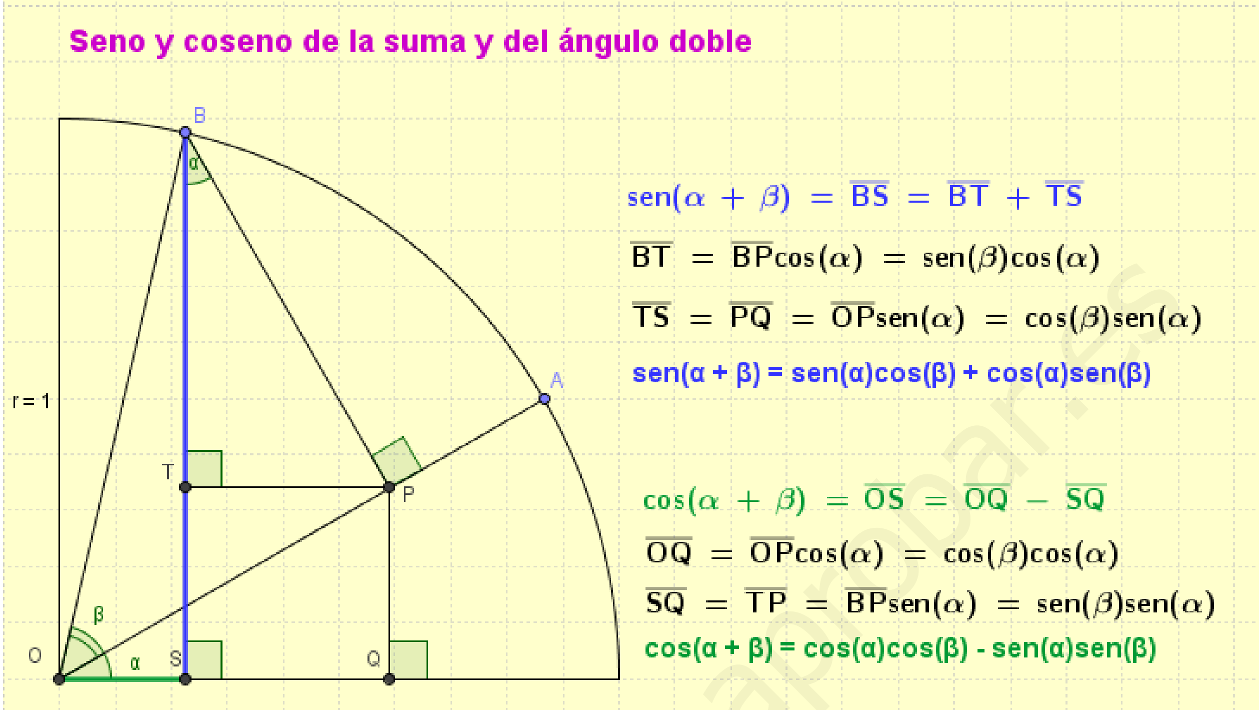
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO SUMA, DIFERENCIA, DOBLE Y MITAD

CONSIDEREMOS UN SISTEMA DE REFERENCIA GONIOMÉTRICO



Esto es:

COSENO DE LA SUMA

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - sen\,\alpha\cdot sen\,\beta}$$

SENO DE LA SUMA

$$\boxed{sen\,(\alpha+\beta) = sen\,\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot sen\,\beta}$$

COSENO DE LA DIFERENCIA

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha+(-\beta)) = \cos\alpha\cdot\cos(-\beta) - sen\,\alpha\cdot sen(-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + sen\,\alpha\cdot sen\,\beta$$

$$pues \quad \cos(-\beta) = \cos\beta \quad y \quad sen\,(-\beta) = -sen\,\beta$$

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + sen\,\alpha\cdot sen\beta}$$

SENO DE LA DIFERENCIA

$$sen\,(\alpha-\beta) = sen\,(\alpha+(-\beta)) = sen\,\alpha\cdot\cos(-\beta) + \cos\alpha\cdot sen\,(-\beta) = sen\,\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot sen\beta$$

$$pues \quad \cos(-\beta) = \cos\beta \quad y \quad sen\,(-\beta) = -sen\beta$$

$$\boxed{sen\,(\alpha-\beta) = sen\,\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot sen\beta}$$

TANGENTE DE LA SUMA

$$tg\,(\alpha+\beta)=\frac{sen\,(\alpha+\beta)}{\cos\,(\alpha+\beta)}=\frac{sen\,\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot sen\,\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-sen\,\alpha\cdot sen\,\beta}=\frac{\dfrac{sen\,\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot sen\,\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-sen\,\alpha\cdot sen\,\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=$$

$$=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$$

$$\boxed{tg\,(\alpha+\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}}$$

TANGENTE DE LA DIFERENCIA

$$tg\,(\alpha-\beta)=tg\,(\alpha+(-\beta))=\frac{tg\,\alpha+tg\,(-\beta)}{1-tg\,\alpha\cdot tg\,(-\beta)}=\frac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$$

$$\boxed{tg\,(\alpha-\beta)=\frac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

$$sen\,2\alpha=sen\,(\alpha+\alpha)=sen\,\alpha\cdot\cos\alpha+\cos\alpha\cdot sen\,\alpha=2\cdot sen\,\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\boxed{sen\,2\alpha=2\cdot sen\,\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$\cos 2\alpha=\cos\,(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-sen\,\alpha\cdot sen\,\alpha=\cos^2\alpha-sen^2\alpha$$

$$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-sen^2\alpha}$$

$$tg\,2\alpha=tg\,(\alpha+\alpha)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\alpha}{1-tg\,\alpha\cdot tg\,\alpha}=\frac{2\cdot tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

$$\boxed{tg\,2\alpha=\frac{2\cdot tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD

Sabemos que: $$\begin{aligned}\cos 2a&=\cos^2 a-sen^2 a\\ 1&=sen^2 a+\cos^2 a\end{aligned}$$

Particularizamos las igualdades anteriores para el ángulo $''A''$ y su mitad que sería $\frac{A}{2}$:

Hacemos $A=2a\rightarrow a=\frac{A}{2}$

$$\left.\begin{array}{r}\cos A=\cos^2\frac{A}{2}-sen^2\frac{A}{2}\\ 1=sen^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\end{array}\right\}\ sumándolas\quad 1+\cos A=2\cdot\cos^2\frac{A}{2}\rightarrow\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}\rightarrow$$

$$\boxed{\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}}$$

$$\left.\begin{array}{r}\cos A=\cos^2\frac{A}{2}-sen^2\frac{A}{2}\\ 1=sen^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\end{array}\right\}\ restándolas\quad 1-\cos A=2\cdot sen^2\frac{A}{2}\rightarrow sen^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}\rightarrow$$

$$\boxed{sen\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}}$$

Y para la tangente:

$$tg\frac{A}{2}=\frac{sen\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}\quad\rightarrow\quad\boxed{tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}}$$

8. TRANSFORMACIÓN DE PRODUCTOS EN SUMAS Y VICEVERSA

PRODUCTO DE SENO POR COSENO

Partimos de las fórmulas del seno de la suma y de la diferencia:

$$\left.\begin{array}{l}sen(\alpha+\beta)=sen\,\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot sen\,\beta\\ sen(\alpha-\beta)=sen\,\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot sen\,\beta\end{array}\right\}\ sumádolas\quad sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)=2\cdot sen\,\alpha\cdot\cos\beta$$

Producto de seno por coseno: $\boxed{sen\,\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)\right]}$

PRODUCTO DE SENO POR SENO

Partimos de las fórmulas del coseno de la suma y de la diferencia:

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-sen\,\alpha\cdot sen\,\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+sen\,\alpha\cdot sen\,\beta\end{array}\right\}\ restándolas\quad \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\cdot sen\,\alpha\cdot sen\,\beta$$

Producto de seno por seno: $\boxed{sen\,\alpha\cdot sen\,\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]}$

PRODUCTO DE COSENO POR COSENO

Partimos de las fórmulas del coseno de la suma y de la diferencia:

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-sen\,\alpha\cdot sen\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+sen\,\alpha\cdot sen\beta\end{array}\right\}\ sumtándolas\quad \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta$$

Producto de coseno por coseno: $\boxed{\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]}$

SUMAS DE SENOS

De la expresión anterior: $sen(a+b)+sen(a-b)=2\cdot sen\ a\cdot\cos b$ hacemos:

$$\left.\begin{array}{l} A=a+b \\ B=a-b \end{array}\right\} \Rightarrow \quad sumando \quad a=\frac{A+B}{2} \quad y \ \text{ restando } \quad b=\frac{A-B}{2}$$

De donde: $$\boxed{senA+senB=2\cdot sen\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}}$$

DIFERENCIA DE SENOS

Partimos de las fórmulas del seno de la suma y de la diferencia:

$$\left.\begin{array}{l} sen(a+b)=sen\ a\cdot\cos b+\cos a\cdot sen\ b \\ sen(a-b)=sen\ a\cdot\cos b-\cos a\cdot sen\ b \end{array}\right\} \text{restandolas} \quad sen(a+b)-sen(a-b)=2\cdot\cos a\cdot sen\ b$$

De la expresión anterior: $sen(a+b)-sen(a-b)=2\cdot\cos a\cdot sen\ b$ hacemos:

$$\left.\begin{array}{l} A=a+b \\ B=a-b \end{array}\right\} \Rightarrow \quad sumando \quad a=\frac{A+B}{2} \quad y \ \text{ restando } \quad b=\frac{A-B}{2}$$

De donde: $$\boxed{senA-senB=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot sen\frac{A-B}{2}}$$

SUMAS DE COSENOS

Partimos de las fórmulas del coseno de la suma y de la diferencia:

$$\left.\begin{array}{l} \cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-sen\ a\cdot sen\ b \\ \cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+sen\ a\cdot sen\ b \end{array}\right\} sumandolas \quad \cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cdot\cos\ a\cdot sen\ b$$

De la expresión anterior: $\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cdot\cos\ a\cdot sen\ b$ hacemos:

$$\left.\begin{array}{l} A=a+b \\ B=a-b \end{array}\right\} \Rightarrow \quad sumando \quad a=\frac{A+B}{2} \quad y \ \text{ restando } \quad b=\frac{A-B}{2}$$

De donde: $$\boxed{\cos A+\cos B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}}$$

DIFERENCIA DE COSENOS

Partimos de las fórmulas del coseno de la suma y de la diferencia:

$$\left.\begin{array}{l} \cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-sen\ a\cdot sen\ b \\ \cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+sen\ a\cdot sen\ b \end{array}\right\} \text{restandolas} \quad \cos(a+b)-\cos(a-b)=-2sen\ a\cdot sen\ b$$

De la expresión anterior: $\cos(a+b)-\cos(a-b)=-2sen\ a\cdot sen\ b$ hacemos:

$$\left.\begin{array}{l} A=a+b \\ B=a-b \end{array}\right\} \Rightarrow \quad sumando \quad a=\frac{A+B}{2} \quad y \ \text{ restando } \quad b=\frac{A-B}{2}$$

De donde: $$\boxed{\cos A-\cos B=-2\cdot sen\frac{A+B}{2}\cdot sen\frac{A-B}{2}}$$