EJERCICIOS DE GEOMETRÍA PLANA

1. **Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto $A(-2,2)$ y tiene como vector director el vector $\vec{v}=3\vec{i}-\vec{j}$.**

La ecuación paramétrica de una recta es de la forma $\begin{cases} x = a_1+v_1t \\ y = a_2+v_2t \end{cases}$, siendo (a_1,a_2) un punto y (v_1,v_2) un vector director. Luego la ecuación paramétrica de la recta r es $\begin{cases} x = -2+3t \\ y = 2-t \end{cases}$, ya que el vector director es $\vec{v}=3\vec{i}-\vec{j}=(3,-1)$ y pasa por el punto $A(-2,2)$.

2. **Hallar dos puntos de la recta cuyas ecuaciones paramétricas son $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 2-t \end{cases}$.**

Para calcular puntos de una recta dada en forma paramétrica, basta dar valores al parámetro t. Por ejemplo:

Para $t=0$, tenemos el punto $P(-1,2)$.
Para $t=1$, tenemos el punto $Q(0,1)$.

3. **Dadas las ecuaciones paramétricas de una recta $r:\begin{cases} x = 3-5t \\ y = 2+4t \end{cases}$, se pide:**

a) Hallar su ecuación en forma continua.

Como la ecuación paramétrica de una recta es de la forma $\begin{cases} x = a_1+v_1t \\ y = a_2+v_2t \end{cases}$, siendo $A(a_1,a_2)$ un punto de la recta y $\vec{v}(v_1,v_2)$ su vector director, tenemos que $A(3,2)$ es un punto de la recta r y $\vec{v}(-5,4)$ su vector director.

La ecuación continua de una recta es de la forma $\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}$, siendo $A(a_1,a_2)$ un punto de la recta y $\vec{v}(v_1,v_2)$ su vector director, por tanto $r:\frac{x-3}{-5}=\frac{y-2}{4}$ es la ecuación de la recta r en la forma continua.

b) Determinar cuáles de los puntos $P(-2,6)$, $Q(4,5)$, $R(8,-6)$ y $S\left(-\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)$ pertenecen a la recta.

– Para ver si $P(-2,6)\in r$, comprobamos si verifica su ecuación:
$\frac{-2-3}{-5}=\frac{6-2}{4}$; $1=1$; Cierto. Luego $P\in r$.

– ¿$Q(4,5) \in r$?: $\frac{4-3}{-5} = \frac{5-2}{4}$; $-\frac{1}{5} = \frac{3}{4}$; Falso. Luego $Q \notin r$.

– ¿$R(8,-6) \in r$?: $\frac{8-3}{-5} = \frac{-6-2}{4}$; $-1 = -2$; Falso. Luego $R \notin r$.

– ¿$S\left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right) \in r$?: $\frac{-\frac{1}{2}-3}{-5} = \frac{\frac{4}{5}-2}{4}$; $\frac{7}{10} = -\frac{3}{10}$; Falso. Luego $S \notin r$.

4. ¿Pertenece el punto $P(-4,3)$ a la recta $r: 2x + y - 5 = 0$?.

Para ver si P está en la recta r basta comprobar que verifica la ecuación de r:

$2 \cdot (-4) + 3 - 5 = -8 + 3 - 5 = -10 \neq 0$, luego $P \notin r$.

5. Una recta pasa por $P(2,1)$ y $Q(-3,0)$. Dar una ecuación continua.

$\vec{r} = \vec{PQ} = (-5,-1) \approx (5,1)$.

Su ecuación continua es $r: \frac{x+3}{5} = y$.

6. Hallar las ecuaciones paramétricas y la ecuación en forma continua de la recta que pasa por los puntos $A(-5,2)$ y $B(4,4)$.

Sea r la recta que pasa por los puntos A y B. Por tanto, el vector director de r es $\vec{v} = \vec{AB} = (4-(-5), 4-2) = (9,2)$.

– La ecuación paramétrica de una recta es de la forma $\begin{cases} x = a_1 + v_1 t \\ y = a_2 + v_2 t \end{cases}$, siendo (a_1, a_2) un punto y (v_1, v_2) un vector director. Luego la ecuación paramétrica de la recta r es $\begin{cases} x = -5 + 9t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$.

– La ecuación continua de una recta es de la forma $\frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2}$, siendo (a_1, a_2) un punto y (v_1, v_2) un vector director. Luego la ecuación continua de la recta r es $\frac{x+5}{9} = \frac{y-2}{2}$.

7. Hallar la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A(8,3)$ y $B(4,-2)$.

Sea r la recta que pasa por A y B. Entonces su vector director es $\vec{v} = \vec{AB} = (4-8, -2-3) = (-4, -5) \approx (4, 5)$.

Por tanto, $r: -5(x-8) + 4(y-3) = 0$; $r: -5x + 4y + 28 = 0$.

8. Escribir la ecuación $3x + 2y - 6 = 0$ en forma explícita.

Despejamos y de la ecuación general:

$3x + 2y - 6 = 0$; $2y = -3x + 6$; $y = \frac{-3x+6}{2}$; $y = -\frac{3}{2}x + 3$ es la forma explícita de la recta.

9. Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos $A(5, -1)$ y $B(2, -2)$.

- Hallamos primero la ecuación general, que es de la forma $-v_2(x - a_1) + v_1(y - a_2) = 0$, siendo (a_1, a_2) un punto de la recta y (v_1, v_2) un vector director.

  El vector director de la recta es $\vec{v} = \vec{AB} = (2-5, -2-(-1)) = (-3, -1) \approx (3, 1)$.

  Por tanto, $r: -1(x-5) + 3(y+1) = 0$; $r: -x + 3y + 8 = 0$.

- Calculamos después la ecuación explícita a partir de la general, despejando la y: $3y = x - 8$; $y = \frac{x-8}{3}$; $y = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$.

10. Hallar las ecuaciones vectorial, paramétrica, en forma continua, general y en forma explícita de la recta r que pasa por los puntos $A(2, -4)$ y $B(5, 6)$.

El vector director de r es $\vec{v} = \vec{AB} = (5-2, 6-(-4)) = (3, 10)$.

- <u>Ecuación vectorial:</u> $(x, y) = (a_1, a_2) + t(v_1, v_2)$, siendo (a_1, a_2) un punto de la recta y (v_1, v_2) un vector director. Por tanto $r: (x, y) = (2, -4) + t(3, 10)$.

- <u>Ecuación paramétrica:</u> $\begin{cases} x = a_1 + v_1 t \\ y = a_2 + v_2 t \end{cases}$, siendo (a_1, a_2) un punto de la recta y (v_1, v_2) un vector director. Por tanto $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4 + 10t \end{cases}$.

– <u>Ecuación continua:</u> $\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}$, siendo (a_1,a_2) un punto de la recta y (v_1,v_2) un vector director. Por tanto $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{10}$.

– <u>Ecuación general:</u> operamos a partir de la ecuación continua: $10(x-2)=3(y+4)$; $10x-20=3y+12$; $10x-3y-32=0$.

– <u>Ecuación explícita:</u> despejamos y en la ecuación general: $-3y=-10x+32$; $y=\frac{-10x+32}{-3}$; $y=\frac{10}{3}x-\frac{32}{3}$.

11. Dados los puntos $A(2,5)$, $B(4,9)$, $C(-6,1)$, hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos medios de los segmentos AB y AC.

Sean $P=\text{p.m.}AB=\left(\frac{2+4}{2},\frac{5+9}{2}\right)=(3,7)$ y $Q=\text{p.m.}AC=\left(\frac{2-6}{2},\frac{5+1}{2}\right)=(-2,3)$.

Sea r la recta que pasa por P y Q. Su vector director es $\vec{v}=\vec{PQ}=(-2-3,3-7)=(-5,-4)\approx(5,4)$.

Por tanto, $r:-4(x-3)+5(y-7)=0$; $r:-4x+5y-23=0$.

12. Dadas las rectas r y s de ecuaciones $r:2x-y+2=0$ y $s:x+y-3=0$, hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de r y s y por el punto $P(5,3)$.

– Calculamos el punto de intersección de las rectas r y s: $Q=r\cap s$.

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-y+2 & = & 0 \\ x+y-3 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Sumamos ambas ecuaciones: $3x-1=0$; $x=\frac{1}{3}$.

Sustituimos en la segunda ecuación: $\frac{1}{3}+y-3=0$; $y=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$.

Luego $Q\left(\frac{1}{3},\frac{8}{3}\right)$.

– Calculamos la ecuación de la recta t que pasa por P y por Q:

Su vector director es $\vec{PQ}=\left(\frac{1}{3}-5,\frac{8}{3}-3\right)=\left(-\frac{14}{3},-\frac{1}{3}\right)\approx(14,1)$.

Por tanto, $t: -1(x-5)+14(y-3)=0$; $t: -x+14y-37=0$.

13. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-3,8)$ y que determina con los sentidos positivos de los ejes coordenados un triángulo cuya área es 6 unidades cuadradas.

Vamos a calcular la ecuación de la recta en su forma segmentaria: $r: \frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$, donde m y n son los segmentos que determina la recta sobre los ejes coordenados.

Tenemos entonces que como $P \in r \to \frac{-3}{m}+\frac{8}{n}=1$, y como el área del triángulo determinado por la recta y los sentidos positivos de los ejes coordenados es de 6 unidades cuadradas, tenemos que $\frac{m \cdot n}{2}=6$.

Por tanto, para calcular m y n, resolveremos el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{-3}{m}+\frac{8}{n} & = & 1 \\ \frac{m\cdot n}{2} & = & 6 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{rcll} \frac{-3n+8m}{m\cdot n} & = & 1 & (*) \\ m & = & \frac{12}{n} & (**) \end{array}\right\}$$

Sustituyendo la ecuación (**) en la ecuación (*) tenemos que:

$$-3n+8\cdot\left(\frac{12}{n}\right)=\frac{12}{n}\cdot n \;\to\; -3n+\frac{96}{n}=12 \;\to\; -3n^2+96=12n \;\to\; 3n^2+12n-96=0$$

$$\to\; n^2+4n-32=0 \;\to\; n=\frac{-4\pm\sqrt{16+128}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{144}}{2}=\frac{-4\pm 12}{2}=\begin{cases} 4 \\ -8 \end{cases}.$$

La solución $n=-8$ es imposible, por ser n la longitud de un segmento. Luego $n=4$.

Sustituyendo en la ecuación (**) tenemos que $m=\frac{12}{4}=3$.

Por tanto la recta r que nos piden tiene como ecuación $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$.

14. ¿Verdadero o falso?. Los siguientes pares de ecuaciones representan la misma recta:

a) $r: \frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}$; $s: y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$

Las rectas r y s tienen el mismo vector director $\vec{r}=\vec{s}=(3,2)$.

El punto $P(2,0)$ pertenece a la recta r, pero ¿está en la recta s?: $0=\frac{2}{3}\cdot 2-\frac{4}{3}$, cierto, luego las rectas son coincidentes.

b) $\mathbf{r:(x,y)=(2,1)+\lambda(-1,2);\quad s:2x-y-5=0}$

Las rectas r y s no coinciden puesto que no tienen la misma dirección: $\vec{r}(-1,2)$ que no es proporcional a $\vec{s}(1,2)$.

c) $\mathbf{r:(x,y)=(-1,4)+\lambda(-2,1);\quad s:(x,y)=(3,2)+\lambda(4,-2)}$

Las rectas r y s tienen la misma dirección porque sus vectores directores $\vec{r}(-2,1)$ y $\vec{s}(4,-2)$ son proporcionales: $\vec{s}=-2\cdot\vec{r}$.
¿El punto $P(-1,4)$ de la recta r pertenece a la recta s?:

$$(-1,4)=(3,2)+\lambda(4,-2)$$
$$-1=3+4\lambda\rightarrow\lambda=-1$$
$$4=2-2\lambda\rightarrow\lambda=-1$$

Luego P pertenece a s y por tanto, r y s son coincidentes.

d) $\mathbf{r:y-x=0;\quad s:\frac{x-3}{5}=\frac{y-3}{-5}}$**.**

Las rectas r y s no coinciden puesto que no tienen la misma dirección: $\vec{r}(1,1)$ que no es proporcional a $\vec{s}(5,-5)$.

e) $\mathbf{r:\begin{cases}x = -1+3\lambda\\ y = 2-2\lambda\end{cases};\quad s:4x+6y-8=0}$**.**

Las rectas r y s tienen la misma dirección porque sus vectores directores $\vec{r}(3,-2)$ y $\vec{s}(-6,4)$ son proporcionales: $\vec{s}=-2\cdot\vec{r}$.
¿El punto $P(-1,2)$ de la recta r pertenece a la recta s?: $4\cdot(-1)+6\cdot 2-8=0$.
Luego P pertenece a s y por tanto, r y s son coincidentes.

15. Calcular los parámetros m y n para que las rectas $\mathbf{r:2x+3y-2=0}$ y $\mathbf{s:x+my+n=0}$ sean:

a) Paralelas.

$\frac{2}{1}=\frac{3}{m}$; $2m=3$; $m=\frac{3}{2}$.

Para que r y s sean paralelas $m=\frac{3}{2}$ y n es cualquier número real.

b) Perpendiculares.

$r \perp s \;\; ; \; \vec{r} \cdot \vec{s} = 0 \, ; \; (-3,2) \cdot (-m,1) = 0 \, ; \; 3m + 2 = 0 \, ; \; m = -\dfrac{2}{3}.$

Para que r y s sean perpendiculares $m = -\dfrac{2}{3}$ y n es cualquier número real.

c) Una misma recta.

$$\frac{2}{1} = \frac{3}{m} = \frac{-2}{n}.$$

$$\frac{2}{1} = \frac{3}{m} \rightarrow m = \frac{3}{2}.$$
$$\frac{2}{1} = \frac{-2}{n} \rightarrow n = -1.$$

Luego r y s son la misma recta si $m = \dfrac{3}{2}$ y $n = -1$.

16. Hallar el coseno del ángulo agudo determinado por los siguientes pares de rectas:

a) $\mathbf{r : 5x - 12y + 7 = 0}$ **y** $\mathbf{s : 3x + 4y - 7 = 0}$.
b) $\mathbf{r : 2x - y + 1 = 0}$ **y** $\mathbf{s : x = 5}$.
c) $\mathbf{r : x + 2y = 0}$ **y** $\mathbf{s : 2x + y = 0}$.

El ángulo formado por las rectas r y s es el ángulo formado por sus vectores directores:

a) $\vec{r}(12,5)$ y $\vec{s}(-4,3)$. Sea α el ángulo formado por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{s}$.
$$\cos\alpha = \frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{|\vec{r}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{(12,5)\cdot(-4,3)}{|(12,5)|\cdot|(-4,3)|} = \frac{-48+15}{\sqrt{12^2+5^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+3^2}} = \frac{-33}{13\cdot 5} = -\frac{33}{65}$$

b) $\vec{r}(1,2)$ y $\vec{s}(0,1)$. Sea α el ángulo formado por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{s}$.
$$\cos\alpha = \frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{|\vec{r}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{(1,2)\cdot(0,1)}{|(1,2)|\cdot|(0,1)|} = \frac{2}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

c) $\vec{r}(-2,1)$ y $\vec{s}(-1,2)$. Sea α el ángulo formado por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{s}$.
$$\cos\alpha = \frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{|\vec{r}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{(-2,1)\cdot(-1,2)}{|(-2,1)|\cdot|(-1,2)|} = \frac{2+2}{\sqrt{(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{4}{5}.$$

17. Hallar el ángulo que forman las rectas $\mathbf{r : 2x - 5y = 4}$ **y** $\mathbf{s : 3x - 4y = 7}$.

El ángulo α formado por las rectas r y s es el ángulo formado por sus vectores directores: $\vec{r}(5,2)$ y $\vec{s}(4,3)$.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{|\vec{r}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{(5,2)\cdot(4,3)}{|(5,2)|\cdot|(4,3)|} = \frac{20+6}{\sqrt{5^2+2^2}\cdot\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{26}{\sqrt{29}\cdot 5} = \frac{26\sqrt{29}}{145};$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{26\sqrt{29}}{145}\right) = 15^{\circ}4'7''.$$

18. Hallar el ángulo que forman las rectas $\mathbf{r: \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1}$ y $\mathbf{s: \frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1}$.

El ángulo α formado por las rectas r y s es el ángulo formado por sus vectores directores:

$$r: \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1;\ r: 3x+2y-6=0;\ \vec{r}(-2,3).$$

$$s: \frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1;\ s: x+2y-1=0;\ \vec{s}(-2,1).$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{|\vec{r}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{(-2,3)\cdot(-2,1)}{|(-2,3)|\cdot|(-2,1)|} = \frac{4+3}{\sqrt{(-2)^2+3^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2}} = \frac{7}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{65}} = \frac{7\sqrt{65}}{65}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{7\sqrt{65}}{65}\right) = 29^{\circ}44'42''.$$

19. Halla el ángulo que forman las rectas $\mathbf{r: \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}}$ y $\mathbf{s: \frac{x}{12}=\frac{y-3}{5}}$.

El ángulo α formado por las rectas r y s es el ángulo formado por sus vectores directores: $\vec{r}(3,4)$ y $\vec{s}(12,5)$.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{|\vec{r}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{(3,4)\cdot(12,5)}{|(3,4)|\cdot|(12,5)|} = \frac{36+20}{\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{12^2+5^2}} = \frac{56}{5\cdot 13} = \frac{56}{65};$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{56}{65}\right) = 30^{\circ}30'37''.$$

20. Halla el ángulo que forman las rectas $\mathbf{r: -x+2y+5=0}$ y $\mathbf{s: 2x-3y+4=0}$.

El ángulo α formado por las rectas r y s es el ángulo formado por sus vectores directores: $\vec{r}(2,1)$ y $\vec{s}(3,2)$.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{|\vec{r}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{(2,1)\cdot(3,2)}{|(2,1)|\cdot|(3,2)|} = \frac{6+2}{\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{65}} = \frac{8\sqrt{65}}{65};$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{8\sqrt{65}}{65}\right) = 7^{o}\,7'30''.$$

21. Halla el ángulo que forman las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3}$ y $s: -2x+3y-5=0$.

El ángulo α formado por las rectas r y s es el ángulo formado por sus vectores directores: $\vec{r}(2,3)$ y $\vec{s}(3,2)$.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{|\vec{r}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{(2,3)\cdot(3,2)}{|(2,3)|\cdot|(3,2)|} = \frac{6+6}{\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{12}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}} = \frac{12}{13} \rightarrow$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{12}{13}\right) = 22^{o}\,37'12''.$$

22. Dados los puntos $A(3,-1)$, $B(6,2)$, $C(2,6)$, hallar el ángulo formado por las semirrectas AB y AC.

El ángulo formado por las semirrectas AB y AC es el ángulo formado por los vectores $\vec{u} = \vec{AB}$ y $\vec{v} = \vec{AC}$.

$\vec{u} = \vec{AB} = (6-3, 2-(-1)) = (3,3)$ que tiene la misma dirección que el vector $(1,1)$.
$\vec{v} = \vec{AC} = (2-3, 6-(-1)) = (-1,7)$.

Sea α el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{(1,1)\cdot(-1,7)}{|(1,1)|\cdot|(-1,7)|} = \frac{-1+7}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+7^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) = 53^{o}\,7'48''.$$

23. Halla la ecuación general y explícita de la recta r que pasa por el punto $A(-2,3)$ y forma con el eje de abscisas un ángulo de 135º.

El vector director de la recta r está sobre la bisectriz del segundo cuadrante, por tanto, $\vec{r}(-1,1)$.

La ecuación general de la recta r es $r: -1(x+2) - 1(y-3) = 0$; $r: -x-2-y+3=0$; $r: -x-y+1=0$, y la explícita es $r: y = -x+1$.

24. Dada la recta de ecuación $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{2}$, se pide:

a) Hallar un vector director de la misma.

La recta está escrita en forma continua, es decir, en la forma $\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}$, siendo $\vec{v}(v_1,v_2)$ su vector director y $A(a_1,a_2)$ un punto de la misma. Por tanto, el vector director de la recta es $\vec{v}(2,2)$ que es equivalente al vector $(1,1)$.

b) Hallar la ecuaciones vectorial, paramétrica y continua de la recta que pasa por $A(2,-3)$ y es paralela a la recta dada.

Como la recta que nos piden es paralela a la recta dada, tiene el mismo vector director, es decir $(1,1)$.

Las ecuaciones que nos piden son de la forma:

- Ecuación vectorial: $(x,y)=(a_1,a_2)+t(v_1,v_2)$;
- Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = a_1+v_1t \\ y = a_2+v_2t \end{cases}$;
- Ecuación continua: $\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}$;

siendo $\vec{v}(v_1,v_2)$ su vector director y $A(a_1,a_2)$ un punto de la recta.

Por tanto, la recta que nos piden tiene como ecuaciones:

- Ecuación vectorial: $(x,y)=(2,-3)+t(1,1)$;
- Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -3+t \end{cases}$;
- Ecuación continua: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{1}$.

25. Dados los puntos $A(1,1)$, $B(5,-3)$, $C(4,2)$, hallar las ecuaciones paramétricas y en forma continua de la recta que pasa por C y es paralela a la recta que pasa por A y por B.

Sea r la recta que buscamos. Como r es paralela a la recta que pasa por A y por B, tiene como vector director $\vec{v}=\vec{AB}=(5-1,-3-1)=(4,-4)\approx(1,-1)$.

- La ecuación paramétrica de una recta es de la forma $\begin{cases} x = a_1+v_1t \\ y = a_2+v_2t \end{cases}$, siendo (a_1,a_2) un punto y (v_1,v_2) un vector director. Luego la ecuación paramétrica de la recta r es $\begin{cases} x = 4+t \\ y = 2-t \end{cases}$.

– La ecuación continua de una recta es de la forma $\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}$, siendo (a_1,a_2) un punto y (v_1,v_2) un vector director. Luego la ecuación continua de la recta r es $\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{-1}$.

26. Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A(3,4)$ y es paralela a la recta $3x+2y+3=0$.

La recta que queremos es paralela a la recta $3x+2y+3=0$, por tanto, tiene su vector director: $\vec{v}(-2,3)$.
La ecuación vectorial de una recta es de la forma $(x,y)=(a_1,a_2)+t(v_1,v_2)$, siendo (a_1,a_2) un punto y (v_1,v_2) un vector director de la misma. Por tanto, la ecuación vectorial de la recta que nos piden es $(x,y)=(3,4)+(-2,3)t$.

27. Halla la ecuación general de una recta paralela a $r:\begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = -3-5\lambda \end{cases}$ y que pasa por $A(4,3)$.

Sea s la recta que nos piden. Como s es paralela a r, $\vec{s}=\vec{r}=(3,-5)$. Por tanto, $s:5(x-4)+3(y-3)=0$; $s:5x+3y-29=0$.

28. Halla unas ecuaciones paramétricas de la perpendicular trazada desde el punto $A(-2,5)$ a la recta $r:(x,y)=(8,-3)+\lambda(5,1)$.

Sea s la recta que nos piden.

La recta r tiene como vector director $\vec{r}(5,1)$, que es perpendicular al vector $\vec{s}(-1,5)$. Por tanto, la ecuación paramétrica de la recta s es $s:\begin{cases} x = -2-\lambda \\ y = 5+5\lambda \end{cases}$.

29. Halla la ecuación de la recta paralela a $r:3x+6y+5=0$ que tenga de ordenada en el origen -2.

Sea s la recta buscada. Como es paralela a la recta r tiene la misma pendiente. Veamos que pendiente tiene r. Para ello escribimos su ecuación explícita:

$r:6y=-3x-5$; $r:-\frac{1}{2}x-\frac{5}{6}$.

Luego s tiene pendiente $-\frac{1}{2}$ y ordenada en el origen –2, luego tiene como ecuación explícita $s: -\frac{1}{2}x - 2$.

30. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-2,3)$ y es paralela al eje OY.

Las rectas paralelas al eje OY tienen como ecuación $x = a$, siendo a cualquier número real. Como la recta pasa por el punto $(-2,3)$, tenemos que su ecuación es $r: x = -2$.

31. Halla la ecuación general de la recta s paralela a la de ecuación $-2x + y + 8 = 0$ y que pase por $B\left(2, \frac{3}{4}\right)$.

Como s es paralela a la recta de ecuación $2x + y + 8 = 0$, es de la forma $s: -2x + y + k = 0$, con k un número real.

Además sabemos que $B \in s$, luego $-2 \cdot 2 + \frac{3}{4} + k = 0 \rightarrow k = \frac{13}{4}$.

Luego $s: -2x + y + \frac{13}{4} = 0$, o lo que es lo mismo, $s: -8x + 4y + 13 = 0$.

32. Ecuación de una recta paralela y una perpendicular a la recta $r: \begin{cases} x = -2 + 5\alpha \\ y = 3 - \alpha \end{cases}$ por el punto $S(-1,1)$.

$\vec{r} = (5,-1) \perp (1,5)$.

Recta paralela a r por el punto S: $\begin{cases} x = -1 + 5\alpha \\ y = 1 - \alpha \end{cases}$.

Recta perpendicular a r por el punto S: $\begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + 5\alpha \end{cases}$.

33. Ecuación de una recta paralela y una perpendicular a la recta $s: \frac{x+4}{3} = \frac{y-1}{-4}$ por el punto $Q(1,0)$.

$\vec{s} = (3,-4) \perp (4,3)$.

Resta paralela a s por Q: $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-4}$.

Recta perpendicular a s por Q: $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{3}$

34. Ecuación de una paralela y una perpendicular a la recta $t: 2x - y - 7 = 0$ por el punto $M(1,-4)$.

$\vec{t}=(1,2)\perp(-2,1)$.

Recta paralela a t por el punto M: $-2(x-1)+1(y+4)=0$; $-2x+y+6=0$.

Recta perpendicular a t por el punto M: $-1(x-1)-2(y+4)=0$; $-x-2y-7=0$; $x+2y+7=0$.

35. Ecuación de la paralela a la recta $y=\frac{2}{5}x-7$ por el punto $N(0,1)$.

La ecuación explícita de la recta pedida es de la forma $y=\frac{2}{5}x+n$, por tener la misma pendiente que la recta $y=\frac{2}{5}x-7$.

Como pasa por el punto N, tenemos que $1=\frac{2}{5}\cdot 0+n$; $n=1$.

Luego la recta que se pide es $y=\frac{2}{5}x+1$.

36. ¿Son perpendiculares las rectas r y s en cada uno de los casos siguientes?:

a) $r: 2x + y - 1 = 0$ $\quad$ $s: x - 2y + 3 = 0$
b) $r: 3x + 4y + 4 = 0$ $\quad$ $s: 4x + 3y - 1 = 0$
c) $r: x - y + 2 = 0$ $\quad$ $s: 3x + 3y - 1 = 0$

a) $\vec{r}(-1,2)$ y $\vec{s}(2,1)$. $\vec{r}\cdot\vec{s}=(-1,2)\cdot(2,1)=-2+2=0\rightarrow$ r y s son perpendiculares.

b) $\vec{r}(-4,3)$ y $\vec{s}(-3,4)$. $\vec{r}\cdot\vec{s}=(-4,3)\cdot(-3,4)=12+12=24\neq 0\rightarrow$ r y s no son perpendiculares.

c) $\vec{r}(1,1)$ y $\vec{s}(-3,3)$. $\vec{r}\cdot\vec{s}=(1,1)\cdot(-3,3)=-3+3=0\rightarrow$ r y s son perpendiculares.

37. Calcular m para que las rectas $r: y=-3x+1$, $s: mx+2y-3=0$ sean perpendiculares.

Las rectas r y s son perpendiculares si lo son sus vectores directores, es decir, si $\vec{r}\cdot\vec{s}=0$:
$(-1,3)\cdot(-2,m)=0$; $2+3m=0$; $m=-\dfrac{2}{3}$.

38. Hallar las ecuaciones de las rectas que se indican:

a) Perpendicular por $A(1,1)$ a la recta $r: 3x+2y-8=0$.
b) Perpendicular por $B(-2,0)$ a la recta $s: x-y+2=0$.
c) Perpendicular por $C(4,3)$ a la recta $t: y=-3x+4$.

a) Sea r' la recta buscada.
$\vec{r}(-2,3)\perp\vec{r}'(3,2)$.
$r': -2(x-1)+3(y-1)=0$; $r': -2x+3y-1=0$.

b) Sea s' la recta buscada.
$\vec{s}(1,1)\perp\vec{s}'(1,-1)$.
$s': 1(x+2)+1(y-0)=0$; $s': x+y+2=0$.

c) Sea t' la recta buscada.
$t: y=-3x+4 \rightarrow t: 3x+y-4=0$; $\vec{t}(-1,3)\perp\vec{t}'(3,1)$.
$t': -1(x-4)+3(y-3)=0$; $t': -x+3y-5=0$

39. Sea el triángulo de vértices $A(1,1)$, $B(4,6)$ y $C(7,2)$. Las paralelas por cada vértice al lado opuesto determinan un triángulo A'B'C'. Calcular las coordenadas de los vértices del triángulo A'B'C'.

GRÁFICA: Hacer el dibujo así: representar A, B y C en un sistema de referencia. Llamar r a la recta que pasa por A, s a la recta que pasa por B y t a la recta que pasa por C. Llamamos A' al punto de corte de las rectas s y t, B' al punto de corte de las rectas r y t y C' al punto de corte de las rectas r y s.

– Sea r la recta que pasa por A y es paralela al lado BC.
$\vec{r}=\vec{BC}=(7-4,2-6)=(3,-4)$.
$r: 4(x-1)+3(y-1)=0$; $r: 4x+3y-7=0$.

– Sea s la recta que pasa por B y es paralela al lado AC.
$\vec{s}=\vec{AC}=(7-1,2-1)=(6,1)$.
$s: -1(x-4)+6(y-6)=0$; $s: -x+6y-32=0$.

– Sea t la recta que pasa por C y es paralela al lado AB.
$\vec{t}=\vec{AB}=(4-1,6-1)=(3,5)$.
$t: -5(x-7)+3(y-2)=0$; $t: -5x+3y+29=0$.

– Sea $A'=s\cap t$.

$$\left.\begin{array}{rcl} -x+6y-32 & = & 0 \\ -5x+3y+29 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Despejamos en la primera ecuación: $x=6y-32$.

Sustituimos en la segunda: $-5(6y-32)+3y+29=0$; $-30y+160+3y+29=0$; $-27y=-189$; $y=\dfrac{189}{27}=7$.

Luego $x=6\cdot 7-32=10$.

Y por tanto, $A'(10,7)$.

– Sea $B'=r\cap t$.

$$\left.\begin{array}{rcl} 4x+3y-7 & = & 0 \\ -5x+3y+29 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Restamos ambas ecuaciones: $9x-36=0$; $x=\dfrac{36}{9}=4$.

Sustituimos en la primera ecuación: $4\cdot 4+3y-7=0$; $3y+9=0$; $y=-\dfrac{9}{3}=-3$.

Luego $B'(4,-3)$.

– Sea $C'=r\cap s$.

$$\left.\begin{array}{rcl} 4x+3y-7 & = & 0 \\ -x+6y-32 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Despejamos en la segunda ecuación: $x=6y-32$.

Sustituimos en la primera ecuación: $4(6y-32)+3y-7=0$; $24y-128+3y-7=0$; $27y-135=0$; $y=\dfrac{135}{27}=5$.

Luego $x=6\cdot 5-32=-2$.

Y por tanto, $C'(-2,5)$.

40. La recta que pasa por $M(2,3)$ y es paralela a la recta $y=3x+1$ determina con los ejes coordenados un triángulo. Hallar su área.

Como la recta es paralela a la $y=3x+1$, tiene la misma pendiente, es decir, la ecuación de la recta será $r: y=3x+b$.

Como $M \in r$; $3 = 3 \cdot 2 + b$; $b = -3$.

Luego la ecuación explícita de la recta es $r : y = 3x - 3$.

Para calcular el área que determina con los ejes coordenados, escribimos su ecuación en forma segmentaria: $r : 3x - y = 3$; $r : x - \frac{y}{3} = 1$. Luego r determina con los ejes coordenados segmentos de longitud 1 y 3, y por tanto, el área del triángulo determinado es $S = \frac{1 \cdot 3}{2} = 1{,}5\ u^2$.

41. Una recta corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(8,0)$ y $B(0,5)$. Hallar la ecuación de la recta perpendicular a AB que pasa por el punto de intersección de las rectas $4x - 3y + 6 = 0$ y $2x + y - 12 = 0$.

Sea r la recta pedida:

Vector director de r: $\vec{AB}(-8,5) \perp \vec{r}(5, 8)$.

Cálculo de un punto de r: $\left.\begin{array}{rcl} 4x - 3y + 6 & = & 0 \\ 2x + y - 12 & = & 0 \end{array}\right)$.

Despejamos en la segunda ecuación: $y = 12 - 2x$.

Sustituimos en la primera ecuación: $4x - 3(12 - 2x) + 6 = 0$; $4x - 36 + 6x + 6 = 0$; $10x = 30$; $x = 3$.

Por tanto, $y = 12 - 2 \cdot 3 = 6$.

Luego $P(3, 6)$.

Luego la recta r tiene ecuación: $r : 8(x - 3) - 5(y - 6) = 0$; $r : 8x - 5y + 6 = 0$.

42. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $5x - 2y = 8$ y $4x + 9y = 17$ y es perpendicular a la bisectriz del segundo cuadrante.

Vamos a calcular el punto de intersección de las rectas dadas. Para ello, resolvemos el sistema: $\left.\begin{array}{rcl} 5x - 2y & = & 8 \\ 4x + 9y & = & 17 \end{array}\right\}$.

Despejamos en la primera ecuación: $x = \frac{8 + 2y}{5}$.

Sustituimos en la segunda ecuación: $4 \cdot \frac{8 + 2y}{5} + 9y = 17$; $32 + 8y + 45y = 85$; $53y = 53$; $y = 1$.

Por tanto, $x = \frac{8+2\cdot 1}{5} = 2$.

Luego $P(2\,,1)$.

Como la recta que nos piden es perpendicular a la bisectriz del segundo cuadrante, tiene la dirección de la bisectriz del primer cuadrante, es decir, $\vec{r}\,(1\,,1)$.

Por tanto, $r: 1(x-2)-1(y-1)=0$; $r: x-y-1=0$.

43. Se sabe que la recta $r: 3x+2y-8=0$ es perpendicular a la recta $s: ax+2y+c=0$, y que esta última pasa por el punto $P\,(3,5)$. Calcular a y c.

Primera condición: $r \perp s \;\rightarrow\; \vec{r} \perp \vec{s} \;\rightarrow\; \vec{r}\cdot\vec{s}=0$; $(-2,3)\cdot(-2,a)=0$; $4+3a=0$; $a=-\frac{4}{3}$.

Segunda condición: $P \in s \;\rightarrow\; -\frac{4}{3}\cdot 3+2\cdot 5+c=0$; $-4+10+c=0$; $c=-6$.

Luego $a=-\frac{4}{3}$ y $c=-6$.

44. Las dos rectas $r: 3x-my-5=0$ y $s: 2x+ny-7=0$ son perpendiculares. Determinar m y n sabiendo además que la segunda pasa por $M(2,-1)$.

- $r \perp s \rightarrow \vec{r}\cdot\vec{s}=0 \rightarrow (m,3)\cdot(-n,2)=0 \rightarrow -mn+6=0$ (*).
- $M \in s \rightarrow 2\cdot 2+n\cdot(-1)-7=0 \rightarrow -n-3=0 \rightarrow n=-3$.

  Sustituyendo en (*): $-m\cdot(-3)+6=0$; $3m+6=0$; $m=-2$.

45. Determina los valores de a y b sabiendo que las rectas $r: ax-2y=0$ y $s: bx+6y=5$, sabiendo que son perpendiculares y que la primera pasa por el punto $N(2,3)$.

Como $r \perp s$; $\vec{r}\cdot\vec{s}=0$; $(2,a)\cdot(-6,b)=0$; $-12+ab=0$.

Como $N \in r$; $a\cdot 2-2\cdot 3=0$; $a=3$.

Luego $-12+3\cdot b=0$; $b=4$.

46. Determina los valores de a y b para que las rectas $r: ax+by-1=0$ y $s: 2x-3y+4=0$ sean paralelas y que la primera pase por el punto $P(1,1)$.

Como r y s son paralelas, $\frac{a}{2}=\frac{b}{-3}$; $-3a=2b$.

Como $P\in r$; $a\cdot 1+b\cdot 1-1=0$; $a+b=1$.

Luego tenemos que resolver el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcl}-3a & = & 2b\\ a+b & = & 1\end{array}\right\}$.

Despejamos en la segunda ecuación: $a=1-b$.

Sustituimos en la primera ecuación: $-3(1-b)=2b$; $-3+3b=2b$; $b=3$.

Y por tanto, $a=1-3=-2$.

47. Hallar las coordenadas del pie de la perpendicular trazada desde el origen de coordenadas a la recta $r: 5x+2y-58=0$.

– Calculamos la ecuación de la recta r' que pasa por el origen de coordenadas $O(0,0)$ y es perpendicular a r:

$\vec{r}(-2,5)\perp\vec{r}'(5,2)$. Por tanto, $r': -2(x-0)+5(y-0)=0$; $r': -2x+5y=0$.

– El pie de la perpendicular trazada desde el origen a la recta r es $P=r\cap r'$:

$$\left.\begin{array}{rcl}5x+2y-58 & = & 0\\ -2x+5y & = & 0\end{array}\right\}$$

Despejamos en la segunda ecuación: $x=\frac{5y}{2}$.

Sustituimos en la primera ecuación: $5\cdot\frac{5y}{2}+2y-58=0$; $25y+4y-116=0$; $y=\frac{116}{29}=4$.

Por tanto, $x=\frac{5\cdot 4}{2}=10$.

Luego $P(10,4)$.

48. Hallar la proyección del punto $P(0,-5)$ sobre la recta $r: 3x+5y-9=0$.

– Calculamos la recta s que es perpendicular a r y que pasa por el punto P:

$\vec{r}(-5,3)\perp\vec{s}(3,5)$.

$s: -5(x-0)+3(y+5)=0$; $s: -5x+3y+15=0$.

– La proyección de P sobre r es $P' = r \cap s$:

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x+5y-9 & = & 0 \\ -5x+3y+15 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Despejamos en la 1ª ecuación: $x = \dfrac{9-5y}{3}$.

Sustituimos en la 2ª ecuación: $-5 \cdot \dfrac{9-5y}{3} + 3y + 15 = 0$; $-45+25y+9y+45=0$; $36y=0$; $y=0$.

Por tanto, $x = \dfrac{9-5\cdot 0}{3} = 3$.

Luego $P'(3,0)$.

49. Hallar el simétrico del punto $A(2,3)$ respecto de la recta $r: x+y-5=0$. Después, calcula el simétrico del punto $B(5,2)$ respecto de la misma recta.

¿A está en la recta r?. $2+3-5=0$, que es cierto, por tanto, A está en la recta r, luego A coincide con su simétrico, es decir, $A' = A = (2,3)$.

¿B está en la recta r?. $5+2-5=2 \neq 0$, luego B no está en r.

Para calcular el simétrico de B respecto de la recta r (B') seguimos los siguientes pasos:

1º <u>Calculamos la ecuación de la recta s que pasa por B y es perpendicular a la recta r:</u>

$\vec{r}(-1,1) \perp \vec{s}(1,1)$.
$s: -1(x-5)+1(y-2)=0$; $s: -x+y+3=0$.

2º <u>Calculamos del pie de la perpendicular a r desde B</u> $(P = r \cap s)$:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y-5 & = & 0 \\ -x+y+3 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Sumamos ambas ecuaciones: $2y-2=0$; $y=1$.
Sustituimos en la primera ecuación: $x+1-5=0$; $x=4$.
Luego $P(4,1)$.

3º <u>Aplicamos que P es el punto medio del segmento BB':</u>

Sea $B'(b'_1, b_2)$.

$(4,1) = P = \text{p.m.}BB' = \left(\frac{5+b'_1}{2}, \frac{2+b'_2}{2}\right)$, de donde:

$4 = \frac{5+b'_1}{2} \to b'_1 = 3$.

$1 = \frac{2+b'_2}{2} \to b'_2 = 0$.

Luego $B'(3,0)$.

50. Hallar las longitudes de los lados del cuadrilátero de vértices $A(2,2)$, $B(7,3)$, $C(5,8)$, $D(-2,6)$.

En una gráfica podemos observar que ABCD es un cuadrilátero.

$d(A,B) = |\vec{AB}| = |(7-2, 3-2)| = |(5,1)| = \sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{26}$.

$d(B,C) = |\vec{BC}| = |(5-7, 8-3)| = |(-2,5)| = \sqrt{(-2)^2+5^2} = \sqrt{29}$.

$d(C,D) = |\vec{CD}| = |(-2-5, 6-8)| = |(-7,-2)| = \sqrt{(-7)^2+(-2)^2} = \sqrt{53}$.

$d(D,A) = |\vec{DA}| = |(2-(-2), 2-6)| = |(4,-4)| = \sqrt{4^2+(-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

51. Sean M y N los puntos medios de los lados opuestos AB y CD del cuadrilátero del ejercicio anterior. Hallar la longitud del segmento MN.

$M = \text{p.m.}AB = \left(\frac{2+7}{2}, \frac{2+3}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$ y $N = \text{p.m.}CD = \left(\frac{5-2}{2}, \frac{8+6}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 7\right)$.

$$d(M,N) = |\vec{MN}| = \left|\left(\frac{3}{2}-\frac{9}{2}, 7-\frac{5}{2}\right)\right| = \left|\left(-3, \frac{9}{2}\right)\right| = \sqrt{(-3)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{9+\frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{117}{4}} = \frac{\sqrt{117}}{2}.$$

52. Calcula la distancia del punto $A(3,2)$ a la recta r en los casos siguientes:

a) $\mathbf{r : y = 3x - 2}$ **b)** $\mathbf{r : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \end{cases}}$ **c)** $\mathbf{r : 3x + 4y - 5 = 0}$

a) La recta r está escrita en forma explícita. La escribimos en forma general: $r : 3x - y - 2 = 0$. Por tanto, $d(A,r) = \frac{|3 \cdot 3 - 2 - 2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

b) Como r está en forma paramétrica, observamos que $P(1,2)$ es un punto de r y $\vec{v}(2,-1)$ su vector director. Por tanto, la ecuación general de r es $r : 1(x-1) + 2(y-2) = 0$; $r : x + 2y - 5 = 0$.

Luego $d(A,r)=\dfrac{|3+2\cdot 2-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

c) $d(A,r)=\dfrac{|3\cdot 3+4\cdot 2-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{12}{5}$.

53. Se dan los puntos $A(-1,12)$ y $B(9,28)$ y se determinan las coordenadas del punto A' simétrico de A respecto del eje de abscisas y las del punto B' simétrico del B respecto del eje de ordenadas. Se pide:

a) Las ecuaciones de las rectas AB' y A'B.
b) Las coordenadas del punto C en que se cortan ambas rectas.
c) Hallar la distancia del punto C a la recta AB.

a) Las coordenadas de A' y B' son: $A'(-1,-12)$ y $B'(-9,28)$.

- Sea r la recta que pasa por A y por B':
  $\vec{r}=\vec{AB'}=(-9+1,28-12)=(-8,16)\approx(-1,2)$.
  $r:2(x+1)+1(y-12)=0$; $r:2x+y-10=0$.

- Sea s la recta que pasa por A' y por B.
  $\vec{s}=\vec{A'B}=(9+1,28+12)=(10,40)\approx(1,4)$.
  $s:4(x+1)-1(y+12)=0$; $s:4x-y-8=0$.

b) $C=r\cap s$. Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las rectas r y s:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x+y-10 &=& 0\\ 4x-y-8 &=& 0\end{array}\right\}.$$

Sumamos ambas ecuaciones: $6x-18=0$; $x=3$.
Sustituimos en la primera ecuación: $2\cdot 3+y-10=0$; $y=4$.

Luego $C(3,4)$.

c) Sea t la recta que pasa por A y por B.

$\vec{t}=\vec{AB}=(9+1,28-12)=(10,16)\approx(5,8)$.
$t:8(x+1)-5(y-12)=0$; $t:8x-5y+68=0$.

$$d(C,t)=\frac{|8\cdot 3-5\cdot 4+68|}{\sqrt{8^2+(-5)^2}}=\frac{72}{\sqrt{89}}=\frac{72\sqrt{89}}{89}\,u\approx 7{,}63\text{ u.}$$

54. Dados el punto $P(2,7)$ y el $Q(1,2)$, hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por P y distan 5 unidades del Q.

Sea $r: y = mx + n$ la ecuación de la recta que nos piden.

Como r pasa por P, $7 = 2m + n \rightarrow n = 7 - 2m$.

Por tanto, la recta es de la forma $y = mx + 7 - 2m$, o bien, $r: mx - y + 7 - 2m = 0$.

Como r dista 5 unidades de Q, $5 = d(Q, r) = \frac{|m - 2 + 7 - 2m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|-m + 5|}{\sqrt{m^2 + 1}}$;

$-m + 5 = \pm 5\sqrt{m^2 + 1}$ (*); $(-m + 5)^2 = \left(\pm 5\sqrt{m^2 + 1}\right)^2$; $m^2 + 25 - 10m = 25(m^2 + 1)$; $m^2 + 25 - 10m = 25m^2 + 25$; $24m^2 + 10m = 0$; $m(24m + 10) = 0$. Luego $m = 0$ ó $24m + 10 = 0$, es decir, $m = -\frac{5}{12}$.

(Si comprobamos ambos resultados en la ecuación irracional (*), vemos que los dos son resultados válidos).

Por tanto, tenemos dos posibles soluciones para la recta r:

Si $m = 0 \rightarrow r: y = 7$.
Si $m = -\frac{5}{12} \rightarrow r': y = -\frac{5}{12}x + 7 - 2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right) \rightarrow r': y = -\frac{5}{12}x + \frac{47}{6}$.

55. Hallar la ecuación de una recta que pase por el punto $A(2, 2)$ de manera que diste 5 unidades del punto $B(-1, 6)$.

Sea r la recta que nos piden en su forma explícita: $r: y = mx + n$.

Como $A \in r \rightarrow 2 = 2m + n$; $n = 2 - 2m$.

Como $d(B, r) = 5$ y r en su forma general es $r: mx - y + n = 0$, tenemos que

$\frac{|-m - 6 + n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 5$; $-m - 6 + n = \pm 5\sqrt{m^2 + 1}$; $-m - 6 + 2 - 2m = \pm 5\sqrt{m^2 + 1}$;

$-3m - 4 = \pm 5\sqrt{m^2 + 1}$; $(-3m - 4)^2 = \left(\pm 5\sqrt{m^2 + 1}\right)^2$; $9m^2 + 16 + 24m = 25(m^2 + 1)$;

$9m^2 + 16 + 24m = 25m^2 + 25$; $16m^2 - 24m + 9 = 0$;

$$m = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 16 \cdot 9}}{2 \cdot 16} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}.$$

Y por tanto, $n = 2 - 2 \cdot \frac{3}{4}$; $n = \frac{1}{2}$.

Luego la recta es $r: y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$.

56. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A(3,1)$ y equidista de los puntos $B(7,4)$ y $C(9,-6)$. (Hay dos soluciones).

Sea r la recta que nos piden, su ecuación en forma explícita será $r: y=mx+n$.

Como $A\in r$, $1=3m+n \rightarrow n=1-3m$. (*)

Por tanto, la ecuación de la recta será de la forma $r: mx-y+n=0$; $r: mx-y+1-3m=0$.

Como $d(B,r)=d(C,r)$ tenemos que $\frac{|7m-4+1-3m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|9m+6+1-3m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}$; $|4m-3|=|6m+7|$; $4m-3=\pm(6m+7)$.

Luego tenemos dos posibilidades:

1ª) $4m-3=6m+7$; $-2m=10$; $m=-5$.
Sustituyendo en (*), $n=1-3(-5)=16$.

Entonces, la recta tiene por ecuación $r: y=-5x+16$.

2ª) $4m-3=-6m-7$; $10m=-4$; $m=-\frac{2}{5}$.
Sustituyendo en (*), $n=1-3\left(-\frac{2}{5}\right)=1+\frac{6}{5}=\frac{11}{5}$.
Y por tanto, la recta también puede ser la $r: y=-\frac{2}{5}x+\frac{11}{5}$.

57. Hallar las coordenadas de los puntos situados en la recta $s: x+3y-3=0$ y que disten 2 unidades de la recta $r: 4x-3y+9=0$.

Sea $P(x,y)$ un punto de la recta s tal que $d(P,r)=2$.

Como $P\in s \rightarrow x+3y-3=0$.

Como $d(P,r)=2 \rightarrow \frac{|4x-3y+9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$; $\frac{|4x-3y+9|}{5}=2$; $|4x-3y+9|=10$; $4x-3y+9=\pm 10$.

Por tanto, tenemos dos posibilidades:

1ª) $\left.\begin{array}{rcr} 4x-3y+9 & = & 10 \\ x+3y-3 & = & 0 \end{array}\right\}$.

Despejamos en la 2ª ecuación: $x = 3-3y$.

Sustituimos en la 1ª ecuación: $4(3-3y)-3y+9=10$; $12-12y-3y+9=10$; $-15y=-11$; $y=\frac{11}{15}$.

Por tanto, $x = 3-3\cdot\frac{11}{15} = 3-\frac{11}{5} = \frac{4}{5}$.

Luego $P\left(\frac{4}{5},\frac{11}{15}\right)$.

2ª) $\left.\begin{array}{rcr} 4x-3y+9 & = & -10 \\ x+3y-3 & = & 0 \end{array}\right\}$

Despejamos en la 2ª ecuación: $x = 3-3y$.

Sustituimos en la 1ª ecuación: $4(3-3y)-3y+9=-10$; $12-12y-3y+9=-10$; $-15y=-31$; $y=\frac{31}{15}$.

Por tanto, $x = 3-3\cdot\frac{31}{15} = 3-\frac{31}{5} = -\frac{16}{5}$.

Luego $P'\left(-\frac{16}{5},\frac{31}{15}\right)$.

Los puntos $P\left(\frac{4}{5},\frac{11}{15}\right)$ y $P'\left(-\frac{16}{5},\frac{31}{15}\right)$ son las dos soluciones del problema.

58. Halla el área del triángulo de vértices $O(0,0)$, $A(4,7)$ y $B(-3,5)$.

$S = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}$:

$\text{base} = d(0,A) = \left|\vec{OA}\right| = \left|(4,7)\right| = \sqrt{4^2+7^2} = \sqrt{65}$.

Sea a la recta que pasa por O y A:

$\vec{a} = \vec{OA} = (4,7)$.
$a: -7(x-0)+4(y-0)=0$; $a: -7x+4y=0$.

$$\text{altura} = d(B,a) = \frac{|-7\cdot(-3)+4\cdot 5|}{\sqrt{(-7)^2+4^2}} = \frac{41}{\sqrt{65}}.$$

$$\text{Por tanto, } S = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = \frac{\sqrt{65}\cdot\frac{41}{\sqrt{65}}}{2} = \frac{41}{2}\ \text{u}^2.$$

59. Hallar el área de cada uno de los triángulos que tienen un vértice en el origen de coordenadas y los otros dos en:

a) $A(4,6)$ y $B(2,6)$.

b) $A(5,-11)$ y $B(4,-6)$.

$$\text{Área} = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}.$$

a)

$$\text{base} = d(A,B) = |\vec{AB}| = |(-2,0)| = 2.$$

$\text{altura} = d(O,r)$, siendo O el origen de coordenadas y r la recta que pasa por A y por B:

$$r: 2(y-6)=0;\ r: y-6=0.$$

$$\text{altura} = d(O,r) = \frac{|0-6|}{1} = 6.$$

$$\text{Por tanto, área} = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = \frac{2\cdot 6}{2} = 6\ \text{u}^2.$$

b)

$$\text{base} = d(A,B) = |\vec{AB}| = |(-1,5)| = \sqrt{(-1)^2+5^2} = \sqrt{26}.$$

$\text{altura} = d(O,r)$, siendo O el origen de coordenadas y r la recta que pasa por A y por B:

$$r: 5(x-5)+1(y+11)=0;\ r: 5x+y-14=0.$$

$$\text{altura} = d(O,r) = \frac{|5\cdot 0+0-14|}{\sqrt{5^2+1^2}} = \frac{14}{\sqrt{26}}.$$

$$\text{Por tanto, área} = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} = \frac{\sqrt{26}\cdot\frac{14}{\sqrt{26}}}{2} = 7\ \text{u}^2.$$

60. Hallar el punto de la recta $2x-4y=1$ que con el origen de coordenadas y el punto $(-4,0)$ determine un triángulo de área 3 u^2.

Sean $O(0,0)$, $A(-4,0)$ y B el punto de la recta $r: 2x-4y=1$ que es el tercer vértice del triángulo.

La base del triángulo es $b=d(O,A)=\left|\vec{OA}\right|=\left|(-4,0)\right|=4$.

Como el área del triángulo es de 3 u^2, tenemos que $\text{Área}=\frac{b\cdot h}{2}=3$. Luego $\frac{4\cdot h}{2}=3$ y por tanto $h=\frac{3}{2}u$.

Luego podemos afirmar que $B(x,y)$ es un punto de la recta $r: 2x-4y=1$ que dista $\frac{3}{2}u$ de la recta que pasa por O y por A, es decir, del eje de abscisas, cuya ecuación es $OX: y=0$, y por tanto $d(B,OX)=\frac{|y|}{1}=\frac{3}{2}\to y=\pm\frac{3}{2}$.

Tenemos dos posibilidades:

1ª) $\left.\begin{array}{rcl} y & = & \frac{3}{2} \\ 2x-4y & = & 1 \end{array}\right\}$

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda: $2x-4\cdot\frac{3}{2}=1;\ x=\frac{7}{2}$.

Luego $B\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$.

2ª) $\left.\begin{array}{rcl} y & = & -\frac{3}{2} \\ 2x-4y & = & 1 \end{array}\right\}$.

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda: $2x-4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=1;\ x=-\frac{5}{2}$.

Luego $B'\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$.

Tenemos dos soluciones para el problema: $B\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$ y $B'\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$.

61. Dos lados de un cuadrado tienen por ecuaciones $2x-3y+4=0$ y $6x-9y-31=0$. Hallar su área.

Sean $r: 2x-3y+4=0$ y $s: 6x-9y-31=0$ las rectas que contienen a dos lados del cuadrado. Observamos que $\frac{2}{6}=\frac{-3}{-9}$, por lo que las rectas r y s son paralelas. Por tanto, el lado del cuadrado, l, es la distancia entre las dos rectas, es decir, $l = d(r\,,\,s)$.

Sea P un punto de r: $x=1 \to 2-3y+4=0 \to y=2$. $P(1,2)$.

$$l = d(r\,,\,s) = d(P,s) = \frac{|6\cdot 1-9\cdot 2-31|}{\sqrt{6^2+(-9)^2}} = \frac{43}{\sqrt{117}}.$$

$$\text{Área del cuadrado} = l^2 = \left(\frac{43}{\sqrt{117}}\right)^2 = \frac{1.849}{117}\ u^2 \approx 15{,}80\ u^2.$$

62. Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas $r: 5x+12y-7=0$, $s: 4x+3y+1=0$.

Los puntos de la bisectriz de un ángulo son los puntos que equidistan de los lados del ángulo. Por tanto, $P(x,y)$ es un punto de una bisectriz si $d(P,r)=d(P,s)$.

$$d(P,r)=d(P,s); \qquad \frac{|5x+12y-7|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{|4x+3y+1|}{\sqrt{4^2+3^2}}; \qquad \frac{|5x+12y-7|}{13}=\frac{|4x+3y+1|}{5};$$
$$\frac{5x+12y-7}{13}=\pm\frac{4x+3y+1}{5}$$

Primera bisetriz:

$$\frac{5x+12y-7}{13}=\frac{4x+3y+1}{5}; \quad 25x+60y-35=52x+39y+13; \quad -27x+21y-48=0;$$
$$9x-7y+16=0.$$

Segunda bisetriz:

$$\frac{5x+12y-7}{13}=-\frac{4x+3y+1}{5}; \quad 25x+60y-35=-52x-39y-13; \quad 77x+99y-22=0;$$
$$7x+9y-2=0.$$

63. Halla las bisectrices de los ángulos formados por los siguientes pares de rectas:

a) $r: 8x+6y-5=0$; $s: 5x-12y=0$
b) $r: 3x+4y-1=0$; $s: 5x+12y-2=0$.

La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus lados, es decir, si $P(x,y)$ es un punto de una bisectriz, entonces $d(P,r)=d(P,s)$.

a) $d(P,r)=d(P,s) \quad \rightarrow \quad \frac{|8x+6y-5|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{|5x-12y|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}; \quad \frac{|8x+6y-5|}{10}=\frac{|5x-12y|}{13};$

$\frac{8x+6y-5}{10}=\pm\frac{5x-12y}{13}$, de donde obtenemos las ecuaciones de las dos bisectrices:

– Primera bisectriz: $\frac{8x+6y-5}{10}=\frac{5x-12y}{13}; \quad 104x+78y-65=50x-120y;$ $54x+198y-65=0$.

– Segunda bisectriz: $\frac{8x+6y-5}{10}=-\frac{5x-12y}{13}; \quad 104x+78y-65=-50x+120y;$ $154x-42y-65=0$,

b) $d(P,r)=d(P,s) \quad \rightarrow \frac{|3x+4y-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|5x+12y-2|}{\sqrt{5^2+12^2}}; \quad \frac{|3x+4y-1|}{5}=\frac{|5x+12y-2|}{13};$

$\frac{3x+4y-1}{5}=\pm\frac{5x+12y-2}{13}$, de donde obtenemos las ecuaciones de las dos bisectrices:

– Primera bisetriz: $\frac{3x+4y-1}{5}=\frac{5x+12y-2}{13}; \quad 39x+52y-13=25x+60y-10;$ $14x-8y-3=0$.

– Segunda bisectriz: $\frac{3x+4y-1}{5}=-\frac{5x+12y-2}{13}; \; 64x+112y-23=0$.

64. Halla las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por la recta $r: 3x-4y-3=0$ con el eje de abscisas.

$OX: y=0$.

La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados:

Si $P(x,y)$ es un punto de una bisectriz entonces $d(P,r)=d(P,OX)$; $\frac{|3x-4y-3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|y|}{\sqrt{0^2+1^2}}; \; \frac{|3x-4y-3|}{5}=|y|; \; \frac{3x-4y-3}{5}=\pm y$.

Tenemos dos posibilidades, que van a dar lugar a las ecuaciones de las dos bisectrices:

Primera bisetriz: $\frac{3x-4y-3}{5}=y; \; 3x-4y-3=5y; \; 3x-9y-3=0; \; x-3y-1=0$.

Segunda bisectriz: $\frac{3x-4y-3}{5}=-y; \; 3x-4y-3=-5y; \; 3x+y-3=0$.

65. Sea el triángulo ABC de vértices $A(5,2)$, $B(7,4)$ y $C(0,-6)$. Se pide:

a) Ecuaciones de las medianas del triángulo.
b) Hallar las coordenadas del punto G de intersección de las medianas correspondientes a los vértices A y B y comprobar que la otra mediana pasa también por el punto G.

– La mediana de vértice A (m_A) es la recta que pasa por el punto A y por el punto medio del lado BC: $A' = \text{p.m.}BC = \left(\frac{7+0}{2}, \frac{4-6}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, -1\right)$.

$\vec{m}_A = \vec{AA'} = \left(\frac{7}{2} - 5, -1-2\right) = \left(-\frac{3}{2}, -3\right) \approx (1,2)$.

$m_A: -2(x-5) + 1(y-2) = 0$; $m_A: -2x + y + 8 = 0$.

– La mediana de vértice B (m_B) es la recta que pasa por el punto B y por el punto medio del lado AC: $B' = \text{p.m.}AC = \left(\frac{5+0}{2}, \frac{2-6}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, -2\right)$.

$\vec{m}_B = \vec{BB'} = \left(\frac{5}{2} - 7, -2-4\right) = \left(-\frac{9}{2}, -6\right) \approx (3,4)$.

$m_B: -4(x-7) + 3(y-4) = 0$; $m_B: -4x + 3y + 16 = 0$.

– La mediana de vértice C (m_C) es la recta que pasa por el punto C y por el punto medio del lado AB: $C' = \text{p.m.}AB = \left(\frac{5+7}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (6,3)$.

$\vec{m}_C = \vec{CC'} = (6-0, 3-(-6)) = (6,9) \approx (2,3)$.

$m_C: -3(x-0) + 2(y+6) = 0$; $m_C: -3x + 2y + 12 = 0$.

– Calculamos el punto $G = m_A \cap m_B$:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x - y - 8 & = & 0 \\ 4x - 3y - 16 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Despejamos en la primera ecuación: $y = 2x - 8$.
Sustituimos en la segunda ecuación: $4x - 3(2x-8) - 16 = 0$; $4x - 6x + 24 - 16 = 0$; $-2x + 8 = 0$; $x = 4$.

Luego $y = 2 \cdot 4 - 8 = 0$.

Y por tanto $G(4,0)$.

– ¿$G \in m_C$?:
Comprobamos que $G(4,0)$ verifica la ecuación $m_C: -3x + 2y + 12 = 0$: $3 \cdot 4 - 2 \cdot 0 - 12 = 0$: cierto, luego $G \in m_C$.+

66. Hallar las coordenadas del ortocentro del triángulo de vértices $A(6,3)$, $B(2,1)$ y $C(8,-7)$.

Las alturas de un triángulo se cortan en un único punto llamado ortocentro. Por tanto, basta calcular el punto de corte de dos alturas cualesquiera del triángulo.

- La altura de vértice A (h_A) es la recta que pasa por $A(6,3)$ y es perpendicular al lado BC.
  $\vec{BC} = (8-2, -7-1) = (6,-8) \approx (3,-4) \perp \vec{h}_A = (4,3)$.
  $h_A : -3(x-6) + 4(y-3) = 0$; $h_A : -3x + 4y + 6 = 0$.

- La altura de vértice B (h_B) es la recta que pasa por $B(2,1)$ y es perpendicular al lado AC.
  $\vec{AC} = (8-6, -7-3) = (2,-10) \approx (1,-5) \perp \vec{h}_B = (5,1)$.
  $h_B : -1(x-2) + 5(y-1) = 0$; $h_B : -x + 5y - 3 = 0$.

- $O = h_A \cap h_B$:

$$\left.\begin{aligned} -3x+4y+6 &= 0 \\ -x+5y-3 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Despejamos en la segunda ecuación: $x = 5y - 3$.

Sustituimos en la primera ecuación: $-3(5y-3) + 4y + 6 = 0$; $-15y + 9 + 4y + 6 = 0$; $-11y + 15 = 0$; $y = \dfrac{15}{11}$.

Luego $x = 5 \cdot \dfrac{15}{11} - 3 = \dfrac{42}{11}$.

Y por tanto, $O\left(\dfrac{42}{11}, \dfrac{15}{11}\right)$.

67. Halla las coordenadas del ortocentro del triángulo de vértices $(2,2)$, $(8,2)$ y $(5,8)$.

El ortocentro de un triángulo es el punto de corte de sus alturas:

- La altura de vértice A (h_A) es la recta que pasa por $A(2,2)$ y es perpendicular al lado BC.
  $\vec{BC} = (-3,6) \approx (-1,2) \perp \vec{h}_A = (2,1)$.
  $h_A : 1(x-2) - 2(y-2) = 0$; $h_A : x - 2y + 2 = 0$.

- La altura de vértice B (h_B) es la recta que pasa por $B(8,2)$ y es perpendicular al lado AC.
  $\vec{AC} = (3,6) \approx (1,2) \perp \vec{h}_B = (-2,1)$.

$h_B : 1(x-8)+2(y-2)=0$; $h_B : x+2y-12=0$.

– $O = h_A \cap h_B$

$$\left.\begin{array}{rcl} x-2y+2 & = & 0 \\ x+2y-12 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Sumamos ambas ecuaciones: $2x-10=0$; $x=5$.

Sustituimos en la primera ecuación: $5-2y+2=0$; $y=\frac{7}{2}$.

Luego $O\left(5,\frac{7}{2}\right)$.

68. Hallar las coordenadas del circuncentro del triángulo de vértices $A(2,3)$, $B(4,7)$ y $C(8,-1)$.

Las mediatrices de un triángulo se cortan en un único punto, llamado circuncentro. Basta calcular dos mediatrices del triángulo y calcular su punto de corte.

– La mediatriz del lado AB (m_{AB}) es la recta perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio:

$P = \text{p.m.}AB = \left(\frac{2+4}{2},\frac{3+7}{2}\right)=(3,5)$.

$\vec{AB}=(4-2,7-3)=(2,4)\approx(1,2)\perp\vec{m}_{AB}=(-2,1)$.

$m_{AB} : -1(x-3)-2(y-5)=0$; $m_{AB} : -x-2y+13=0$.

– La mediatriz del lado AC (m_{AC}) es la recta perpendicular al segmento AC que pasa por su punto medio.

$Q = \text{p.m.}AC = \left(\frac{2+8}{2},\frac{3-1}{2}\right)=(5,1)$.

$\vec{AC}=(8-2,-1-3)=(6,-4)\approx(3,-2)\perp\vec{m}_{AB}=(2,3)$.

$m_{AC} : -3(x-5)+2(y-1)=0$; $m_{AC} : -3x+2y+13=0$.

– $Ci = m_{AB}\cap m_{AC}$:

$$\left.\begin{array}{rcll} -x-2y+13 & = & 0 & (*) \\ -3x+2y+13 & = & 0 & (**) \end{array}\right\}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos:

$-4x+26=0$; $x=\frac{13}{2}$.

Sustituyendo en la ecuación (*):

$-\frac{13}{2}-2y+13=0$; $-2y+\frac{13}{2}=0$; $y=\frac{13}{4}$.

Luego $Ci\left(\frac{13}{2},\frac{13}{4}\right)$.

69. Halla el circuncentro del triángulo de vértices $A(-2,3)$, $B(0,1)$ y $C(2,5)$.

El circuncentro de un triángulo es el punto de corte de sus mediatrices.

– La mediatriz del lado AB (m_{AB}) es la recta perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio.

$P=\text{p.m.}AB=\left(\frac{-2+0}{2},\frac{3+1}{2}\right)=(-1,2)$.

$\vec{AB}=(0-(-2),1-3)=(2,-2)\approx(1,-1)\perp\vec{m}_{AB}=(1,1)$.

$m_{AB}:1(x+1)-1(y-2)=0$; $m_{AB}:x-y+3=0$.

– La mediatriz del lado AC (m_{AC}) es la recta perpendicular al segmento AC que pasa por su punto medio.

$Q=\text{p.m.}AC=\left(\frac{-2+2}{2},\frac{3+5}{2}\right)=(0,4)$.

$\vec{AC}=(2-(-2),5-3)=(4,2)\approx(2,1)\perp\vec{m}_{AC}=(-1,2)$.

$m_{AC}:2(x-0)+1(y-4)=0$; $m_{AC}:2x+y-4=0$.

– $Ci=m_{AB}\cap m_{AC}$.

$$\left.\begin{array}{rcl} x-y+3 & = & 0 \\ 2x+y-4 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Sumamos ambas ecuaciones: $3x-1=0$; $x=\frac{1}{3}$.

Sustituimos en la segunda ecuación: $2\cdot\frac{1}{3}+y-4=0$; $y=\frac{10}{3}$.

Luego $Ci\left(\frac{1}{3},\frac{10}{3}\right)$.

70. Halla el baricentro, G, o centro de gravedad del triángulo del ejercicio anterior. Comprueba que si los vértices de un triángulo tienen coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3), entonces las coordenadas del baricentro son $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

El baricentro es el punto de corte de las medianas:

– La mediana del vértice A (m_A) es la recta que pasa por $A(-2,3)$ y por el punto medio del lado BC.

$A' = \text{p.m.}BC = \left(\frac{0+2}{2},\frac{1+5}{2}\right) = (1,3)$.

$\vec{AA'} = (1-(-2), 3-3) = (3,0) \approx (1,0)$.

$m_A : y-3=0$.

– La mediana del vértice B (m_B) es la recta que pasa por $B(0,1)$ y por el punto medio del lado AC.

$B' = \text{p.m.}AC = \left(\frac{-2+2}{2},\frac{3+5}{2}\right) = (0,4)$.

$\vec{BB'} = (0-0, 4-1) = (0,3) \approx (0,1)$.

$m_B : x=0$

– $G = m_A \cap m_B$

$$\left.\begin{array}{rcl} y-3 & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos que $G(0,3)$.

– Comprobamos que las coordenadas de G son $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$:

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right) = \left(\frac{-2+0+2}{3},\frac{3+1+5}{3}\right) = (0,3).$$

71. Las rectas a, b, c de ecuaciones $a: 5x+y-15=0$, $b: 4x-3y+7=0$ y $c: x+4y-3=0$ determinan un triángulo ABC. Calcular las coordenadas de los vértices, las alturas del triángulo y su área.

– El vértice A es el punto de corte de las rectas b y c. $(A = b \cap c)$.

$$\left.\begin{array}{rcl} 4x-3y+7 & = & 0 \\ x+4y-3 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Despejamos en la segunda ecuación: $x=3-4y$.

Sustituimos en la primera ecuación: $4(3-4y)-3y+7=0$; $12-16y-3y+7=0$; $-19y+19=0$; $y=1$.

Luego $x=3-4\cdot 1=-1$.

Y por tanto $A\,(-1,1)$.

- El vértice B es el punto de corte de las rectas a y c. $(B=a\cap c)$.

$$\left.\begin{array}{rcl} 5x+y-15 & = & 0 \\ x+4y-3 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Despejamos en la segunda ecuación: $x=3-4y$.

Sustituimos en la primera ecuación: $5(3-4y)+y-15=0$; $15-20y+y-15=0$; $-19y=0$; $y=0$.

Luego $x=3-4\cdot 0=3$.

Y por tanto, $B\,(3,0)$.

- El vértice C es el punto de corte de las rectas a y b. $(C=a\cap b)$.

$$\left.\begin{array}{rcl} 5x+y-15 & = & 0 \\ 4x-3y+7 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Despejamos en la primera ecuación: $y=15-5x$.

Sustituimos en la segunda ecuación: $4x-3(15-5x)+7=0$; $4x-45+15x+7=0$; $19x-38=0$; $x=2$.

Luego $y=15-5\cdot 2=5$.

Y por tanto, $C\,(2,5)$.

- La altura de vértice A (h_A) es la recta que pasa por $A\,(-1,1)$ y es perpendicular al lado BC.
  $\vec{BC}=\vec{a}=(-1,5)\perp\vec{h}_A=(5,1)$.
  $h_A:-1(x+1)+5(y-1)=0$; $h_A:-x+5y-6=0$.

– La altura de vértice B (h_B) es la recta que pasa por $B(3,0)$ y es perpendicular al lado AC.

$\vec{AC} = \vec{b} = (3,4) \perp \vec{h}_B = (-4,3)$.

$h_B : -3(x-3) - 4(y-0) = 0$; $h_B : -3x - 4y + 9 = 0$.

– La altura de vértice C (h_C) es la recta que pasa por $C(2,5)$ y es perpendicular al lado AB.

$\vec{AB} = \vec{c} = (-4,1) \perp \vec{h}_C = (1,4)$.

$h_C : -4(x-2) + 1(y-5) = 0$; $h_C : -4x + y + 3 = 0$.

– Para calcular el área del triángulo calculamos la base y la altura:

$$\text{base} = d(B,C) = \left|\vec{BC}\right| = \left|(-1,5)\right| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}.$$

$$\text{altura} = d(A,a) = \frac{|5\cdot(-1) + 1 - 15|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{19}{\sqrt{26}}.$$

$$S = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{\sqrt{26} \cdot \frac{19}{\sqrt{26}}}{2} = \frac{19}{2}\, u^2.$$

72. Dado el triángulo de vértices $A(2,-1)$, $B(3,-1)$ y $C(0,5)$, calcular:

a) Las ecuaciones de las medianas del triángulo.
b) Las ecuaciones de las mediatrices del triángulo.
c) Las ecuaciones de las alturas del triángulo.
d) El ortocentro.
e) El baricentro.
f) El circuncentro.
g) El área.

a)

– La mediana del vértice A (m_A) es la recta que pasa por $A(2,-1)$ y por el punto medio del lado BC.

$$A' = \text{p.m.}BC = \left(\frac{3+0}{2}, \frac{-1+5}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 2\right).$$

$$\vec{AA'} = \left(\frac{3}{2} - 2, 2 + 1\right) = \left(-\frac{1}{2}, 3\right) \approx (-1,6).$$

$m_A : -6(x-2) - 1(y+1) = 0$; $m_A : -6x - y + 11 = 0$.

– La mediana del vértice B (m_B) es la recta que pasa por $B(3,-1)$ y por el punto medio del lado AC.

$$B' = \text{p.m.}\,AC = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{-1+5}{2}\right) = (1,2).$$

$$\vec{BB'} = (1-3, 2+1) = (-2,3).$$

$$m_B : -3(x-3) - 2(y+1) = 0;\; m_B : -3x - 2y + 7 = 0.$$

- La mediana del vértice C (m_c) es la recta que pasa por $C(0,5)$ y por el punto medio del lado AB.

$$C' = \text{p.m.}\,AB = \left(\frac{2+3}{2}, \frac{-1-1}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, -1\right).$$

$$\vec{CC'} = \left(\frac{5}{2} - 0, -1-5\right) = \left(\frac{5}{2}, -6\right) \approx (5,-12).$$

$$m_C : 12(x-0) + 5(y-5) = 0;\; m_C : 12x + 5y - 25 = 0.$$

b)

- La mediatriz del lado AB (m_{AB}) es la recta perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio.

$$C' = \text{p.m.}\,AB = \left(\frac{5}{2}, -1\right).$$

$$\vec{AB} = (3-2, -1+1) = (1,0) \perp \vec{m}_{AB} = (0,1).$$

$$m_{AB} : -1\left(x - \frac{5}{2}\right) = 0;\; m_{AB} : 2x - 5 = 0.$$

- La mediatriz del lado AC (m_{AC}) es la recta perpendicular al segmento AC que pasa por su punto medio.

$$B' = \text{p.m.}\,AC = (1,2).$$

$$\vec{AC} = (0-2, 5+1) = (-2,6) \approx (-1,3) \perp \vec{m}_{AC} = (3,1).$$

$$m_{AC} : -1(x-1) + 3(y-2) = 0;\; m_{AC} : -x + 3y - 5 = 0.$$

- La mediatriz del lado BC (m_{BC}) es la recta perpendicular al segmento BC que pasa por su punto medio.

$$A' = \text{p.m.}\,BC = \left(\frac{3}{2}, 2\right).$$

$$\vec{BC} = (0-3, 5+1) = (-3,6) \approx (-1,2) \perp \vec{m}_{BC} = (2,1).$$

$$m_{BC}: -1\left(x-\frac{3}{2}\right)+2(y-2)=0;\ m_{BC}: -x+2y-\frac{5}{2}=0;\ m_{BC}: 2x-4y+5=0.$$

c)

– La altura de vértice A (h_A) es la recta que pasa por $A(2,-1)$ y es perpendicular al lado BC.

$$\vec{BC} \approx (-1,2) \perp \vec{h}_A = (2,1).$$

$$h_A: -1(x-2)+2(y+1)=0;\ h_A: -x+2y+4=0.$$

– La altura de vértice B (h_B) es la recta que pasa por $B(3,-1)$ y es perpendicular al lado AC.

$$\vec{AC} \approx (-1,3) \perp \vec{h}_B = (3,1).$$

$$h_B: -1(x-3)+3(y+1)=0;\ h_B: -x+3y+6=0.$$

– La altura de vértice C (h_C) es la recta que pasa por $C(0,5)$ y es perpendicular al lado AB.

$$\vec{AB} = (1,0) \perp \vec{h}_C = (0,1).$$

$$h_C: -1(x-0)=0;\ h_C: x=0.$$

d) $O = h_A \cap h_C$:

$$\left.\begin{array}{rcl} -x+2y+4 & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array}\right\}$$

Sumando ambas ecuaciones: $2y+4=0;\ y=-2$.

Luego $O(0,-2)$.

e) $G = m_A \cap m_B$:

$$\left.\begin{array}{rcl} -6x-y+11 & = & 0 \\ -3x-2y+7 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Despejamos en la primera ecuación: $y=-6x+11$.

Sustituimos en la segunda ecuación: $-3x-2(-6x+11)+7=0$; $-3x+12x-22+7=0$; $9x-15=0$; $x=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$.

Por tanto, $y = -6 \cdot \frac{5}{3} + 11 = 1$.

Luego $G\left(\frac{5}{3}, 1\right)$.

Otra forma de calcular el baricentro:

$$G = \frac{A + B + C}{3} = \left(\frac{2 + 3 + 0}{3}, \frac{-1 - 1 + 5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, 1\right).$$

f) $Ci = m_{AB} \cap m_{AC}$.

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x - 5 & = & 0 \\ x - 3y + 5 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Despejamos en la primera ecuación: $x = \frac{5}{2}$.

Sustituimos en la segunda ecuación: $\frac{5}{2} - 3y + 5 = 0$; $-3y + \frac{15}{2} = 0$; $y = \frac{5}{2}$.

g) $S = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$.

$\text{base} = d(B, C) = \left|\vec{BC}\right| = \left|(-3, 6)\right| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Sea a la recta que pasa por B y C:

$\vec{a} = \vec{BC} = (-3, 6) \approx (-1, 2)$.

$a : -2(x - 0) - 1(y - 5) = 0$; $a : -2x - y + 5 = 0$.

$\text{altura} = d(A, a) = \frac{\left|-2 \cdot 2 - (-1) + 5\right|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Por tanto, $S = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{3\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}}{2} = 3\ u^2$.

73. Se dan los puntos $A(0, 4)$, $B(4, 0)$ y $C(-3, 0)$.

a) Calcula las coordenadas del centro de gravedad, del ortocentro y del circuncentro.

b) Comprueba que los tres puntos están alineados.

a)

- El centro de gravedad es el baricentro: $G\left(\dfrac{0+4-3}{3},\dfrac{4+0+0}{3}\right)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3}\right)$.

- El ortocentro es el punto de corte de las alturas:

  - La altura de vértice A (h_A) es la recta que pasa por $A(0,4)$ y es perpendicular al lado BC.

    $\vec{BC}=(-7,0)\approx(1,0)\perp\vec{h}_A=(0,1)$.

    $h_A: 1(x-0)=0$; $h_A: x=0$.

  - La altura de vértice B (h_B) es la recta que pasa por $B(4,0)$ y es perpendicular al lado AC.

    $\vec{AC}=(-3,-4)\approx(3,4)\perp\vec{h}_B=(-4,3)$.

    $h_B: 3(x-4)+4(y-0)=0$; $h_B: 3x+4y-12=0$.

  - $O=h_A\cap h_B$:

    $$\left.\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ 3x+4y-12 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

    Sustituyendo la primera ecuación en la segunda: $4y-12=0$; $y=3$.

    Luego $O(0,3)$.

- El circuncentro es el punto de corte de las mediatrices:

  - La mediatriz del lado AB (m_{AB}) es la recta perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio:

    $P=\text{p.m.}AB=\left(\dfrac{0+4}{2},\dfrac{4+0}{2}\right)=(2,2)$.
    $\vec{AB}=(4,-4)\approx(1,-1)\perp\vec{m}_{AB}=(1,1)$.
    $m_{AB}: 1(x-2)-1(y-2)=0$; $m_{AB}: x-y=0$.

  - La mediatriz del lado AC (m_{AC}) es la recta perpendicular al segmento AC que pasa por su punto medio:

    $Q=\text{p.m.}AC=\left(\dfrac{0-3}{2},\dfrac{4+0}{2}\right)=\left(-\dfrac{3}{2},2\right)$.
    $\vec{AC}=(-3,-4)\approx(3,4)\perp\vec{m}_{AC}=(-4,3)$.
    $m_{AC}: 3\left(x+\dfrac{3}{2}\right)+4(y-2)=0$; $m_{AC}: 3x+4y-\dfrac{7}{2}=0$; $m_{AC}: 6x+8y-7=0$.

– $Ci = m_{AB} \cap m_{AC}$.

$$\left.\begin{array}{rcl} x - y & = & 0 \\ 6x + 8y - 7 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Despejamos en la primera ecuación: $x = y$.

Sustituimos en la segunda ecuación: $6x + 8x - 7 = 0$; $x = \frac{1}{2}$.

Luego $Ci\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b) Hay que comprobar que los puntos $G\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $O(0,3)$ y $Ci\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ están alineados:

– Sea r la recta que pasa por G y por O.

$\vec{GO}\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right) \approx (-1,5)$.

$r: 5(x-0) + 1(y-3) = 0$; $r: 5x + y - 3 = 0$.

– $¿Ci \in r?$:

$5 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 3 = 0$, luego $Ci \in r$ y por tanto los tres puntos están alineados.