RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES
Racionalizar un denominador con raíces consiste en hallar una expresión equivalente que no tenga ninguna raíz en el denominador.

Caso 1
El denominador es un radical cuadrático.
Se racionaliza multiplicando el numerador y el denominador por la raíz cuadrada del denominador.

1) Racionaliza el denominador de la expresión $\frac{5}{3\sqrt{2}}$.

$$\frac{5}{3\sqrt{2}}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{3\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 2}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{6}$$

2) Racionaliza el denominador de la expresión $\frac{15}{4\sqrt{3}}$.

$$\frac{15}{4\sqrt{3}}=\frac{15\cdot\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{3}}{4\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{15\sqrt{3}}{4\cdot 3}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$$

3) Racionaliza el denominador de la expresión $\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}$

$$\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{12}}{3\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{12}}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt{12}}{6}=\frac{\sqrt{2^2\cdot 3}}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Observa que en este caso también podríamos haber procedido así,

$$\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3\cdot 2}}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Caso 2
El denominador es un radical no cuadrático.
Se racionaliza multiplicando el numerador y el denominador por una raíz del mismo índice con las potencias de la misma base y de exponentes la diferencia entre el índice de la raíz y los exponentes de las potencias, es decir, se completa con los factores que le falten para que los exponentes igualen al índice de la raíz.

1) Racionaliza el denominador de la expresión $\frac{3}{2\sqrt[5]{7^2}}$.

$$\frac{3}{2\sqrt[5]{7^2}}=\frac{3\cdot\sqrt[5]{7^3}}{2\sqrt[5]{7^2}\cdot\sqrt[5]{7^3}}=\frac{3\sqrt[5]{7^3}}{2\sqrt[5]{7^5}}=\frac{3\sqrt[5]{7^3}}{2\cdot 7}=\frac{3\sqrt[5]{7^3}}{14}$$

2) Racionaliza el denominador de la expresión $\frac{12}{\sqrt[7]{2^3}}$.

$$\frac{12}{\sqrt[7]{2^3}}=\frac{12\cdot\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^3}\cdot\sqrt[7]{2^4}}=\frac{12\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^7}}=\frac{12\sqrt[7]{2^4}}{2}=6\sqrt[7]{2^4}$$

3) Racionaliza el denominador de la expresión $\frac{a}{2\sqrt[5]{a^2b}}$.

$$\frac{a}{2\sqrt[5]{a^2b}}=\frac{a\cdot\sqrt[5]{a^3b^4}}{2\sqrt[5]{a^2b}\cdot\sqrt[5]{a^3b^4}}=\frac{a\sqrt[5]{a^3b^4}}{2\sqrt[5]{a^5b^5}}=\frac{a\sqrt[5]{a^3b^4}}{2ab}=\frac{\sqrt[5]{a^3b^4}}{2b}$$

Caso 3

El denominador es un binomio irracional cuadrático.

$$a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}$$

Para racionalizarlo utilizaremos uno de los productos notables.

Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados, es decir, la suma por la diferencia de dos números es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

$$(p+q)(p-q) = p^2 - q^2$$

A los binomios $p+q$ y $p-q$ se les llaman binomios conjugados.

Para racionalizar un denominador que sea un binomio irracional cuadrático, se multiplican el numerador y el denominador de la expresión por el binomio conjugado del denominador.

1) Racionaliza el denominador de la expresión $\dfrac{5+4\sqrt{2}}{2+3\sqrt{2}}$.

$$\frac{5+4\sqrt{2}}{2+3\sqrt{2}} = \frac{\left(5+4\sqrt{2}\right)\cdot\left(2-3\sqrt{2}\right)}{\left(2+3\sqrt{2}\right)\cdot\left(2-3\sqrt{2}\right)} = \frac{10-15\sqrt{2}+8\sqrt{2}-12\left(\sqrt{2}\right)^2}{2^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2} = \frac{10-15\sqrt{2}+8\sqrt{2}-24}{4-18} = \frac{-14-7\sqrt{2}}{-14} =$$

$$\frac{14+7\sqrt{2}}{14} = \frac{7\left(2+\sqrt{2}\right)}{14} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

Recuerda

$$12\left(\sqrt{2}\right)^2 = 12\cdot 2 = 24 \quad \text{y} \quad \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 3^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 = 9\cdot 2 = 18$$

Hemos terminado multiplicando por –1 el numerador y el denominador de la expresión resultante para dejar el denominador positivo y simplificando la expresión entre 7.

2) Racionaliza el denominador de la expresión $\dfrac{5+\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}$.

$$\frac{5+\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}} = \frac{\left(5+\sqrt{3}\right)\cdot\left(4+2\sqrt{3}\right)}{\left(4-2\sqrt{3}\right)\cdot\left(4+2\sqrt{3}\right)} = \frac{20+10\sqrt{3}+4\sqrt{3}+2\left(\sqrt{3}\right)^2}{4^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2} = \frac{20+10\sqrt{3}+4\sqrt{3}+6}{16-12} =$$

$$\frac{26+14\sqrt{3}}{4} = \frac{13+7\sqrt{3}}{2}$$

EJERCICIOS

Racionaliza los denominadores de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{\sqrt{5}+18}{3\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}+18}{2\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{9}{\sqrt[5]{3}}$ d) $\dfrac{4\sqrt{5}-7}{3-\sqrt{5}}$ e) $\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}-4\sqrt{3}}$

Soluciones

a) $\dfrac{\sqrt{10}+18\sqrt{2}}{6}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}+6\sqrt{3}}{2}$ c) $3\sqrt[5]{3^4}$ d) $\dfrac{-1+5\sqrt{5}}{4}$ e) $\dfrac{-5-10\sqrt{6}}{23}$