1.-VECTORES EN EL PLANO.

Un **vector fijo** es un segmento orientado. Se representa por $\overrightarrow{AB}$. El punto A es el origen, y el punto B, el extremo.

Las características de un vector $\overrightarrow{AB}$ son:
- a) El **módulo**: es su longitud. Se representa por $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.
- b) La **dirección**: es la dirección de la recta que lo contiene. Dos vectores tienen la misma dirección si están situados sobre la misma recta o rectas paralelas.
- c) El **sentido**: es el que va del origen al extremo.

Un **vector libre** es un vector fijo $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ que representa a todos los vectores que tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

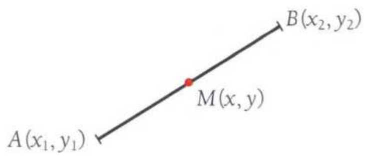
Coordenadas de un vector definido por dos puntos. Si $P(p_1,p_2)$ y $Q(q_1,q_2)$ se tiene: $\overrightarrow{PQ}=\vec{q}-\vec{p}=(q_1,q_2)-(p_1,p_2)$ $=(q_1-p_1,q_2-p_2)$

Dado el vector $\vec{v}=(v_1,v_2)$, su módulo es: $|\vec{v}|=\sqrt{{v_1}^2+{v_2}^2}$.

Un **vector unitario** tiene de módulo uno. Para hallar un vector unitario en la dirección del vector $\vec{v}=(v_1,v_2)$, se dividen sus coordenadas por el módulo de $\vec{v}$: $\vec{u}=\left(\dfrac{v_1}{|\vec{v}|},\dfrac{v_2}{|\vec{v}|}\right)$.

Determinación de puntos en el plano.

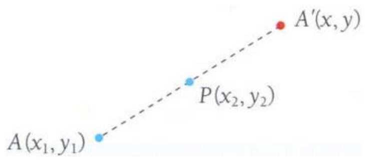
Para determinar puntos en el plano, se aplican las operaciones con vectores a los vectores de posición.



Si el punto M es el **punto medio** de $\overrightarrow{AB}$ entonces:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\rightarrow(x-x_1,y-y_1)=\frac{1}{2}(x_2-x_1,y_2-y_1)\rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2}\\[2mm] y=\dfrac{y_1+y_2}{2}\end{cases}$$

Sea A' el **punto simétrico** a A con respecto a P.



Como el punto P es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$ entonces:

$$(x_2,y_2)=\left(\frac{x_1+x}{2},\frac{y_1+y}{2}\right)\rightarrow\begin{cases}x_2=\dfrac{x_1+x}{2}\rightarrow x=2x_2-x_1\\[2mm] y_2=\dfrac{y_1+y}{2}\rightarrow y=2y_2-y_1\end{cases}$$

Producto escalar: Operación que permite medir en el plano (longitudes y ángulos).

El producto escalar de dos vectores es el número que se obtiene al multiplicar sus módulos por el coseno del ángulo que forman. $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$

Consecuencias que se derivan:

- Si dos vectores tienen la misma dirección
  - y mismo sentido: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos 0^\circ=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$
  - y distinto sentido: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos 180^\circ=-|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$
- Dos vectores no nulos son perpendiculares (u ortogonales) si y sólo si su producto escalar es cero.

$\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v}=0$ siendo $\vec{u}\neq 0$ y $\vec{v}\neq 0$

Expresión analítica del producto escalar (en una base ortonormal):

El producto escalar de dos vectores $\vec{u}=(u_1,u_2)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2)$ es la suma del producto de sus coordenadas:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2$$

2.-ECUACIONES DE LA RECTA EN EL PLANO.

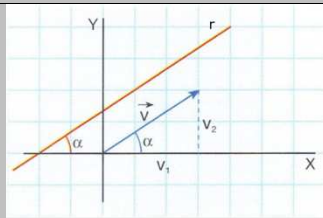
Conocido un punto $A(a_1,a_2)$ y un vector director $\vec{v}=(v_1,v_2)$

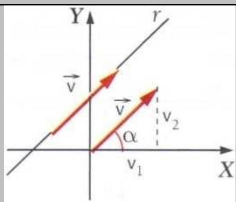
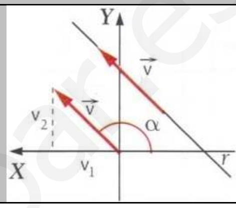
(Un vector director de una recta es cualquier vector que está en la recta o es paralelo a ella)

ECUACIÓN DE LA RECTA		EJEMPLO $A(2,-1)$ $\vec{v}=(-3,1)$
Ecuación vectorial	$\vec{p}=\vec{a}+\lambda\vec{v}$ con $\lambda\in\mathbb{R}$ $(x,y)=(a_1,a_2)+t(v_1,v_2)$	$(x,y)=(2,-1)+\lambda(-3,1)$ con $\lambda\in\mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas	$\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} x = \ \ 2 - 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$
Ecuación continua	$\dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{y - a_2}{v_2}$	$\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y+1}{1}$
Ecuación punto-pendiente	$y - a_2 = m(x - a_1)$ siendo $m = \dfrac{v_2}{v_1}$	$y + 1 = -\dfrac{1}{3}(x-2)$

La pendiente de una recta determina su inclinación.

La pendiente de una recta coincide con la tangente del ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de abscisas.		Pendiente $m = \dfrac{v_2}{v_1} = tg\alpha$

Si la recta es creciente $0^o < \alpha < 90^o$		Si la recta es decreciente $90^o < \alpha < 180^o$	
	$tg\alpha > 0$ $m > 0$		$tg\alpha < 0$ $m < 0$

Ecuación explícita	$y = mx + n$	m:pendiente de la recta n:ordenada en el origen	$y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}$
Ecuación general	$Ax + By + C = 0$		$x + 3y + 1 = 0$

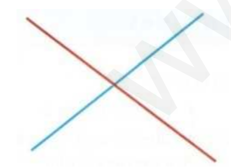
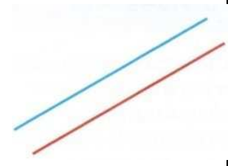
Conocidos dos puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ *"Dos puntos <u>distintos</u> de* $\mathbb{R}^2$ *determinan una recta y sólo una que los contiene"*. Se toma uno de los puntos $A(3,1)$ o $B(5,4)$, y, como vector director, el vector $\overrightarrow{AB}$.

Paso de una ecuación a otra. Para pasar de una ecuación a otra hay que hallar un punto y un vector director. Si nos dan la ecuación general, previamente se hallan dos soluciones particulares.

Incidencia entre punto y recta. Un punto está en una recta si verifica su ecuación.

3.-POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS EN EL PLANO.

Consideremos $r: \begin{cases} \text{Sea } \vec{v}_r \text{ un vector director} \\ \text{Sea } m_r \text{ su pendiente} \\ \text{Sea } n_r \text{ su ordenada en el origen} \\ \text{Sea } A_r x + B_r y + C_r = 0 \text{ su ecuación general} \end{cases}$ $s: \begin{cases} \text{Sea } \vec{v}_s \text{ un vector director} \\ \text{Sea } m_s \text{ su pendiente} \\ \text{Sea } n_s \text{ su ordenada en el origen} \\ \text{Sea } A_s x + B_s y + C_s = 0 \text{ su ecuación general} \end{cases}$

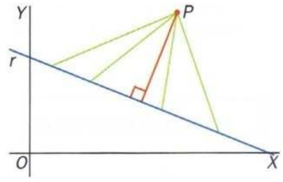
POSICIONES		VECTORES DIRECTORES	PENDIENTES	ECUACIÓN EXPLÍCITA	ECUACIÓN GENERAL
SECANTES		$\vec{v}_r \neq \beta \vec{v}_s$ (No proporcionales)	$m_r \neq m_s$	$m_r \neq m_s$	$\dfrac{A_r}{A_s} \neq \dfrac{B_r}{B_s}$
PARALELAS		$\vec{v}_r = \beta \vec{v}_s$ (Proporcionales)	$m_r = m_s$	$m_r = m_s$ $n_r \neq n_s$	$\dfrac{A_r}{A_s} = \dfrac{B_r}{B_s} \neq \dfrac{C_r}{C_s}$
COINCIDENTES				$m_r = m_s$ $n_r = n_s$	$\dfrac{A_r}{A_s} = \dfrac{B_r}{B_s} = \dfrac{C_r}{C_s}$

4.-DISTANCIAS.

4.1.-Distancia entre dos puntos. Sean P y Q dos puntos del plano, entonces $d(P,Q)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|$

4.2.-Distancia de un punto a una recta.

Dados un punto $P(p_1, p_2)$ y una recta $r: Ax+By+C=0$, se entiende por **distancia del punto P a la recta r** la mínima distancia entre dicho punto y cualquier punto de la recta.

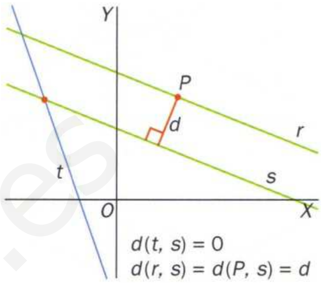


$$d(P,r)=\frac{|Ap_1+Bp_2+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

4.3.-Distancia entre dos rectas.

Se entiende por distancia entre dos rectas a la menor distancia que se puede obtener al tomar un punto de cada una de ellas.

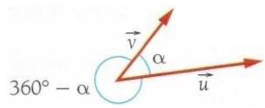
- Si las rectas son secantes o coincidentes, la distancia entre ellas es cero.
- Si las rectas son paralelas, se toma un punto de una de ellas y se calcula su distancia a la otra recta.



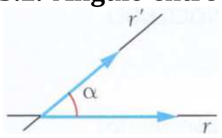
5.- ÁNGULOS ENTRE RECTAS.

5.1.- Ángulo que forman dos vectores: $\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$

Para cada valor de a, tal que $-1\le a\le 1$, existen dos ángulos cuyo coseno vale a: $\cos\alpha = a$ y $\cos(360^{o}-\alpha)=a$. Consideraremos que el ángulo entre los dos vectores es el menor de éstos.



5.2.-Ángulo entre dos rectas.



Se llama ángulo entre dos rectas al menor ángulo que forman las rectas al cortarse. Este ángulo coincide con el ángulo de sus vectores directores.

Las pendientes de dos rectas perpendiculares son inversas y opuestas.