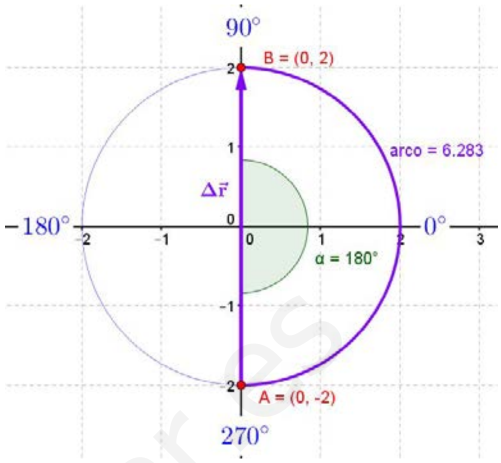
C1.- (4$_{ptos}$) Un móvil describe una trayectoria circular de radio 2 m, en sentido contrario a las agujas del reloj. Respecto al Sistema de referencia centrado en la circunferencia, sus posiciones respecto al tiempo son las que se indican en la tabla. Calcular el vector desplazamiento (en polares y en cartesianas) y la distancia recorrida entre tiempo 0 y tiempo 4.

t(s)	0	4
r	2m ; 270º	2m ; 90º



El vector $\Delta\vec{r}$ es el vector que va del punto A al punto B de la gráfica.

Las coordenadas cartesianas del vector son: $\Delta\vec{r} = 4\,\vec{j}$ *metros*

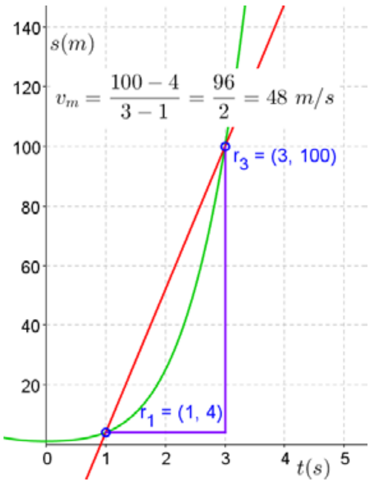
Las coordenadas polares: $\Delta\vec{r} = (4; 90°)$ *metros*

(Vector que mide 4 unidades dirigido en la dirección positiva del eje Y)

La distancia recorrida es la mitad de la circunferencia:

$$d = \frac{1}{2}\cdot 2\pi R = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 2 = 6{,}283; \qquad d_{recorrida} = 6{,}283\ m$$

C2.- (4$_{ptos}$) La posición de un móvil que se mueve con un movimiento rectilíneo hacia la derecha viene dada por la expresión: $r = t^4 + 2t^2 + 1$. Calcular su velocidad media entre 1 y 3 segundos.



Calculamos la posición en los tiempos indicados

$$r_{(1\,s)} = 1^4 + 2\cdot 1^2 + 1 = 4\ m$$
$$r_{(3\,s)} = 3^4 + 2\cdot 3^2 + 1 = 100\ m$$

y aplicamos la fórmula de la velocidad media:

$$v_m = \frac{r_{final} - r_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}} = \frac{100-4}{3-1} = \frac{96}{2} = 48\ m/s$$

La velocidad media es $v_m = 48\ m/s$

PARA SABER MÁS: En la gráfica posición-tiempo de la izquierda podemos ver que la velocidad media es la pendiente de la recta señalada en color rojo.

C3.- (4$_{ptos}$) Un móvil (1) pasa por un punto A en dirección a otro B distante 600 m. con una velocidad constante de 126 Km/h. Al mismo tiempo pasa por B, un segundo móvil (2), que se aleja de A, con una velocidad constante de 108,0 Km/h. Calcula cuándo y dónde se cruzan los dos móviles.

Pasamos las velocidades a m/s y hacemos un esquema del problema:

$$126\,\frac{km}{h}\cdot\frac{1000\,m}{1\,km}\cdot\frac{1\,h}{3600\,s} = 35\,\frac{m}{s}; \quad 108\,\frac{km}{h}\cdot\frac{1000\,m}{1\,km}\cdot\frac{1\,h}{3600\,s} = 30\,\frac{m}{s}$$

Escribimos las ecuaciones que nos dan la posición de ambos móviles: $\begin{cases} s_1 = 35\cdot t \\ s_2 = 600 + 30\cdot t \end{cases}$

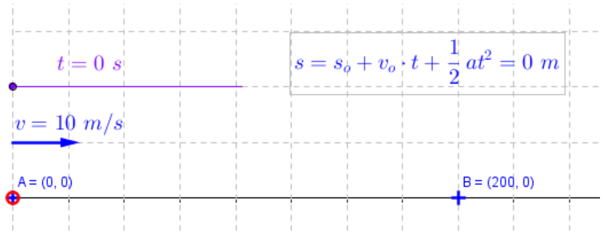
Cuando se crucen estarán en la misma posición $s_1 = s_2$*; igualando:* $35\cdot t = 600 + 30\cdot t$

$$35\cdot t - 30\cdot t = 600 \quad ; \quad 5\cdot t = 600 \quad ; \quad t = 600/5 = 120\ s\ (2\ minutos)$$

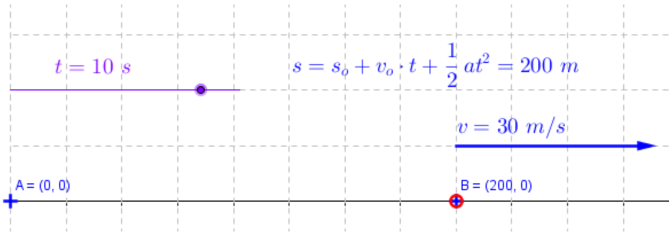
Sustituyendo el tiempo recién calculado en las ecuaciones de la posición: $\begin{cases} s_1 = 35\cdot 120 = 4200\ m \\ s_2 = 600 + 30\cdot 120 = 4200\ m \end{cases}$

Los dos móviles se cruzan en 120 segundos, a 4200 m de A (a 3600 m de B)

C4.- (4$_{ptos}$) Un móvil que lleva una velocidad de 10 m/s acelera con una aceleración constante al pasar por un punto P y cuando está a 200 m su velocidad es de 30 m/s. Calcula el valor de la aceleración.



Posición inicial



Posición final

Haciendo Ctrl+clic (clic en según qué casos) en los gráficos accedéis a una presentación de GeoGebra.

Es un M.R.U.A., luego la ecuación de la posición y la velocidad vendrán dadas por:

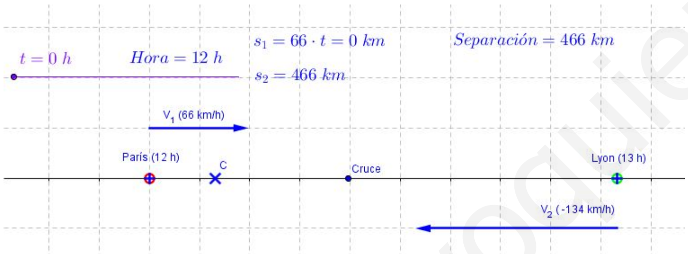
$$\begin{cases} s = s_o + v \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \\ v = v_o + a \cdot t \end{cases} \begin{cases} s = s_o + v \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t \cdot t \\ a \cdot t = v - v_o \end{cases}$$

Con los datos iniciales de velocidad y posición al detenerse obtengo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 200 = 10 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \\ 30 = 10 + a \cdot t \end{cases} \begin{cases} 200 = 10 \cdot t + \frac{1}{2} 20 \cdot t = (10 + 10) \cdot t = 20 \cdot t \\ a \cdot t = 30 - 10 = 20 \end{cases} \begin{cases} t = \dfrac{200}{20} = 10\ s \\ a = \dfrac{20}{10} = 2\ m/s^2 \end{cases}$$

El valor de la aceleración es $a = 2\ m/s^2$

P1.- (8$_{ptos}$) Dos coches parten de París y Lyon va. El que parte de París hacia Lyon lo hace a las 12.00 con velocidad de 66 Km/h; el que va de Lyon a París lo hace a las 13.00 con velocidad de 134 Km/h. Cuando ambos se cruzan, el que partió de París lleva recorridos 198 Km. ¿A qué hora se cruzaron? ¿Qué distancia separa ambas ciudades?



Haciendo Ctrl+clic (clic en según qué casos) en los gráficos accedéis a una presentación de GeoGebra.

Moviendo el punto violeta podéis ver la evolución de la posición de ambos vehículos con el tiempo.

El problema se puede resolver de varias maneras:

Forma 1

A las 13 h el coche que sale de París lleva andando 1 h y ha recorrido 66 km. Llegará al punto de cruce ($s = 188\ km$) *a las 15 h (tres de la tarde)*

$$198 = 66 + 66 \cdot t; \quad t = \frac{198 - 66}{66} = 2\ h; \quad hora\ cruce = 13\ h + 2\ h = 15\ h$$

El coche que sale de Lyon también llegará a la posición de cruce las 15 h, luego se habrá movido durante dos horas. Como se mueve hacia la izquierda su velocidad será negativa.

$$198\ km = d_{París-Lyon} - 134 \frac{km}{h} \cdot 2h; \quad d_{París-Lyon} = 198 + 134 \cdot 2 = 466\ km$$

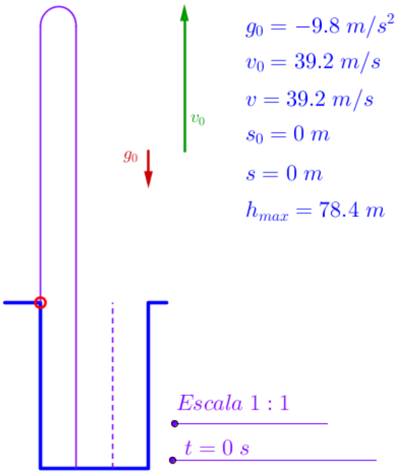
Forma 2

Cuento el tiempo desde las 12 h, llamo t al tiempo que se está moviendo el que sale de París, el de Lyon se está moviendo una hora menos ($t - 1$)*. Planteo el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} 198 = 66 \cdot t \\ 198 = d_{París-Lyon} - 134 \cdot (t - 1) \end{cases} \begin{cases} t = \dfrac{198}{66} = 3\ horas \\ d_{París-Lyon} = 198 + 134 \cdot (3 - 1) \end{cases} \begin{cases} t = 3\ h \\ d_{París-Lyon} = 466\ km \end{cases}$$

Se cruzaron a las 15 h (tres de la tarde) y la distancia París-Lyon es $466\ km$

P2.- (8$_{ptos}$) Se lanza, desde el suelo, verticalmente hacia arriba un objeto con una velocidad inicial de 39,2 m/s. Calcular: a) La altura máxima que alcanza el objeto. b) La velocidad cuando vuelve al suelo. c) Su velocidad cuando se encuentra a 73,5 m. de altura. d) Si al bajar se introduce en un pozo, calcular la profundidad del mismo si se oye el impacto en el fondo a los 9,13 s de lanzar el objeto hacia arriba.



Haciendo Ctrl+clic (clic en según qué casos) en los gráficos accedéis a una presentación de GeoGebra.

a) La condición para altura máxima es $v = 0\ ^m/_s$. Hemos de calcular el tiempo en el que se alcanza esa velocidad, y con ese tiempo calcular la posición.

$$0 = 39{,}2 - 9{,}8 \cdot t$$
$$t = 39{,}2/9{,}8 = 4\ s$$

$$h_{máx} = 39{,}2 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 = 39{,}2 \cdot 4 - 4{,}9 \cdot 4^2$$
$$h_{máx} = 78{,}4\ m$$

b) La condición cuando vuelve al suelo es $s = 0\ m$. Hemos de calcular el tiempo en el que se alcanza esa posición, y con ese tiempo calcular la velocidad. Recordad que la velocidad con la que volvía al punto de partida era la velocidad inicial cambiada de signo.

$$0 = 0 + 39{,}2 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$
$$t(39{,}2 - 4{,}9 \cdot t) = 0$$
$$t = 0\ s \text{ (solución trivial)}$$
$$t = \frac{39{,}2}{4{,}9} = 8\ s \text{ (la buena)}$$

$$v = 39{,}2 - 9{,}8 \cdot t$$
$$v = 39{,}2 - 9{,}8 \cdot 8$$
$$v = -39{,}2\ m/s$$

c) La condición es $s = 73{,}5\ m$ de altura.

$$73{,}5 = 0 + 39{,}2 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$
$$4{,}9 \cdot t^2 - 39{,}2 \cdot t + 73{,}5 = 0$$
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$t = \frac{39{,}2 \pm \sqrt{39{,}2^2 - 4 \cdot 4{,}9 \cdot 73{,}5}}{2 \cdot 4{,}9}$$

$$t = \frac{39{,}2 \pm \sqrt{1536{,}64 - 1440{,}6}}{9{,}8}$$
$$t = \frac{39{,}2 \pm \sqrt{96{,}04}}{9{,}8} = \frac{39{,}2 \pm 9{,}8}{9{,}8}$$

Valen las dos soluciones que se obtienen:

$$t_{sube} = 3\ s$$
$$t_{baja} = 5\ s$$

Cuando sube su velocidad es:

$$v = 39{,}2 - 9{,}8 \cdot 3 = 9{,}8\ m/s$$
$$v_{sube} = 9{,}8\ m/s$$

Cuando baja su velocidad es:

$$v = 39{,}2 - 9{,}8 \cdot 5 = -9{,}8\ m/s$$
$$v_{baja} = -9{,}8\ m/s$$

d) Llamo t_1 al tiempo que tarda el objeto en llegar al fondo del pozo, y t_2 al que tarda el sonido en subir. La suma de ambos tiempos es 9,13 s ($t_1 + t_2 = 9{,}13$ de donde $t_2 = 9{,}13 - t_1$). El nivel del suelo es 0 m y el fondo del pozo está en la posición h. Sabemos que la velocidad del sonido es $v_{sonido} = 340\ m/s$. Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \text{Objeto:} \quad h = 39{,}2 \cdot t_1 - 4{,}9 \cdot {t_1}^2 \\ \text{Sonido:}\ 0 = h + 340 \cdot t_2 \end{cases} \quad \begin{cases} h = 39{,}2 \cdot t_1 - 4{,}9 \cdot {t_1}^2 \\ h = -340 \cdot (9{,}13 - t_1) \end{cases} \quad \begin{cases} -3104{,}2 + 340 \cdot t_1 = 39{,}2 \cdot t_1 - 4{,}9 \cdot {t_1}^2 \\ h = -3104{,}2 + 340 \cdot t_1 \end{cases}$$

$$4{,}9 \cdot {t_1}^2 + 300{,}8 \cdot t_1 - 3104{,}2 = 0$$
$$t_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$t = \frac{-300{,}8 \pm \sqrt{300{,}8^2 + 4 \cdot 4{,}9 \cdot 3104{,}2}}{2 \cdot 4{,}9}$$
$$t = \frac{-300{,}8 \pm \sqrt{90480{,}64 + 60842{,}32}}{9{,}8}$$

$$t = \frac{-300{,}8 \pm \sqrt{151322{,}96}}{9{,}8} = \frac{-300{,}8 \pm 389{,}0}{9{,}8} = \begin{cases} -70{,}4\ s \\ 9{,}0\ s \end{cases}$$

Sólo vale la solución positiva $t = 9{,}0$ s. Sustituyendo en h:

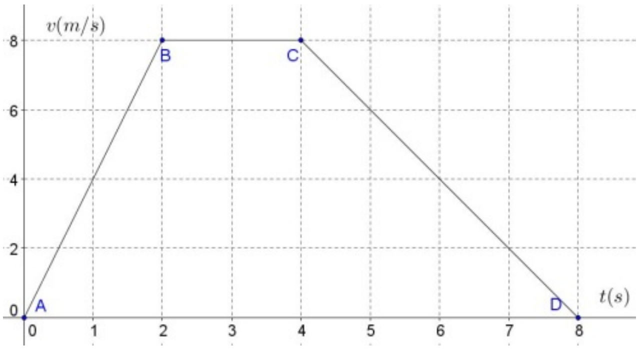
$$h = 39{,}2 \cdot t_1 - 4{,}9 \cdot {t_1}^2 = 39{,}2 \cdot 9{,}0 - 4{,}9 \cdot 9{,}0^2 = -44{,}1\ m$$
$$\text{o bien:} \quad h = -340 \cdot (9{,}13 - t_1) = -340 \cdot (9{,}13 - 9{,}0) = -44{,}2\ m$$

La diferencia se debe a errores de redondeo, podemos decir que:

el pozo tiene una profundidad de 44,1 m

P3.- (8_{ptos}) Basándote en el gráfico de la derecha indica para cada tramo (AB, BC y CD) el tipo de movimiento, la aceleración, la posición y la velocidad al principio y al final del tramo, la distancia recorrida en el tramo. Calcula también la distancia total recorrida y la velocidad media.

(Si te sobra tiempo haz las representaciones gráficas s/t y a/t)



Tramo AB

Es un MRUA con aceleración positiva

$v_{inicial} = 0\ m/s$

$v_{final} = 8\ m/s$

$$a = \frac{v_{final} - v_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}} = \frac{8-0}{2-0} = 4\ m/s^2$$

$s_{inicial} = 0\ m$

$$s_{final} = s_{inicial} + v_{inicial} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$s_{final} = 0 + 0 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2^2 = 8\ m$$

$d_{recorrida} = s_{final} - s_{inicial} = 8 - 0 = 8\ m$

Tramo BC

Es un MRU

$v_{inicial} = 8\ m/s$

$v_{final} = 8\ m/s$

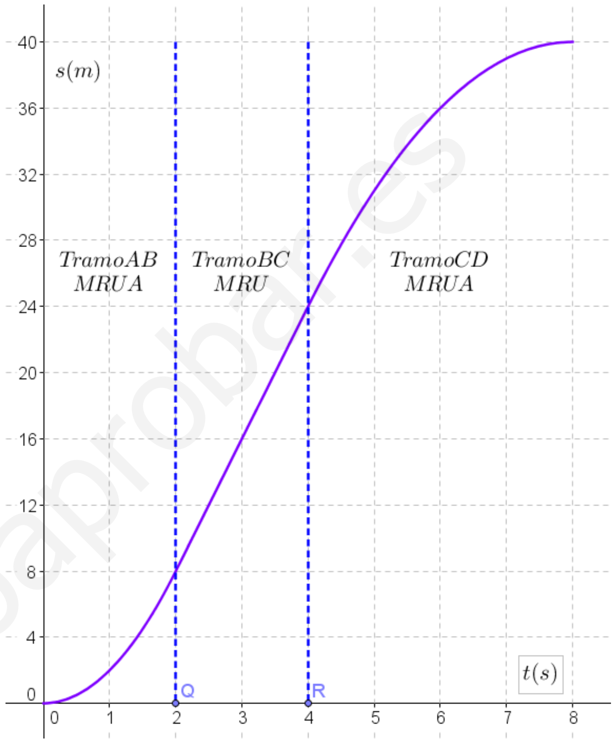
$$a = \frac{v_{final} - v_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}} = \frac{8-8}{4-2} = 0\ m/s^2$$

$s_{inicial} = 8\ m$ *(posición al final del tramo AB)*

$s_{final} = s_{inicial} + v_{inicial} \cdot t$

$s_{final} = 8 + 8 \cdot 2 = 24\ m$

$d_{recorrida} = s_{final} - s_{inicial} = 24 - 8 = 16\ m$



Gráfica posición/tiempo

Tramo CD

Es un MRUA con aceleración negativa

$v_{inicial} = 8\ m/s$

$v_{final} = 0\ m/s$

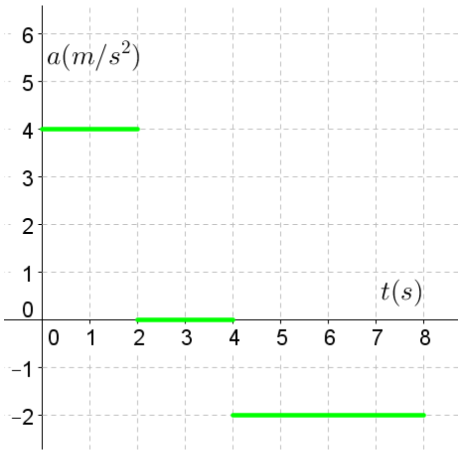
$$a = \frac{v_{final} - v_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}} = \frac{0-8}{8-4} = -2\ m/s^2$$

$s_{inicial} = 24\ m$ *(posición al final del tramo BC)*

$$s_{final} = s_{inicial} + v_{inicial} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$s_{final} = 24 + 8 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4^2 = 40\ m$$

$d_{recorrida} = s_{final} - s_{inicial} = 40 - 24 = 16\ m$



Gráfica aceleración/tiempo

Distancia total recorrida y la velocidad media.

$d_{total\ recorrida} = 8 + 16 + 16 = 40m$ *que coincide con la posición final del tramo CD*

$$v_{media} = \frac{s_{final} - s_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}} = \frac{40-0}{8-0} = 5\ m/s$$

$$d_{total\ recorrida} = 40\ m$$
$$v_{media} = 5\ m/s$$