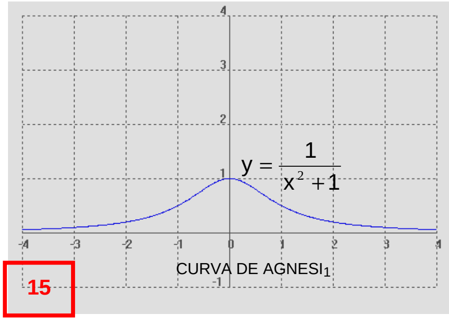


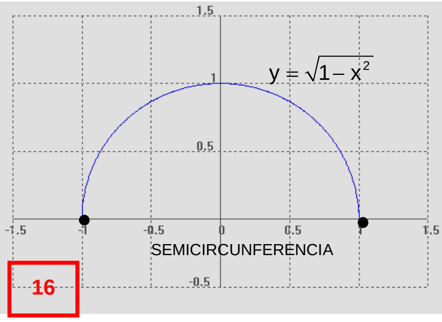


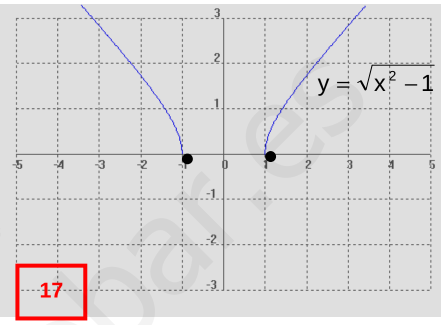


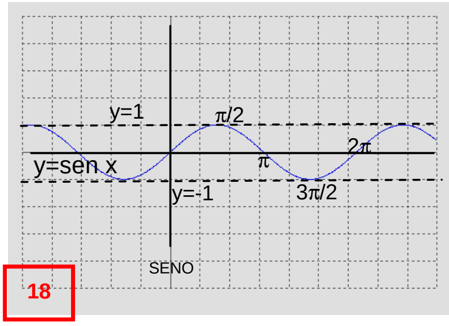


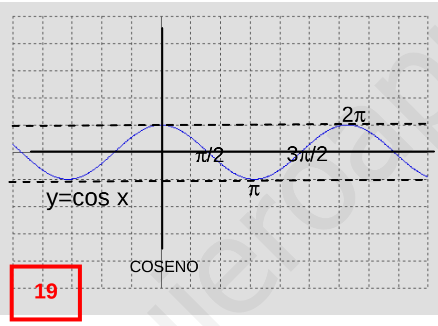


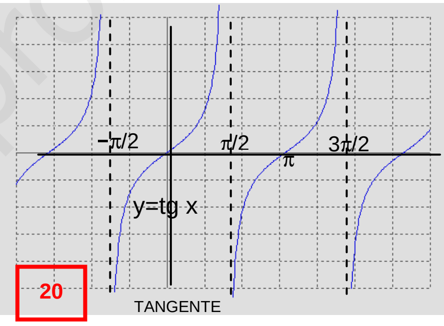












Nombre		Símbolo	
		Minúscula	Mayúscula
1	Alfa	α	Α
2	Beta	β	Β
3	Gamma	γ	Γ
4	Delta	δ	Δ
5	Épsilon	ε	Ε
6	Zeta	ζ	Ζ
7	Eta	η	Η
8	Theta	θ,ϑ	Θ
9	Iota	ι	Ι
10	Kappa	κ	Κ
11	Lambda	λ	Λ

12	My	μ	Μ
13	Ny	ν	Ν
14	Xi	ξ	Ξ
15	Ómicron	ο	Ο
16	Pi	π	Π
17	Rho	ρ	Ρ
18	Sigma	σ, ς	Σ
19	Tau	τ	Τ
20	Ípsilon	υ	Υ
21	Fi	ϕ,φ	Φ
22	Ji	χ	Χ
23	Psi	ψ	Ψ
24	Omega	ω	Ω

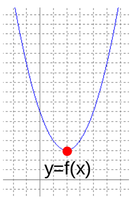
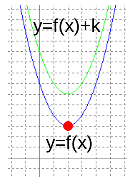
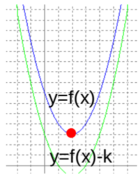
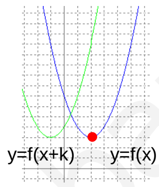
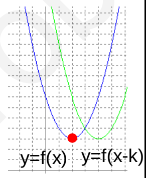
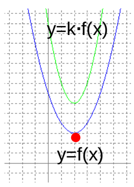
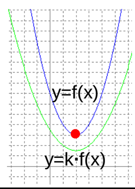
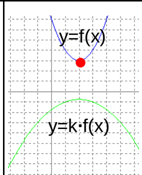
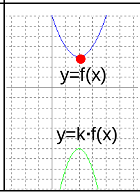
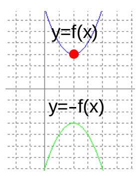
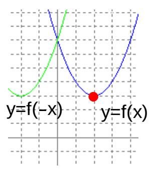
1 En honor de María Agnesi, matemática italiana del siglo XVIII, que fue la primera en investigar las propiedades de las curvas de este tipo.

TABLA DE DERIVADAS ELEMENTALES

FUNCIONES SIMPLES:		FUNCIONES COMPUESTAS (Regla de la cadena)	
y=k	y'=0		
y=x	y'=1		
$y=k\cdot x$	$y'=k$	$y=k\cdot u$	$y'=k\cdot u'$
$y=x^n$ $(n\in\mathbb{R})$	$y'=n\cdot x^{n-1}$	$y=u^n$ $(n\in\mathbb{R})$	$y'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$
		$y=u\pm v$	$y'=u'\pm v'$
		$y=u\cdot v$	$y'=u'\cdot v+u\cdot v'$
		$y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$
$y=\frac{1}{x}$	$y'=-\frac{1}{x^2}$	$y=\frac{1}{u}$	$y'=-\frac{u'}{u^2}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y=\sqrt{u}$	$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y=\sqrt[n]{x}$	hacer $y=x^{1/n}$	$y=\sqrt[n]{u}$	hacer $y=u^{1/n}$

NOTA: *en esta tabla **k** es cualquier constante, y **u** y **v** son funciones.*

Transformaciones de funciones

FUNCIÓN ORIGINAL	TIPO DE TRANSFORMACIÓN	FUNCIÓN TRANSFORMADA	GRÁFICA	RESULTADO
	TRASLACIONES	y=f(x)±k		**TRASLACIÓN hacia ARRIBA**
				**TRASLACIÓN hacia ABAJO**
		y=f(x±k)		**TRASLACIÓN hacia la IZQUIERDA**
				**TRASLACIÓN hacia la DERECHA**
	CONTRACCIONES o EXPANSIONES	y=k · f (x)	**k>1** 	**CONTRACCIÓN**
			0<k<1 	**EXPANSIÓN**
			−1<k<0 	**(Reflexión +) EXPANSIÓN**
			k<−1 	**(Reflexión +) CONTRACCIÓN**
	REFLEXIONES	y=−f(x)		**REFLEXIÓN respecto al EJE X**
		y=f(−x)		**REFLEXIÓN respecto al EJE Y**