TRIGONOMETRÍA

INTRODUCCIÓN

La **Trigonometría** de **trigono** (*triángulo)* y **metría** (*medida*) es la parte de las Matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo.

El origen de la Trigonometría está asociado históricamente a la Astronomía. Ya en la antigua Grecia, Pitágoras y sus seguidores observaban y hacían mediciones de los astros. Estos datos experimentales necesitaban una base matemática apropiada que permitiera predecir, con exactitud, ciertos fenómenos astronómicos, como el movimiento de los planetas, eclipses, etc. De esta forma surgió la Trigonometría. Posteriormente, en el siglo II después de Cristo, Tolomeo desarrolló gran parte de los teoremas y resultados que actualmente se conocen en esta área.

Hoy día es muy utilizada es muy utilizada en problemas de Topografía, así como en la construcción de carreteras, puentes, etc.

1. CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

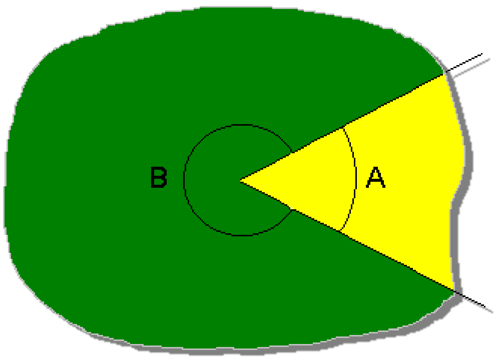
Según los lados:

- Equilátero: los tres lados iguales.
- Isósceles: dos lados iguales y el otro desigual.
- Escaleno: los tres lados desiguales.

Según los ángulos:

- Rectángulo: un ángulo recto.
- Oblicuángulo: ningún ángulo recto. Estos a su vez se clasifican en:
  - Acutángulos: los tres ángulos agudos.
  - Obtusángulos: un ángulo obtuso.

2. DEFINICIÓN DE ÁNGULO



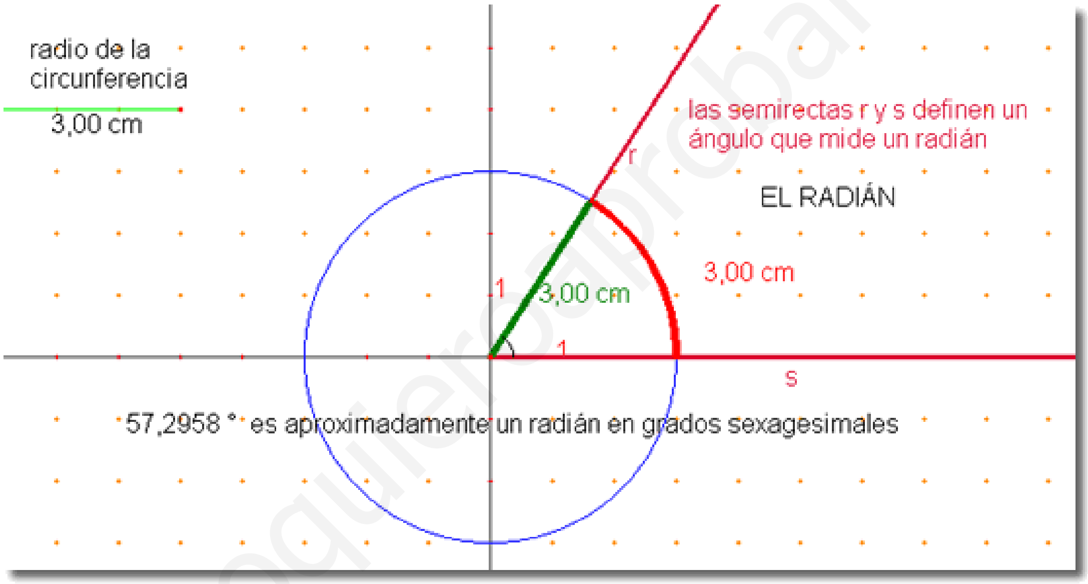
Un ángulo es la porción del plano comprendido entre dos semirrectas que tienen el mismo origen, que denominaremos O.
En la siguiente figura que dos semirrectas con un origen común determinan siempre dos porciones del plano y por tanto dos ángulos, A y B. Al ángulo A se le llama ángulo convexo, mientras que el ángulo B es cóncavo.

Formas de nombrar ángulos:

- Con letras griegas: α, β, ω.....
- Nombrando al vértice (con o sin gorrito): $\hat{A}$
- Nombrando "punto" + "vértice" + "punto": $O\hat{A}B$

3. MEDIDAS DE ÁNGULOS

- Sexagesimal: en este sistema el ángulo completo se divide en 360 partes iguales y a cada una de ellas se le denomina "grado sexagesimal". A su vez, cada grado se divide en 60 partes y a cada una se le denomina "minuto", se vuelve a dividir el minuto en 60 partes y a cada una se le denomina "segundo".
- Centesimal: en este sistema el ángulo completo se divide en 400 partes iguales y a cada una de ellas se le denomina "grado centesimal". A su vez, cada grado se divide en 100 partes y a cada una se le denomina "minuto", se vuelve a dividir el minuto en 100 partes y a cada una se le denomina "segundo".
- El Radián: consideramos una circunferencia con centro en el vértice del ángulo y el arco que interceptan los lados del ángulo. Si el arco mide lo mismo que el radio de la circunferencia, entonces decimos que el ángulo es de un radián. En general, los radios que mida el arco son los radianes que tiene el ángulo. Como la circunferencia mide 2π radios, un ángulo de 360º tiene 2π radianes.



$$2\pi \text{ radianes} = 360 \text{ grados}$$

Dividiendo la igualdad anterior entre 2π:

$$\frac{2\pi \text{ radianes}}{2\pi} = \frac{360 \text{ grados}}{2\pi}$$

$$1 \text{ radián} = \frac{360}{2\pi} \text{ grados}$$

$$\boxed{1 \text{ radián} = 57.29577951 \text{ grados}}$$

- **Para calcular el número de radianes que mide un ángulo:**

$$n^{o} \text{ de radianes} = \frac{\text{longitud del arco que abarca}}{\text{longitud del radio}}$$

Ejemplo:
¿Cuántos radianes equivale el ángulo completo?

$$n^{o}\ de\ radianes\ ángulo\ completo = \frac{longitud\ \ del\ arco}{longitud\ \ del\ radio} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\ rad$$

¿Cuántos radianes equivale el ángulo llano?

$$n^{o}\ de\ radianes\ ángulo\ llano = \frac{longitud\ \ del\ arco}{longitud\ \ del\ radio} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{2}\right)}{r} = \pi\ rad$$

- **Para pasar de grados sexagesimal a radianes, simplemente realizaremos:**

Ejemplo:

$$\begin{array}{ccc} Sexagesimal & \rightarrow & Radianes \\ 180^{\circ} & \rightarrow & \pi \\ 30^{\circ} & \rightarrow & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{30^{\circ}\cdot\pi}{180^{\circ}} = \frac{\pi}{6}\ rad$$

- **Para pasar de radianes a grados sexagesimal, simplemente realizaremos:**

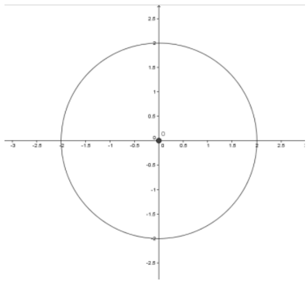
Ejemplo:

$$\begin{array}{ccc} Radianes & \rightarrow & Sexagesimal \\ \pi & \rightarrow & 180^{\circ} \\ \frac{\pi}{5} & \rightarrow & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\pi/5 \cdot 180^{\circ}}{\pi} = 36^{\circ}$$

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

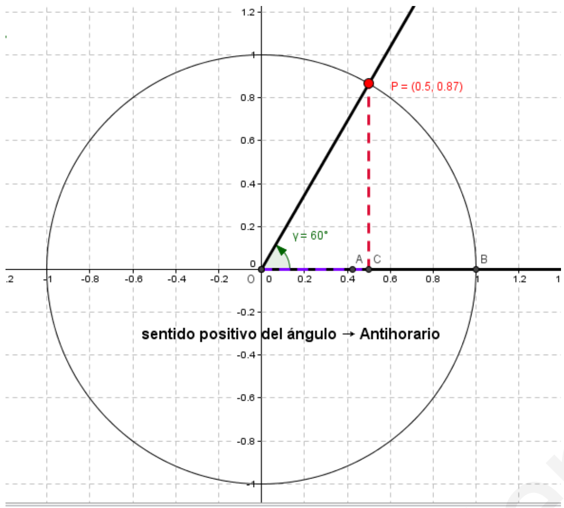
¡HAY QUE SABÉRSELO!

4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

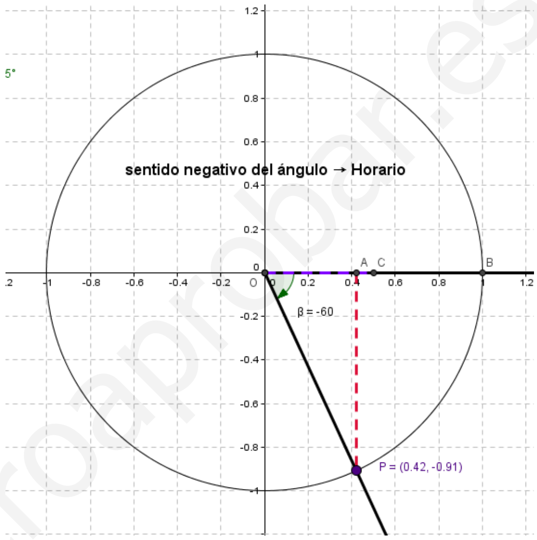


Un *"sistema de referencia angular* está formado por unos ejes coordenados y una circunferencia centrada en el origen de coordenadas y de radio "r".
En particular, cuando la circunferencia tenga de radio la unidad se denomina ***"sistema de referencia goniométrico"*.**

El lado inicial del ángulo, como siempre, lo haremos coincidir con el semieje positivo de abcisas, al ir variando el lado final, se irán obteniendo los distintos ángulos. Seguidamente, a cada ángulo le haremos corresponder el **punto P**, punto en donde el lado final del ángulo intercepta con la circunferencia.



Ángulo α con sentido positivo (Antihorario)



Ángulo β con sentido negativo (Horario)

Consideremos un sistema de referencia angular con radio de la circunferencia r, en función de las coordenadas (x, y) del punto P asociadas al ángulo definiremos los siguientes cocientes, denominados "**RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO α**

Razones Trigonométricas del ángulo α

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{ordenada}}{\text{radio}} = \frac{y}{r}$$

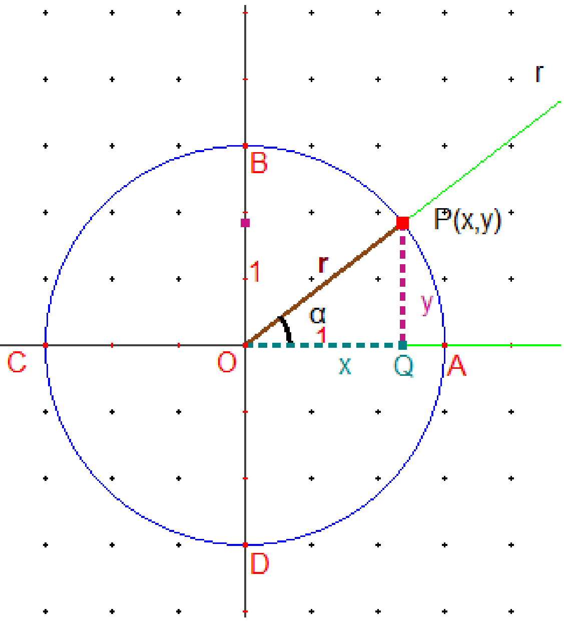
$$\cos\alpha = \frac{\text{abcisa}}{\text{radio}} = \frac{x}{r}$$

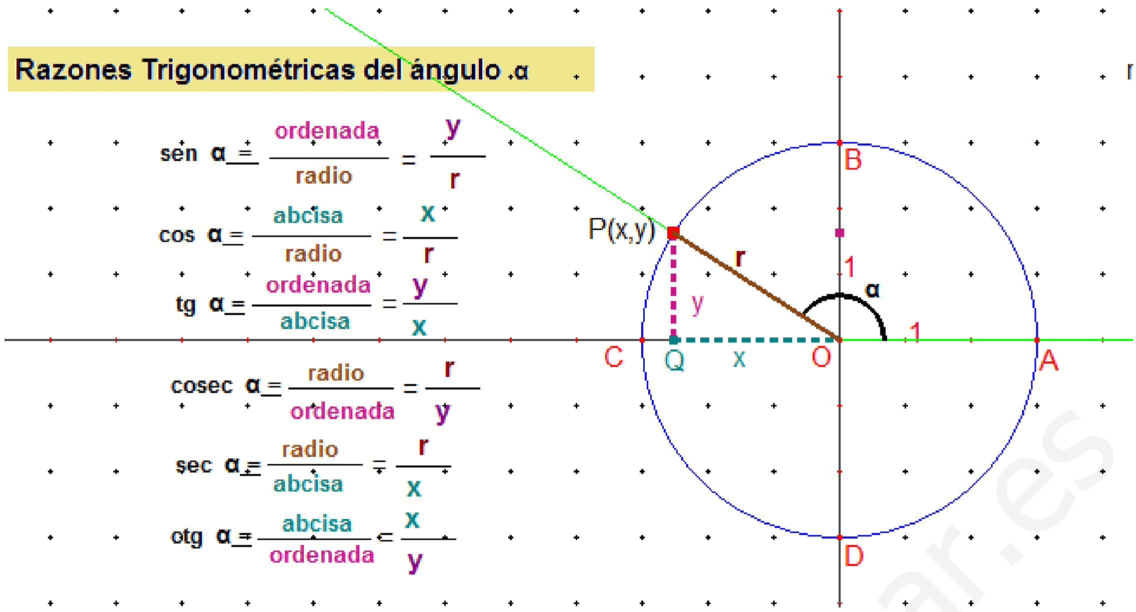
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{ordenada}}{\text{abcisa}} = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\text{radio}}{\text{ordenada}} = \frac{r}{y}$$

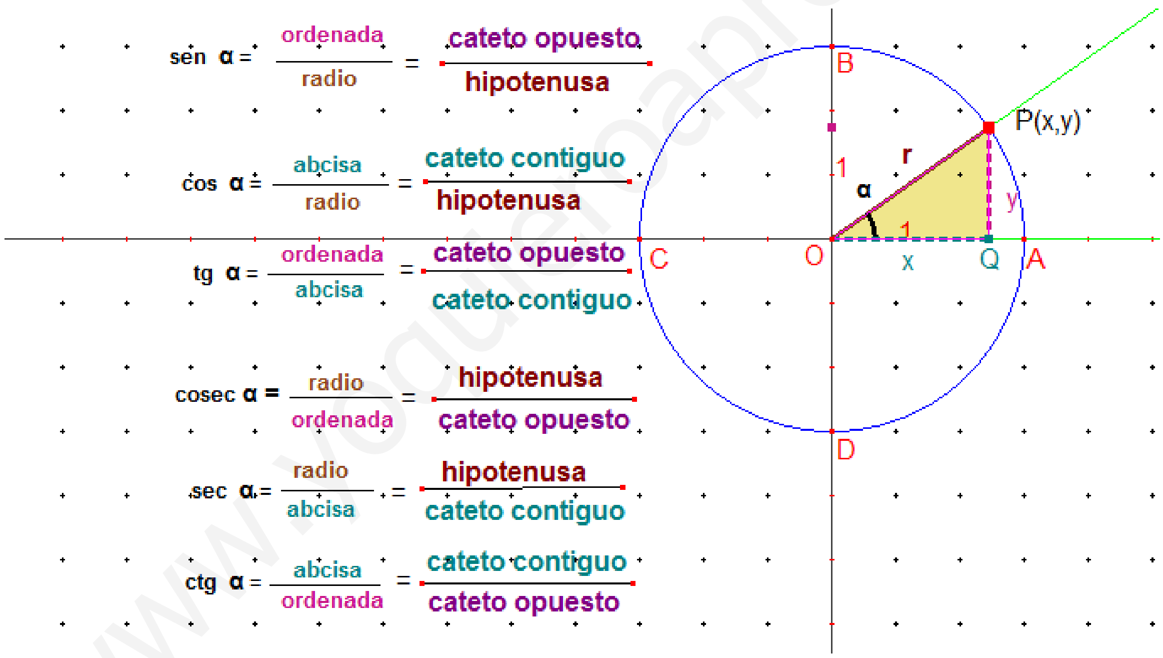
$$\sec\alpha = \frac{\text{radio}}{\text{abcisa}} = \frac{r}{x}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\text{abcisa}}{\text{ordenada}} = \frac{x}{y}$$





Cuando el ángulo α es agudo, observemos que tomando el triángulo AOP podemos expresar las razones trigonométricas del ángulo α así:



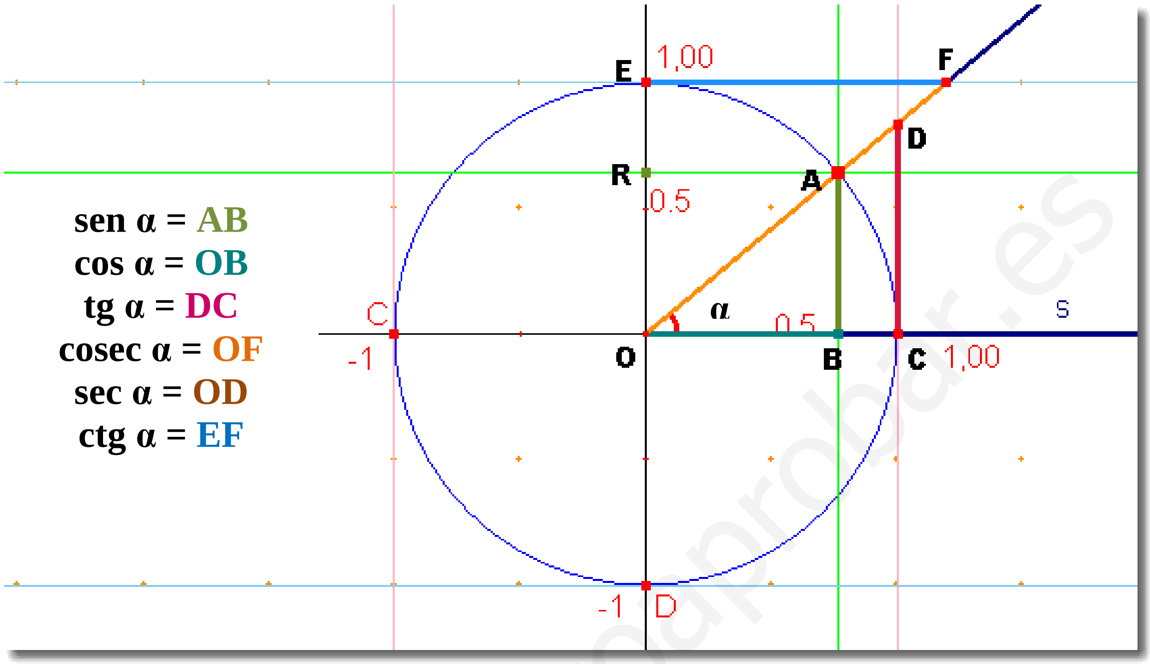
<u>**Ejercício:**</u> En una circunferencia de radio r = 5 obtener las razones trigonométricas de un ángulo α cuyo punto asociado P tiene de abcisa x = 4 y se encuentra situado en el primer cuadrante.

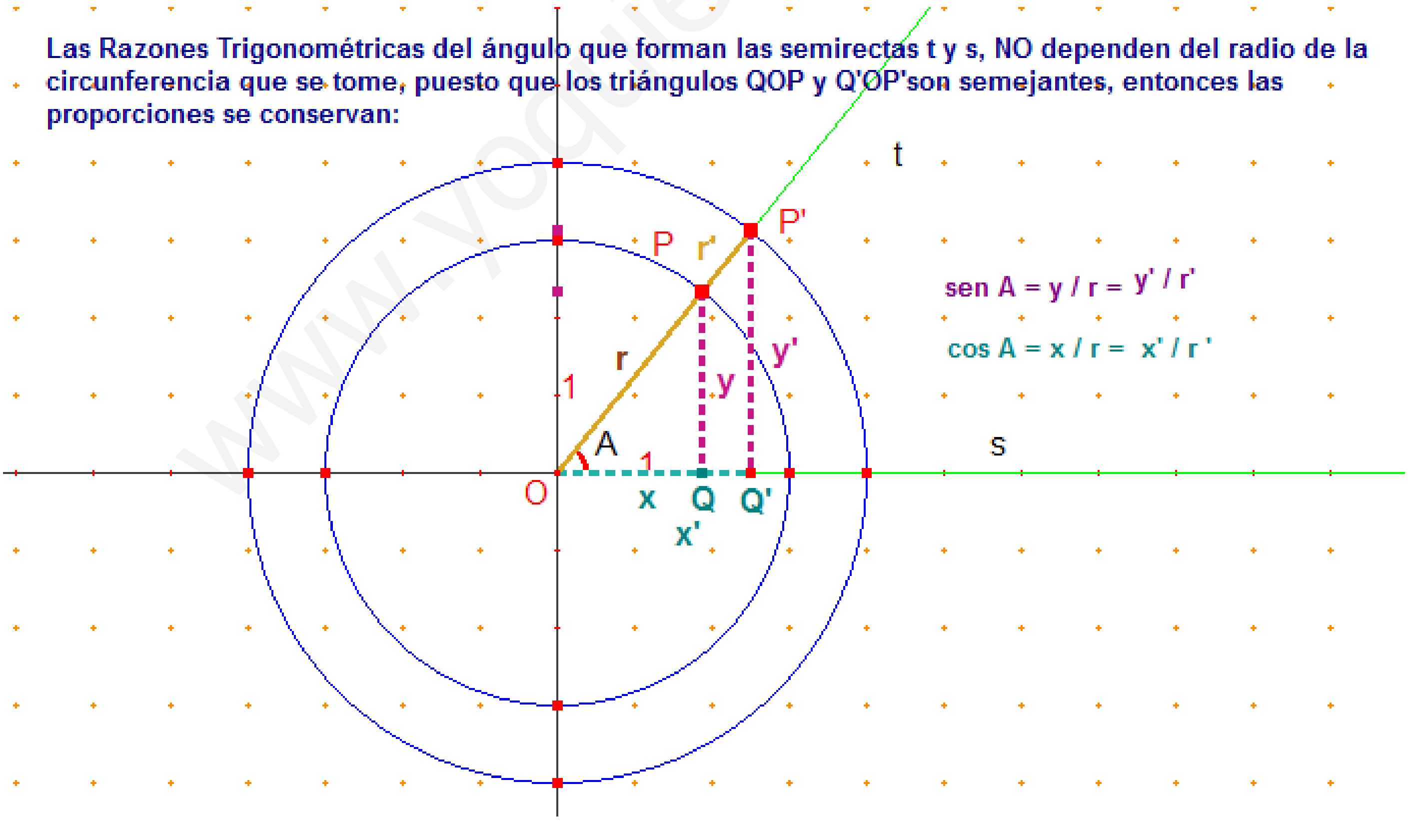
Idem pero ahora el punto P tiene de abcisa x = -3 y está situado en el II cuadrante.

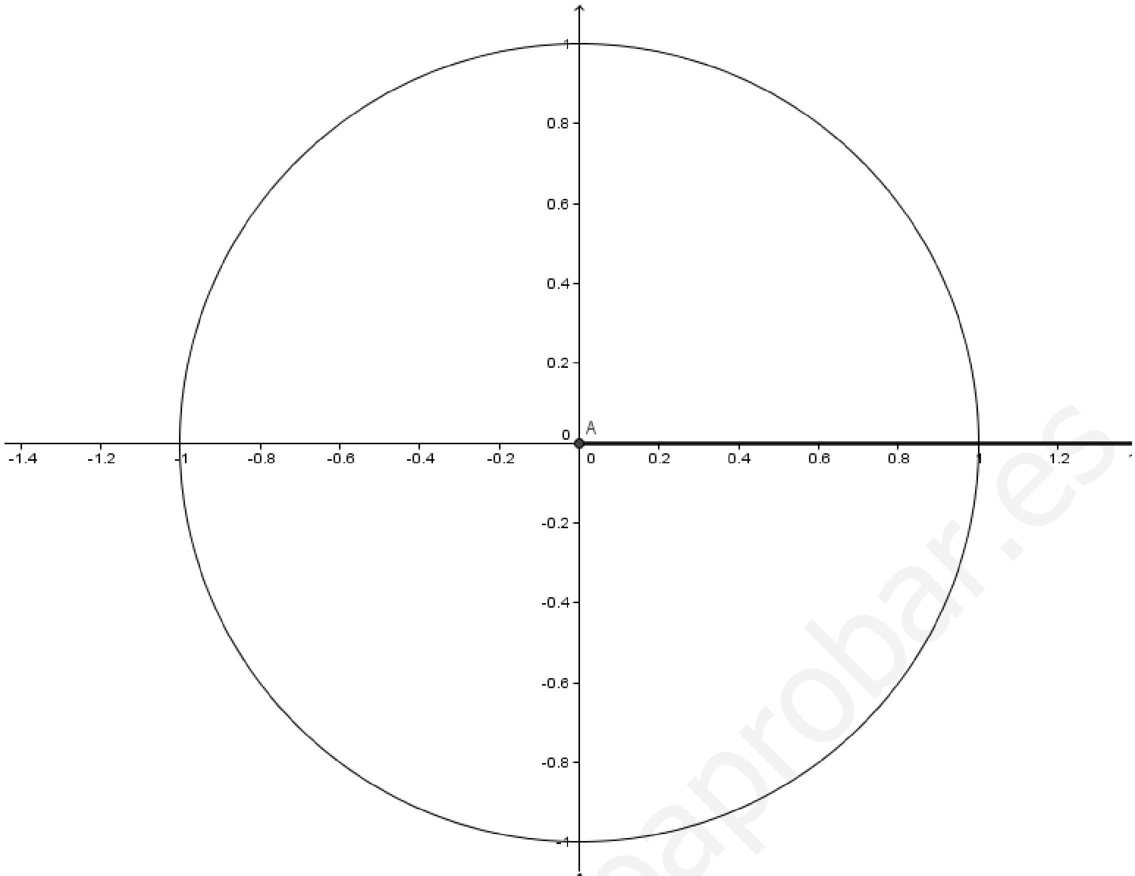
Idem siendo $= \sqrt{13}$ $y\ el\ punto\ P\ tiene\ de\ abcisa\ x = 2\ \ y\ situado\ en\ el\ IV\ cuadrante$

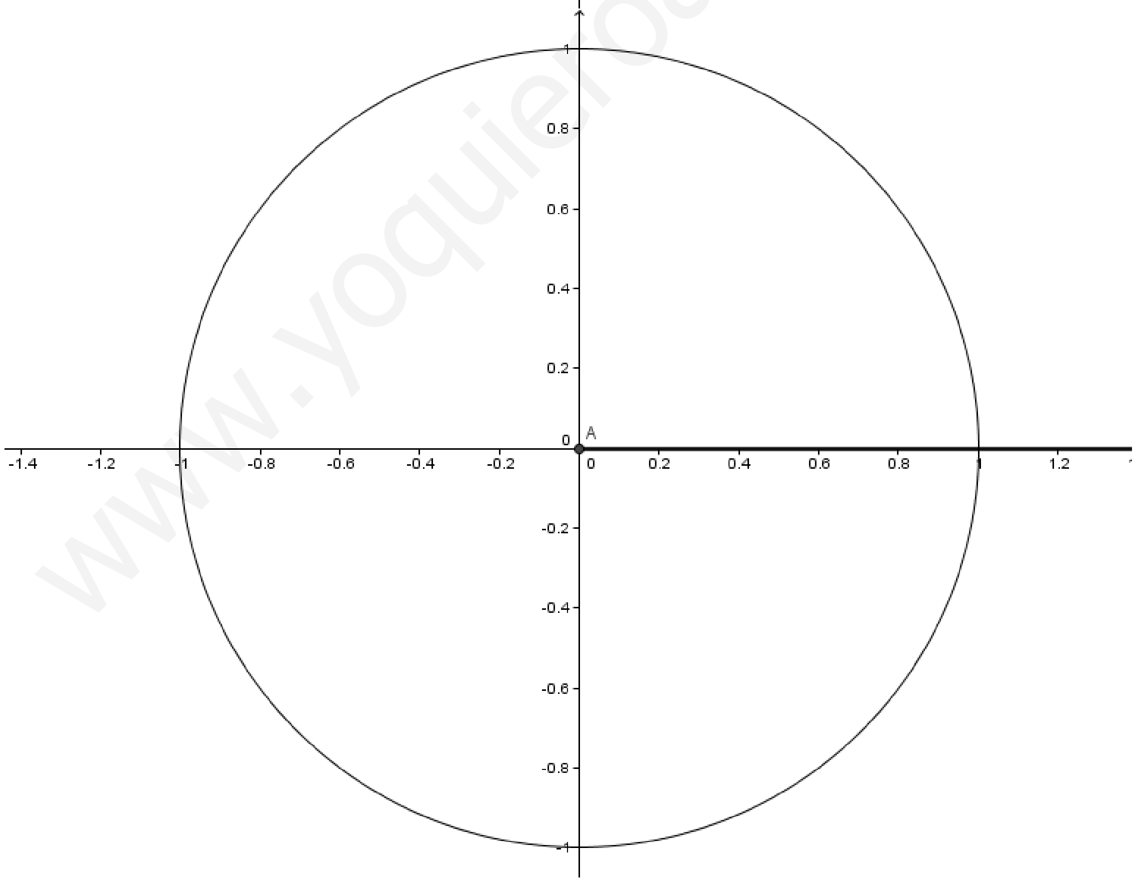
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO EN UN SISTEMA DE REFERENCIA GONIOMÉTRICO α

Consideremos un **sistema de referencia goniométrico**, esto es, **radio de la circunferencia la unidad**, entonces, gráficamente el valor (absoluto en su caso) de las razones trigonométricas coinciden con las longitudes de los segmentos que se indican:



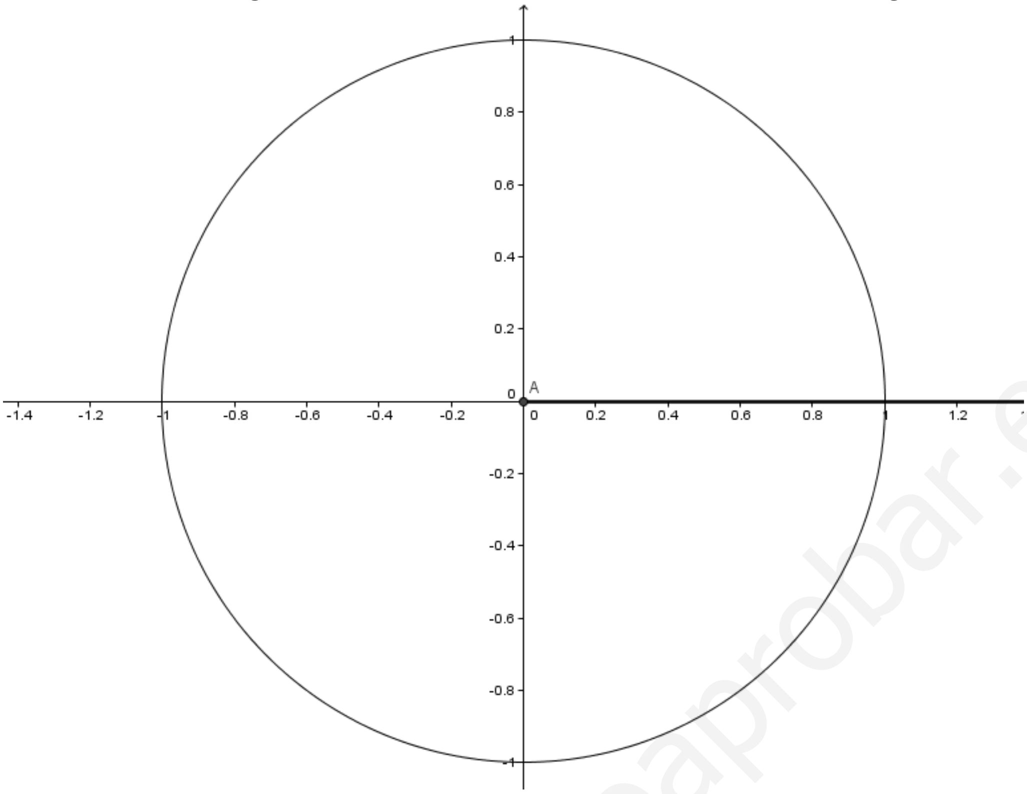


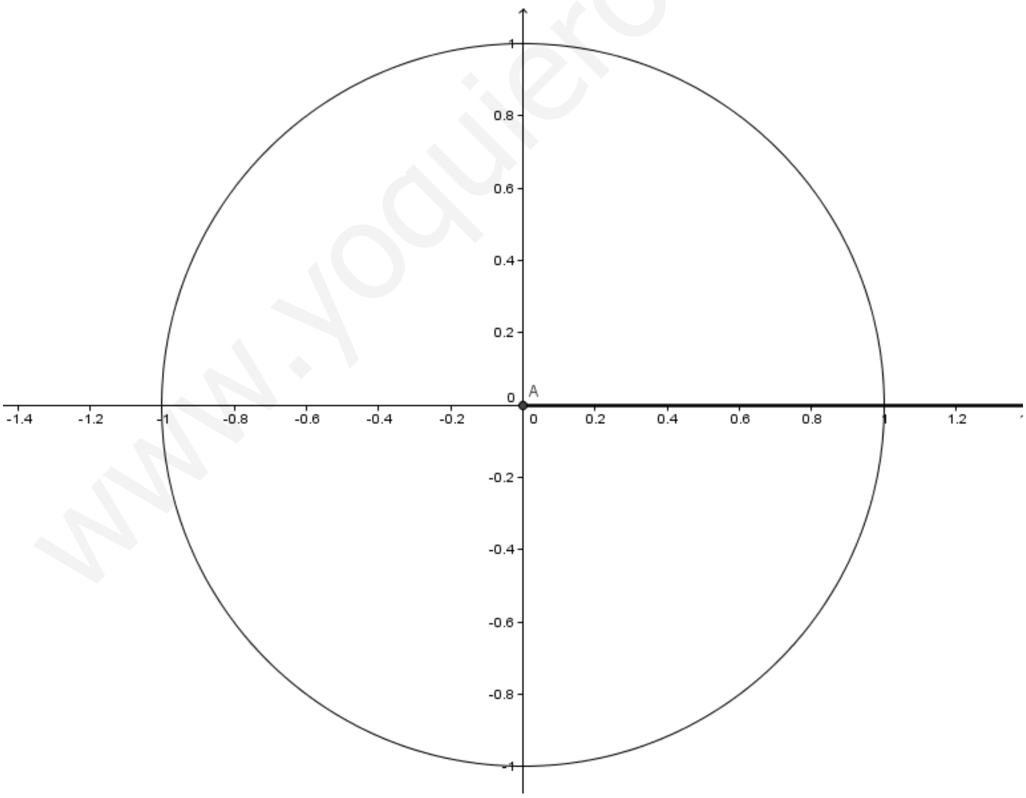




Ejercicio: El seno de un ángulo β vale 0,4. Representa gráficamente y calcula el valor de las restantes razones trigonométricas considerando un sistema de referencia goniométrico.

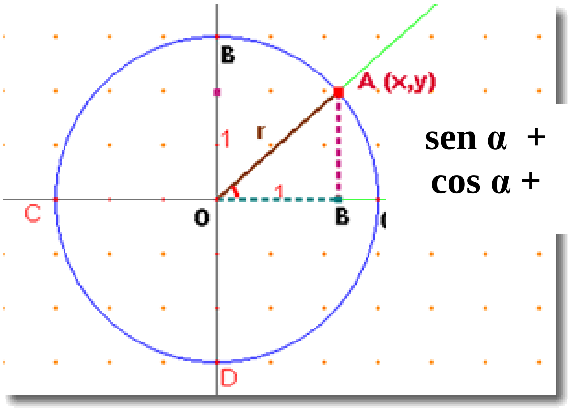
Ejercicio: El coseno de un ángulo β vale 0,8. Representa gráficamente y calcula el valor de las restantes razones trigonométricas considerando un sistema de referencia goniométrico.

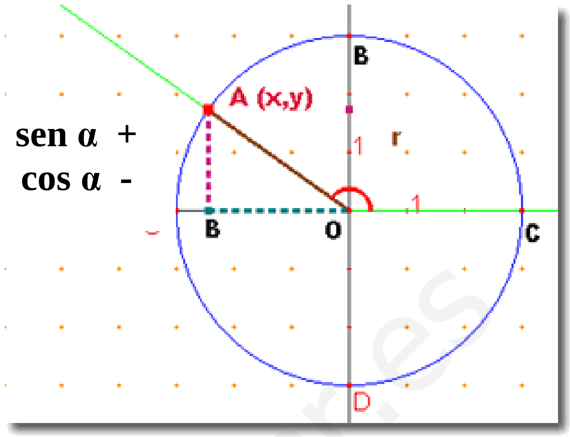


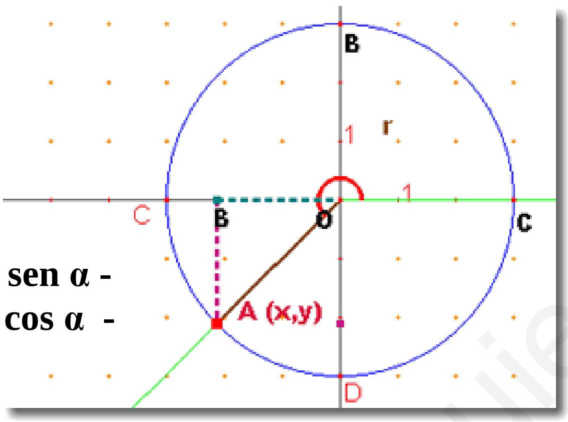


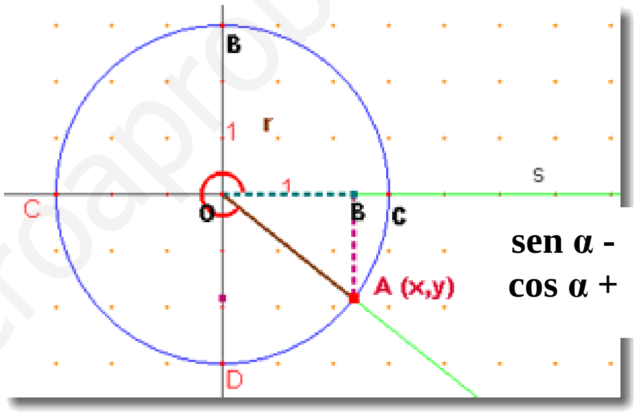
OBSERVACIONES:

1.- El **signo de las razones trigonométricas** viene determinado por el **signo de la abcisa y ordenada del punto A=(x, y) asociado** al ángulo **α**.









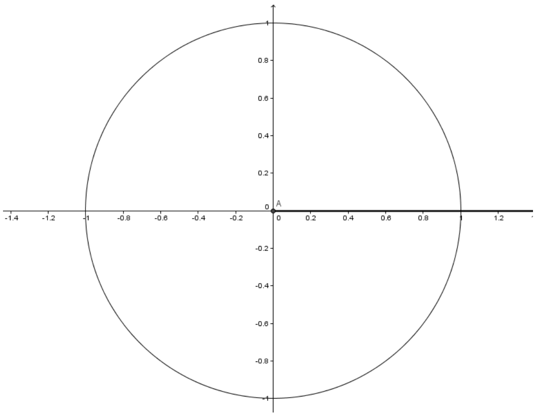
Campo de variabilidad de cada una de las razones trigonométricas:

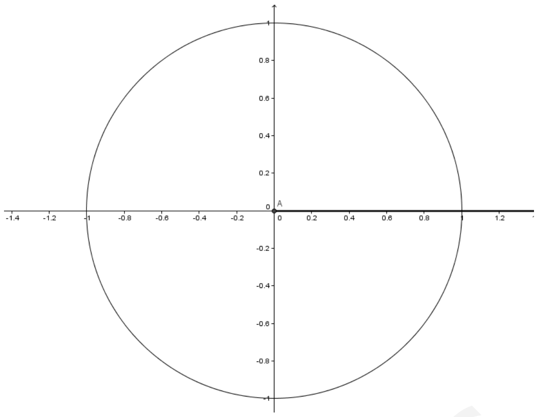
1. del seno : $-1 \le$ **sen α** ≤ 1
2. del coseno: $-1 \le$ **cos α** ≤ 1
3. de la tangente: $-\infty <$ **tg α** $< +\infty$
4. de la cotangente: $-\infty <$ **ctg α** $< +\infty$
5. de la secante: **sec α** toma valores en: $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
6. de la cosecante: **cosec α** toma valores en: $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

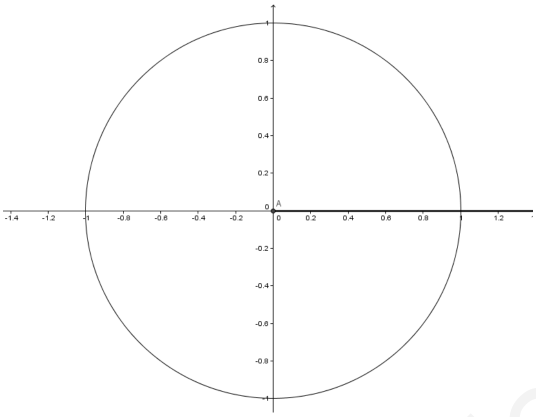
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

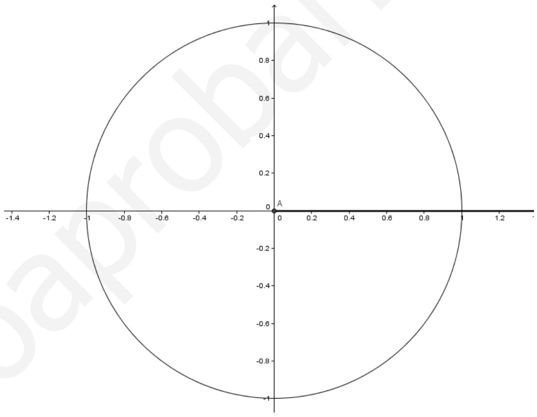
Grados	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

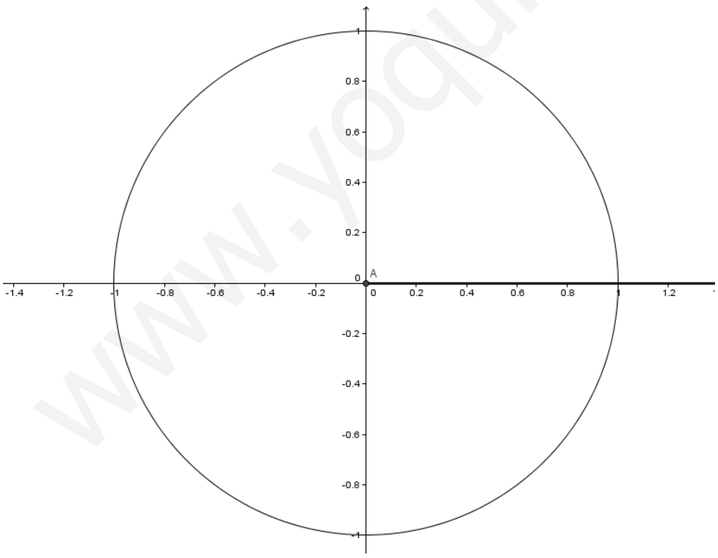
¡HAY QUE SABÉRSELO!

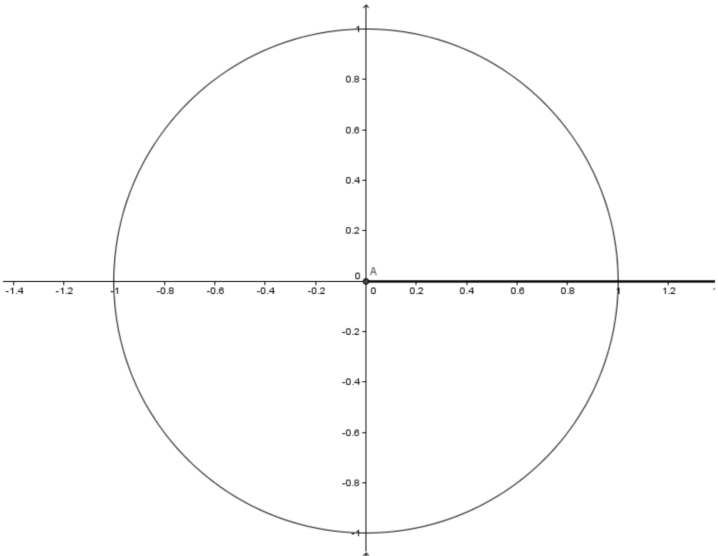


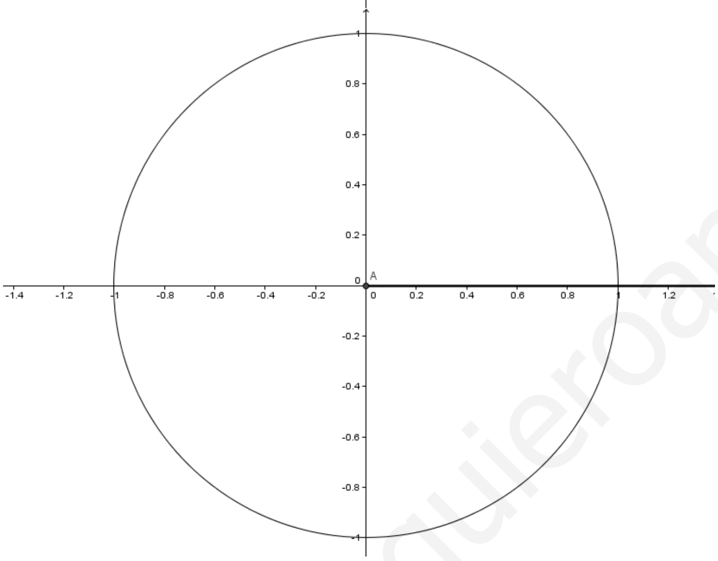







A
-1.4 -1.2 -1 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2
1 0.8 0.6 0.4 0.2 0 -0.2 -0.4 -0.6 -0.8 -1





5. RELACIÓN ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Se tienen las siguientes relaciones entre las razones trigonométricas:

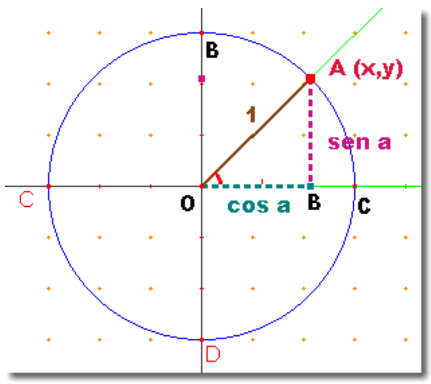
$$tg\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \cos ec\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

RELACIÓN FUNDAMENTAL

Consideremos un sistema de referencia **GONIOMÉTRICO** (radio la unidad)

Aplicando el Teorema de Pitágoras al **triángulo rectángulo AOB** se tiene:

$$\boxed{sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \qquad (1)$$



Si en la relación anterior dividimos los dos miembros por $\cos^2\alpha$

$$\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\boxed{1+tg^2\alpha=\sec^2\alpha}$$

Si en la relación (1) dividimos los dos miembros por $sen^2\alpha$

$$\frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha}=\frac{1}{sen^2\alpha}$$

$$\boxed{1+ctg^2\alpha=\cos ec^2\alpha}$$

Ejemplo:

Dada la $tg\alpha=2 \quad \alpha\in I$, calcular las restantes razones trigonométricas.

De la relación $1+tg^2\alpha=\sec^2\alpha$ se deduce:

$$1+2^2=\sec^2\alpha\rightarrow\sec^2\alpha=5\rightarrow\sec\alpha=\sqrt{5}$$

Como $ctg\alpha=\dfrac{1}{tg\alpha} \qquad ctg\alpha=\dfrac{1}{2}$

De la relación $1+\cot an^2\alpha=\cos ec^2\alpha \qquad \cos ec^2\alpha=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4} \qquad \cos ec\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Y por último $sen\alpha=\dfrac{1}{\cos ec\alpha} \qquad sen\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

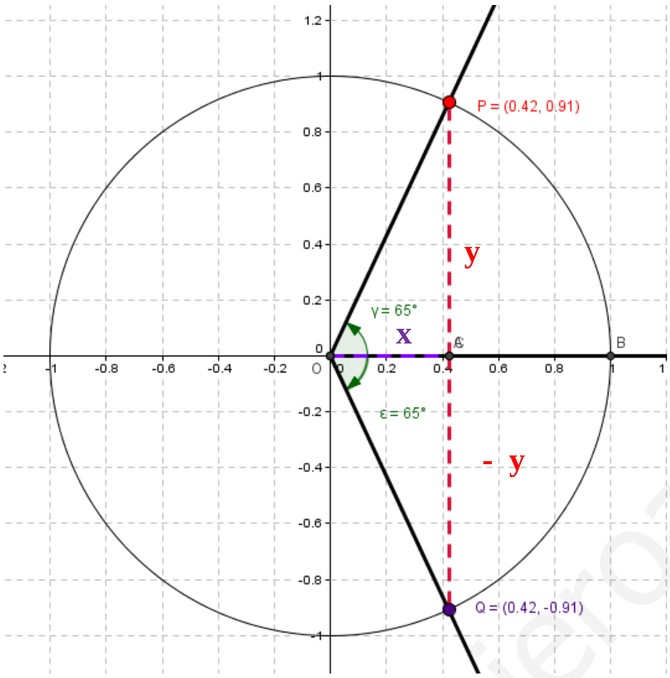
$tg\alpha=\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cos\alpha=\dfrac{sen\alpha}{tg\alpha} \qquad \cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}:2=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

6. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO ASOCIADO A UNO DEL PRIMER CUADRANTE

En lo que sigue, por comodidad, consideremos un sistema de referencia GONIOMÉTRICO

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO OPUESTO

Los puntos P y Q asociados a un ángulo “α” y su opuesto “-α”, tienen las abcisas iguales y las ordenadas opuestas. $P=(x,y)$ $\quad Q=(x,-y)$

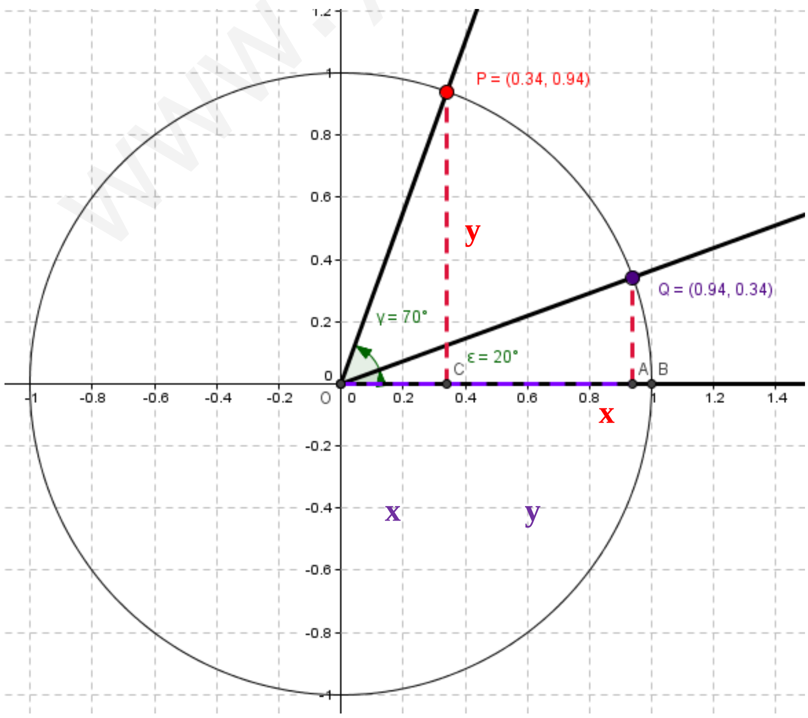


$$sen(-\alpha) = -sen\ \alpha$$
$$cos(-\alpha) = cos\ \alpha$$
$$tg(-\alpha) = -tg\ \alpha$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO COMPLEMENTARIO

Dos ángulos α y β se dicen complementarios si suman $\frac{\pi}{2}$ $rad\ \ \alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \rightarrow \beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$

Los puntos P y Q asociados a un ángulo α y a su complementario β, son simétricos respecto de la bisectriz del primer cuadrante, por eso sus coordenadas serán: $P=(x,y)$ $\quad Q=(y,x)$



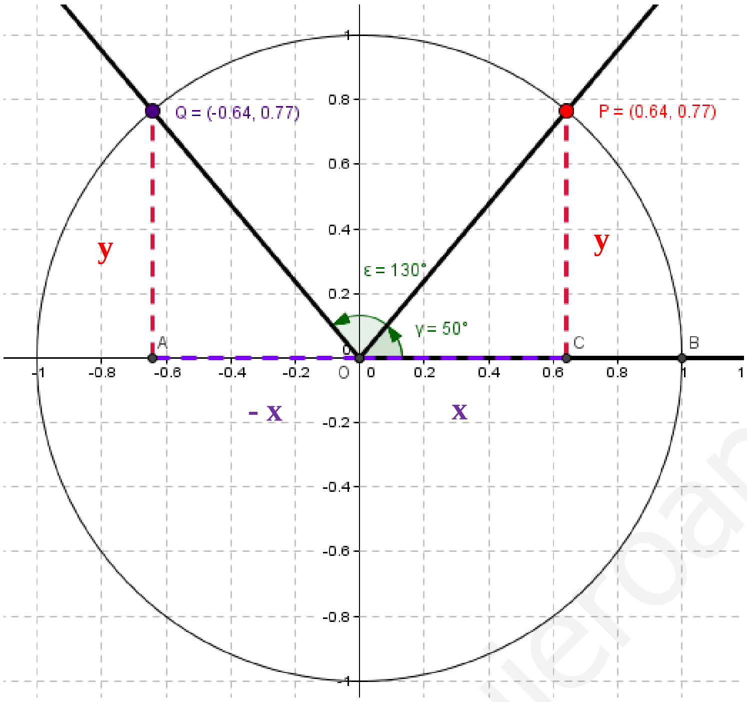
$$cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = sen\ \alpha$$
$$sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$$
$$ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = tg\ \alpha$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO SUPLEMENTARIO

Dos ángulos α y β se dicen suplementarios cuando suman $\pi \quad o \quad 180^\circ$

$$\alpha+\beta=\pi \quad o \quad 180^\circ \rightarrow \beta=\pi-\alpha$$

Los puntos P y Q asociados a un ángulo y a su suplementario tienen las abcisas opuestas y las ordenadas iguales: $P=(x,y) \qquad Q=(-x,y)$



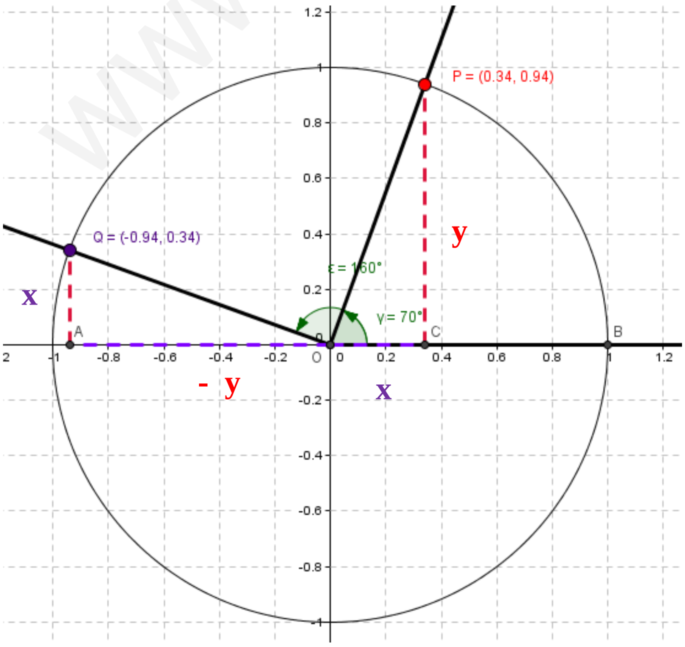
$$sen(\pi-\alpha)=sen\ \alpha$$
$$cos(\pi-\alpha)=-cos\ \alpha$$
$$tg(\pi-\alpha)=-tg\ \alpha$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO QUE DIFIERE EN $\frac{\pi}{2} \quad rad$

Dos ángulos α y β se dicen que difieren en $\frac{\pi}{2} \quad rad$ cuando $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \beta=\frac{\pi}{2}+\alpha$

Los puntos P y Q asociados a un ángulo α y a β tienen sus coordenadas relacionadas así:

$$P=(x,y) \qquad Q=(-y,x)$$



$$sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=cos\ \alpha$$
$$cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-sen\ \alpha$$
$$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\ \alpha$$

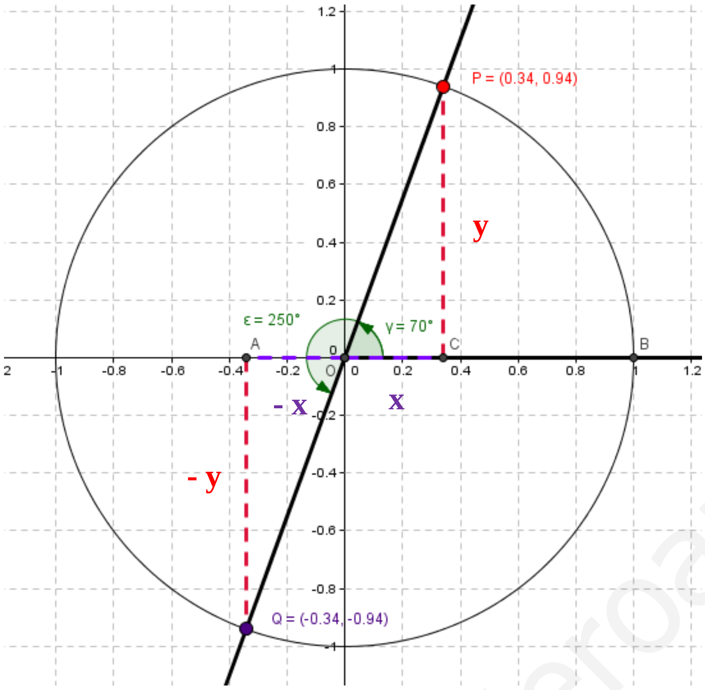
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO QUE DIFIERE EN π rad

Dos ángulos α y β se dicen que difieren en π rad cuando $\beta - \alpha = \pi$

$$\beta - \alpha = \pi \quad \rightarrow \beta = \pi + \alpha$$

Los puntos P y Q asociados a un ángulo α y a β tienen sus coordenadas relacionadas así:

$$P = (x, y) \qquad Q = (-x, -y)$$

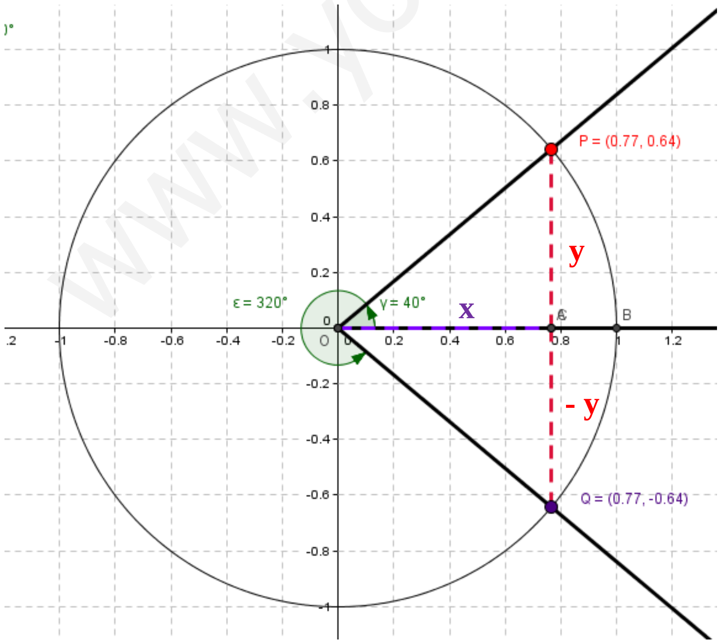


$$sen(\pi + \alpha) = -sen\ \alpha$$
$$cos(\pi + \alpha) = -cos\ \alpha$$
$$tg(\pi + \alpha) = tg\ \alpha$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO CON EL QUE SUMA 2π

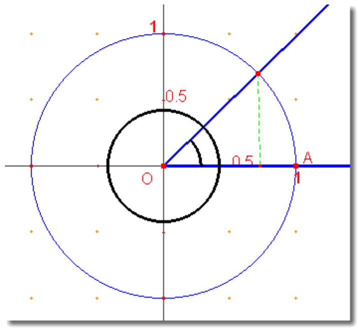
Dos ángulos α y β se dicen que suman cuando $\beta + \alpha = 2\pi \quad \rightarrow \beta = 2\pi - \alpha$.

Los puntos P y Q asociados tienen las abcisas iguales y las ordenadas opuestas.



$$sen(2\pi - \alpha) = -sen\ \alpha$$
$$cos(2\pi - \alpha) = cos\ \alpha$$
$$tg(2\pi - \alpha) = -tg\ \alpha$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO QUE DIFIERE EN UN NÚMERO DE VUELTAS



Dos ángulos α y β se dicen que difieren en un número de vueltas cuando

$$\beta - \alpha = 2k\pi \quad \rightarrow \beta = 2k\pi + \alpha \,.$$

Todas las razones trigonométricas son iguales.

$$sen(2k\pi + \alpha) = sen\ \alpha$$
$$cos(2k\pi + \alpha) = cos\ \alpha$$
$$tg(2k\pi + \alpha) = tg\ \alpha$$