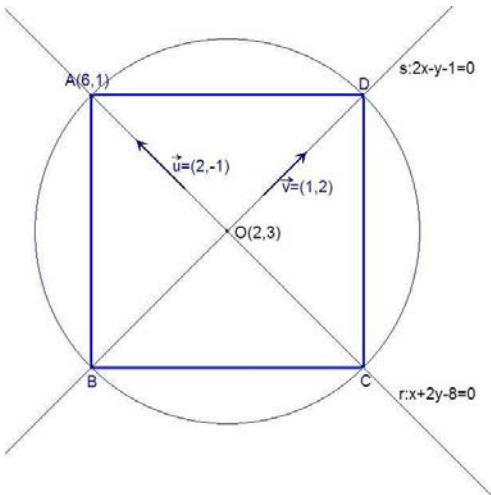


### Ejercicio 1.

El punto  $A(6,1)$  es un vértice de un cuadrado inscrito en la circunferencia de ecuación  $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0$ . Calcula las coordenadas de los demás vértices del cuadrado.



*Ecuación de una circunferencia de centro  $(a,b)$  y radio  $R$*

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ , desarrollando:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -2ax = -4, & a = 2 \\ -2by = -6, & b = 3 \end{cases}$$

*Así el centro de la circunferencia es  $O(2,3)$*

*$O$  es el punto medio de  $A$  y  $C(x,y) \Rightarrow (2,3) = \left(\frac{6+x}{2}, \frac{1+y}{2}\right)$*

$C(-2,5)$

*Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares: calculamos  $s$  que es perpendicular a la recta  $r$  y pasa por  $O$*

$$s \equiv \begin{cases} O(2,3) \\ \vec{v} = (1,2) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} \Rightarrow s \equiv 2x - y - 1 = 0$$

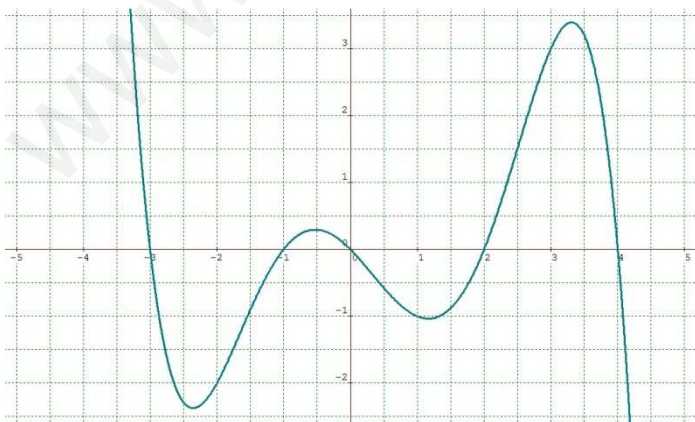
*Ahora obtenemos los puntos  $B$  y  $D$  como intersección de la recta  $s$  con la circunferencia.*

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 + (2x-1)^2 - 4x - 6(2x-1) - 7 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 4x^2 - 4x + 1 - 4x - 12x + 6 - 7 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 20x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow B(0,-1) \\ x = 4 \Rightarrow D(4,7) \end{cases}$$

### Ejercicio 2.

Observando la gráfica de la función  $f'(x)$ , analiza las características de la función  $f(x)$ .



Cuando  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  es creciente y eso ocurre en los intervalos  $(-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (2, 4)$   
 Cuando  $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  es decreciente y eso ocurre en los intervalos  $(-3, -1) \cup (0, 2) \cup (4, +\infty)$

$f'(x) = 0$  en los puntos  $x = -3, x = -1, x = 0, x = 2$  y  $x = 4 \Rightarrow$  en esos puntos la recta tangente a  $f(x)$  es horizontal por tanto pueden ser puntos de máximo o de mínimo para la función  $f(x)$ .

Como en  $(-\infty, -3)$   $f(x)$  es creciente y en  $(-3, -1)$  es decreciente  $\Rightarrow$  en  $x = -3$  hay un máximo para la función  $f(x)$ . De igual modo en  $x = 0$  y  $x = 4$  habrá máximos de la función  $f(x)$ .

Como en  $(-3, -1)$   $f(x)$  es decreciente y en  $(-1, 0)$  es creciente  $\Rightarrow$  en  $x = -1$  hay un mínimo para la función  $f(x)$ . De igual modo en  $x = 2$  habrá otro mínimo de la función  $f(x)$ .

En los puntos  $x = -2, 4; x = -\frac{1}{2}; x = 1, 2; x = 3, 3$   $f'(x)$  tendrá tangente horizontal  $\Rightarrow$  su derivada en esos puntos es cero, es decir la segunda derivada de  $f(x)$  se anula  $\Rightarrow$  en esos puntos  $f''(x) = 0$  y sin embargo  $f'(x) \neq 0 \Rightarrow$  en  $x = -2, 4; x = -\frac{1}{2}; x = 1, 2; x = 3, 3$   $f(x)$  presenta puntos de inflexión (cambios de curvatura) no de silla.

### Ejercicio 3.

Sean los vectores  $\vec{u}_1 = (1, -2)$  y  $\vec{u}_2 = (3, 1)$ , cuyas coordenadas están expresadas en la base canónica  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ , y  $\vec{v}$  un vector de coordenadas  $\vec{v} = (-2, 3)$  en la base  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ .

- Calcula el módulo del vector  $\vec{v}$ .
- Encuentra las coordenadas, en la base  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ , de un vector  $\vec{w}$  que sea perpendicular a  $\vec{v}$ .

Como  $\vec{u}_1$  y  $\vec{u}_2$  están expresados en la base canónica (ortonormal)  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ , el cálculo de sus módulos y producto escalar queda simplificado:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (x, y) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) \cdot (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2)} = \sqrt{x^2(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + 2xy(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + y^2(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2)} = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \vec{u} = (x, y) \\ \vec{v} = (x', y') \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) \cdot (x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2) = xx'(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + (xy' + x'y)(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + yy'(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) = xx' + yy'$$

$$\vec{u}_1 = (1, -2) \Rightarrow |\vec{u}_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\vec{u}_2 = (3, 1) \Rightarrow |\vec{u}_2| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 = 1$$

$$\vec{v} = (-2, 3) \text{ en la base } \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} \text{ que no es ortonormal, con lo que: } |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2) \cdot (-2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2)} = \sqrt{4(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1) - 12(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) + 9(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2)} = \sqrt{4 \cdot 5 - 12 \cdot 1 + 9 \cdot 10} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

También podemos expresar el vector  $\vec{v}$  en la base canónica  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \Rightarrow$

$\vec{v} = (-2, 3)$  en la base  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} \Rightarrow \vec{v} = -2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 = -2(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) + 3(3\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 7\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2$  entonces

$\vec{v} = (7, 7)$  en la base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$

Ahora buscamos  $\vec{w}$  en la base  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ , tal que  $\vec{w} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{v} = 0$  (habrá infinitos vectores)

$\vec{w} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 \Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{v} = (x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2) \cdot (-2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2) = -2x(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1) + (3x - 2y)(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) + 3y(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2) \Rightarrow$

$\vec{w} \cdot \vec{v} = -10x + (3x - 2y) + 30y \Rightarrow -10x + (3x - 2y) + 30y = 0 \Rightarrow -7x + 28y = 0 \Rightarrow x = 4y$

con lo que el vector  $\vec{w}$  tendrá la primera coordenada cuádruplo de la segunda  $y$ , por ejemplo,

para  $y = 1 \Rightarrow \boxed{\vec{w} = (4, 1)}$  en la base  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  con  $\vec{w} \perp \vec{v}$ .

#### Ejercicio 4.

La recta de ecuación  $y = 2x - 7$  es tangente a la gráfica de la función  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$  en el punto  $x = 1$ . Calcula  $a$  y  $b$ .

La recta  $y = 2x - 7$  y la función  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$  son tangentes en  $x = 1 \Rightarrow$  ese punto es común para ambas funciones. En la recta si  $x = 1 \Rightarrow y = -5$ , luego el punto de tangencia es  $P(1, -5)$  con lo que debe cumplirse que  $f(1) = -5$

Por otra parte, la pendiente de la recta tangente a  $f(x)$  en  $x = 1$  es 2  $\Rightarrow f'(1) = 2$ .

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\begin{cases} f(1) = -5 \Rightarrow 1 + a + b + 2 = -5 \\ f'(1) = 2 \Rightarrow 3 + 2a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -8 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = -15 \end{cases} \quad y \quad \boxed{f(x) = x^3 + 7x^2 - 15x + 2}$$

#### Ejercicio 5.

Obtén la función derivada de las siguientes funciones:

a)  $y = (2x - 3)^5 \Rightarrow y' = 5 \cdot (2x - 3)^4 \cdot 2 \Rightarrow y' = 10 \cdot (2x - 3)^4$

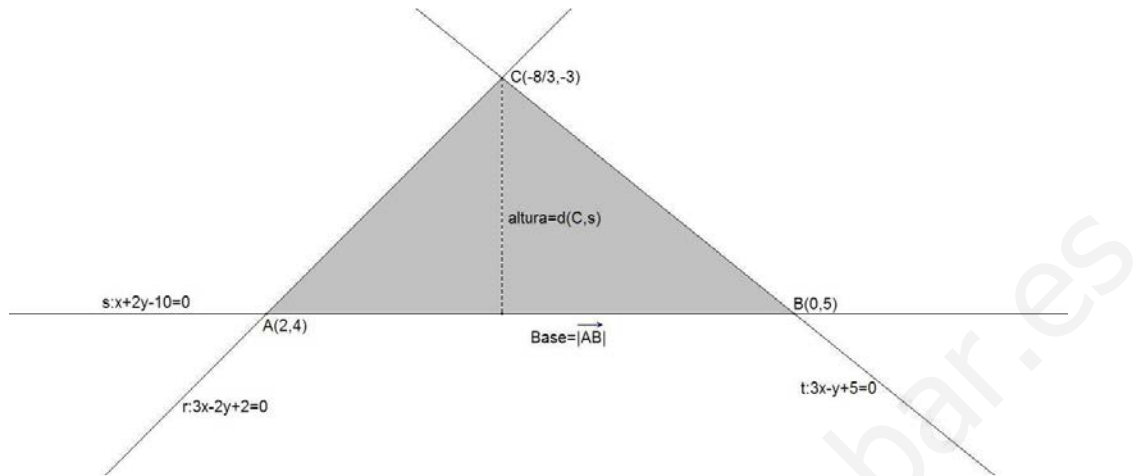
b)  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \Rightarrow y' = \frac{2x \cdot (x^2 + 1) - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow y' = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$

c)  $y = \operatorname{tg} 5x \Rightarrow y' = (1 + \operatorname{tg}^2 5x) \cdot 5 \Rightarrow y' = 5 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 5x) / \text{también } y' = \frac{5}{\cos^2 5x}$

d)  $y = (x^2 + 3x) \cdot \ln(x + 3) \Rightarrow y' = (2x + 3) \cdot \ln(x + 3) + (x^2 + 3x) \cdot \frac{1}{x + 3} \Rightarrow y' = (2x + 3) \cdot \ln(x + 3) + x$

### Ejercicio 6.

Un triángulo  $ABC$  tiene sus lados sobre las rectas  $r \equiv 3x - 2y + 2 = 0$ ,  $s \equiv x + 2y - 10 = 0$  y  $t \equiv 3x - y + 5 = 0$ . Calcula el área y el perímetro del triángulo.



Calculamos los vértices del triángulo:

$$A = s \cap r \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 10 = 0 \\ 3x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2,4) \quad / \quad B = s \cap t \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 10 = 0 \\ 3x - y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0,5)$$

$$C = t \cap r \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ 3x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{8}{3}, -3\right)$$

Tomamos como base el lado  $AB$ .  $\overline{AB} = (-2,1) \Rightarrow$  medida de la base  $= |\overline{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$$\text{medida de la altura} = d(C,s) = \frac{\left| -\frac{8}{3} + 2 \cdot (-3) - 10 \right|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{56/3}{\sqrt{5}} = \frac{56}{3\sqrt{5}}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{|\overline{AB}| \cdot d(C,s)}{2} = \frac{\sqrt{5} \cdot \frac{56}{3\sqrt{5}}}{2} = \frac{28}{3} u^2$$

$$\text{Perímetro del triángulo} = |\overline{AB}| + |\overline{AC}| + |\overline{BC}| = \sqrt{5} + \frac{7\sqrt{13}}{3} + \frac{8\sqrt{10}}{3} = \frac{3\sqrt{5} + 7\sqrt{13} + 8\sqrt{10}}{3} u$$

### Ejercicio 7.

Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función

$$f(x) = x^2 \cdot e^x$$

En los puntos donde  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  es creciente

En los puntos donde  $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  es decreciente

En los puntos donde  $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x)$  puede tener máximos, mínimos o puntos de silla.

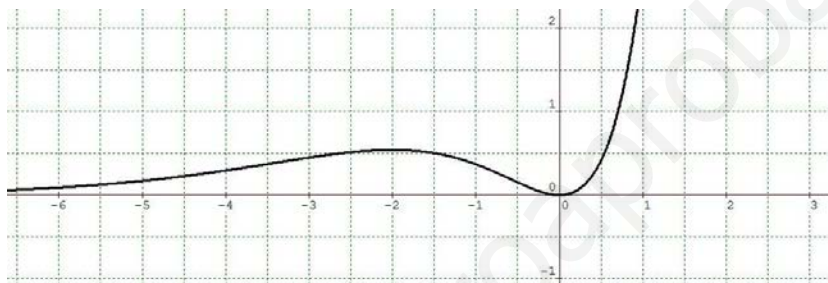
$$f(x) = x^2 \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = 0 \Rightarrow (2x + x^2) \cdot e^x = 0 \Rightarrow 2x + x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Resolvemos ahora la inecuación  $2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x > 0 \Rightarrow 2x + x^2 > 0 \Rightarrow x(2+x) > 0$

	$(-\infty, -2)$	$-2$	$(-2, 0)$	$0$	$(0, +\infty)$
$x$	-	-	-	0	+
$2+x$	-	0	+	+	-
$x \cdot (2+x)$	+ ↗	0	- ↘	0	+ ↗

Entonces  $f(x)$  es creciente en  $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$  y en  $x = -2$  la función tiene un máximo.  
 $f(x)$  es decreciente en  $(-2, 0)$  y en  $x = 0$  la función tiene un mínimo.



### Ejercicio 8.

Estudia las discontinuidades de la función  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$  y su comportamiento cuando  $x \rightarrow \infty$ .

$f(x)$  es cociente de dos funciones continuas (polinómicas) por tanto será una función continua salvo en los puntos que se anule el denominador.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ es discontinua en los puntos } x = 1 \text{ y } x = 3$$

Analizamos las discontinuidades:

$$\text{en } x = 1, \nexists f(1) \text{ y } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{(x-1)(x-3)} \rightarrow \frac{1}{0^- \cdot (-2)} \rightarrow +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{(x-1)(x-3)} \rightarrow \frac{1}{0^+ \cdot (-2)} \rightarrow -\infty \end{cases} \text{ discontinuidad de tipo infinito}$$

$$\text{en } x = 3, \nexists f(3) \text{ y } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2}{(x-1)(x-3)} \rightarrow \frac{9}{2 \cdot 0^-} \rightarrow -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2}{(x-1)(x-3)} \rightarrow \frac{9}{2 \cdot 0^+} \rightarrow +\infty \end{cases} \text{ discontinuidad de tipo infinito}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \left( \text{indet. } \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} \rightarrow 1$$

$y=1$  es una asíntota horizontal de la función  $f(x)$

