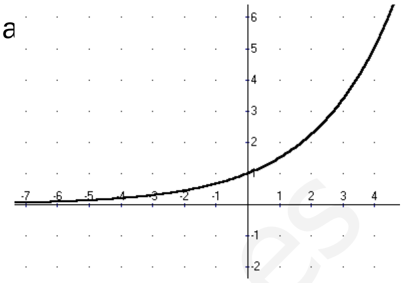
LA FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA.

Función exponencial

La función exponencial es de la forma $f(x) = a^x$, tal que $a > 0$, a
El valor a se llama base de la función exponencial.

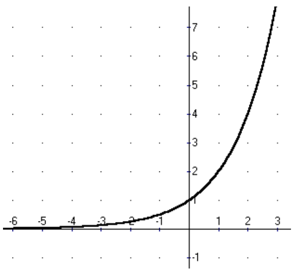
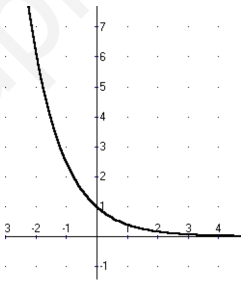


$y = 1'5^x$

Propiedades:

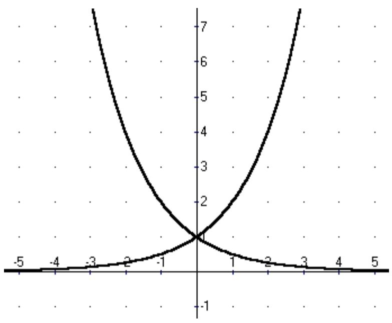
- El dominio es R.
- El recorrido es $]0,+\infty]$
- La función es continua en R.
- $f(0) = 1$
- Si $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$,

  es decir, si $a^x = a^y$, entonces $x = y$
- $f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$
-

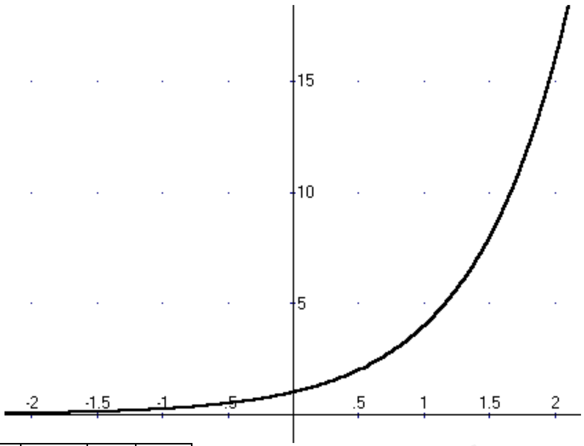
Si $a > 1$ la función es creciente	Si $0 < a < 1$ la función es decreciente
 $y = 2^x$	 $y = 0.4^x$

- Las gráficas de las funciones $f(x) = a^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ son simétricas respecto del eje de ordenadas OY

$y = 0.5^x$ $y = 2^x$



Ejercicio 1:
Estudia y representa la función $f(x) = 4^x$.



Es una función exponencial de base $a = 4$
El dominio es R
El recorrido es $]0,+\infty]$
Es una función creciente.
La función es continua en R

Construimos una tabla de valores de la función:

x	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5
y	0,03125	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16	32

Ejercicio 2:
Resuelve la ecuación exponencial: $3^{x-1} = 729$
Intentaremos que las dos partes de la ecuación sean dos potencias de la misma base:
$729 = 3^6$
$3^{x-1} = 3^6$
Igualando los exponentes:
$x - 1 = 6$
La solución de la ecuación es $x = 7$

Nota: para resolver ecuaciones donde no podamos obtener a las dos partes de la igualdad potencias de la misma base, se aplicarán logaritmos. Por ejemplo $2^x = 3$

Ejercicio 3:
Resuelve la ecuación exponencial: $3^{2x} - 3^{x+1} - 3^x = 45$
Para resolver este tipo de ecuaciones utilizaremos incógnitas auxiliares:
Efectuamos el cambio $y = 3^x$
Entonces: $3^{2x} = \left(3^x\right)^2 = y^2$, $3^{x+1} = 3^x \cdot 3 = 3y$
La ecuación inicial se transformaría en la siguiente:
$y^2 - 3y - y = 45$
Resolvamos la ecuación de segundo grado:
$y^2 - 4y - 45 = 0$, $y = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 180}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{196}}{2} = \dfrac{4 \pm 14}{2}$, $y = 9$, $y = -5$
Deshacemos el cambio:
$y = 3^x = 9$, entonces $3^x = 3^2$, igualando exponentes, $x = 2$
$y = 3^x = -5$, la ecuación $3^x = -5$ no tiene solución, la función exponencial siempre es positiva.

Ejercicios propuestos:

1. Con la ayuda de la calculadora, efectúa las siguientes operaciones:

a) $2^{1/3} =$
b) $2^{-2/5} =$
c) $2^{1'3} =$
d) $2^{-2'7} =$
e) $2^{\sqrt{3}} =$
f) $2^{-\sqrt{5}} =$
g) $2^{\pi} =$
h) $2^{-\pi} =$
i) $2^{2+\sqrt{2}} =$

2. La calculadora tiene dos funciones exponenciales $\boxed{10^x}$ $\boxed{e^x}$
Con la ayuda de la calculadora, efectúa las siguientes operaciones:

a) $10^{1'3} =$
b) $10^{-3'6} =$
c) $10^{5/4} =$
d) $10^{-7/3} =$
e) $10^{\sqrt{10}} =$
f) $10^{-\sqrt{3}} =$
g) $e^{2'3} =$
h) $e^{-1'6} =$
i) $e^{3/4} =$
j) $e^{-5/3} =$
k) $e^{\sqrt{2}} =$
l) $e^{-\sqrt{5}} =$

3. Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2^x$
b) $g(x) = 3^x$
c) $h(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$
d) $m(x) = 2'5^x$
e) $n(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
f) $p(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
g) $q(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
h) $r(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

4. Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = 10^x$
b) $g(x) = e^x$
c) $h(x) = 2 \cdot 10^x$
d) $m(x) = 5 \cdot e^x$
e) $n(x) = -3 \cdot 10^x$
f) $p(x) = -5 \cdot e^x$
g) $q(x) = 0'1^x$
h) $r(x) = 100^x$

5. La mayoría de las bacterias se reproducen por bipartición, es decir, una célula madre se divide en dos células hijas. Supongamos que un tipo de bacterias necesita 1 hora para duplicarse. Completa la tabla siguiente. Define la función y represéntala gráficamente.

x(horas)	0	1	2	3	4	5	6	x
Y(bacterias)								

6. La presión atmosférica varia según la altura con la siguiente fórmula $P(x) = 0'9^{x}$, donde x es la altura en kilómetros y P(x) la presión atmosférica en atmósferas.
Representa la función.

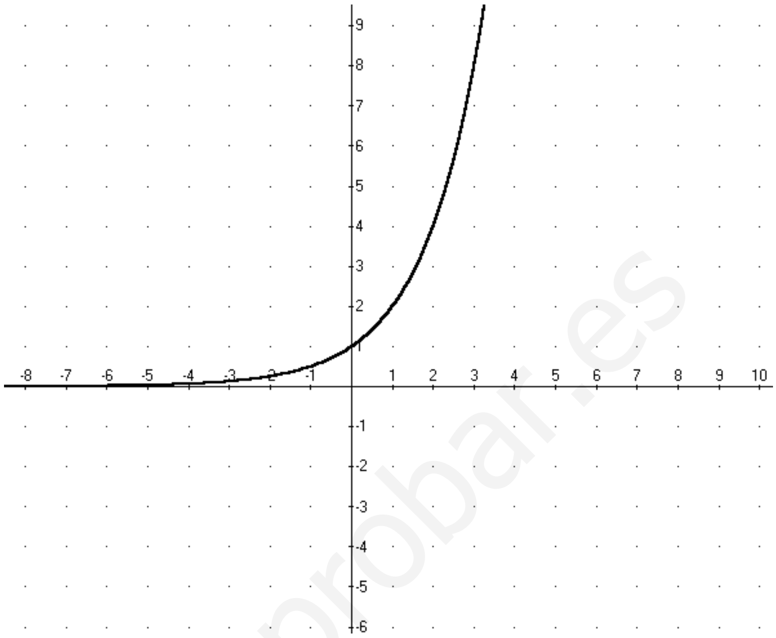
7. Dada la función $f(x) = 2^{x}$
Sin utilizar tablas de valores dibuja las funciones:

$g(x) = 2^{x} + 3$

$h(x) = 2^{x} - 4$

$m(x) = 2^{x+2}$

$n(x) = 2^{x-1}$



8. Dada la función $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$

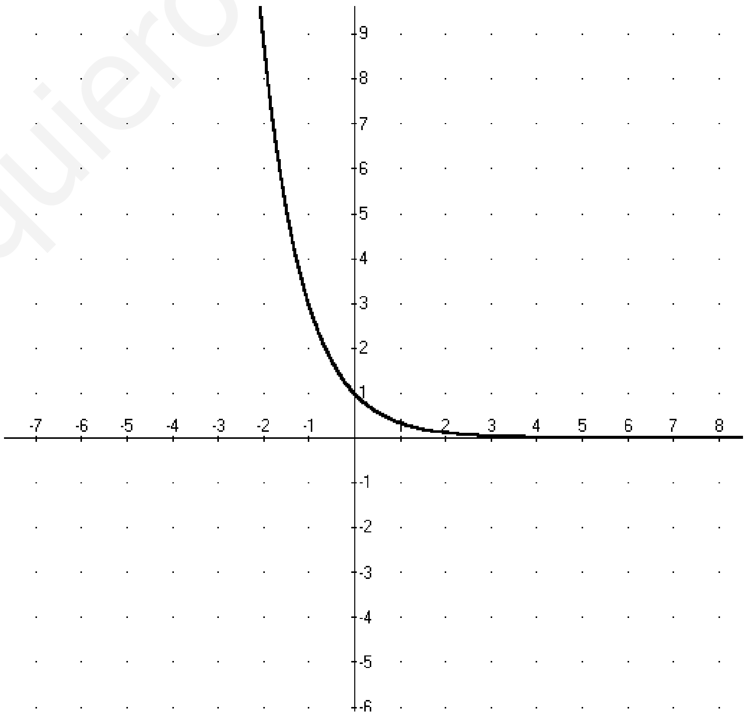
Sin utilizar tablas de valores dibuja las funciones:

$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x} + 4$

$h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x} - 3$

$m(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$

$n(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$



9. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $7^{x+1} = 7^{3x+2}$
b) $5^{x+3} = 5$
c) $2^{x} = 1024$
d) $2^{3x+1} = 1$
e) $3^{5x} = 81$
f) $3^{2x-1} = \frac{1}{9}$
g) $3^{x} = \sqrt{3}$
h) $7^{x-1} = 49^{3x-2}$
i) $25^{2x} = 125^{x-1}$
j) $2^{x-1} + 2^{x} + 2^{x+1} = 14$
k) $7^{x} + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 2793$
l) $3^{x+1} + 3^{x+2} - 3^{x+3} = -5$
m) $3 \cdot 2^{x} - 5 \cdot 2^{x-2} = 14$
n) $2 \cdot 3^{x+3} + 4 \cdot 3^{x+4} = 14$
o) $3^{2x} - 3^{x+1} = 54$
p) $2^{2x+2} + 2^{x+3} = 320$
q) $4^{x} - 2^{x+1} - 3 \cdot 2^{x} = 24$
r) $9^{x} - 5 \cdot 3^{x+2} - 7 \cdot 3^{x} = 2349$

La función logarítmica

Sea $a > 0$, $a \neq 1$
Definimos logaritmo base a de x y lo representamos $\log_a x$ al valor y $\log_a x = y$ tal que:
$a^{y} = x$, es decir, la operación inversa de la exponencial.

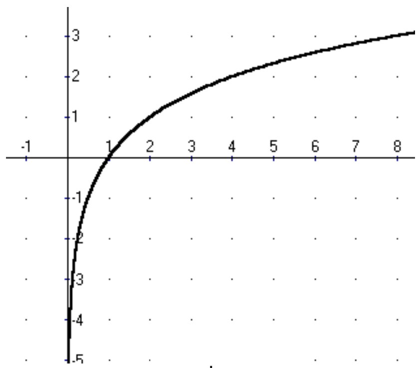
Ejercicio 4:
Calcula $\log_2 8$, $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$, $\log_7 \sqrt[3]{49}$

$\log_2 8 = y$, $2^{y} = 8$, $2^{y} = 2^{3}$, por tanto, $y = 3$. Entonces, $\log_2 8 = 3$

$\log_3\left(\frac{1}{81}\right) = y$, $3^{y} = \frac{1}{81}$, $3^{y} = 3^{-4}$, por tanto, $y = -4$. Entonces $\log_3\left(\frac{1}{81}\right) = -4$

$\log_7 \sqrt[3]{49} = y$, $7^{y} = \sqrt[3]{49}$, $7^{y} = 7^{2/3}$, por tanto, $y = \frac{2}{3}$. Entonces $\log_7 \sqrt[3]{49} = \frac{2}{3}$

Función logarítmica:
A la función $f(x) = \log_a x$, tal que $a > 0$, $a \neq 1$
Se llama función logarítmica

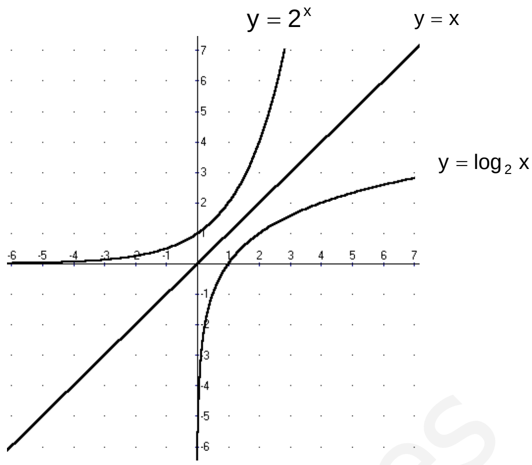


$y = \log_2 x$

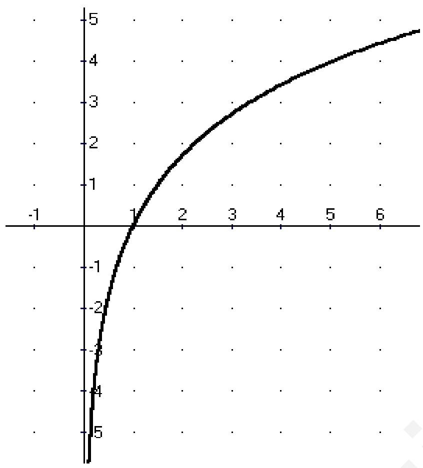
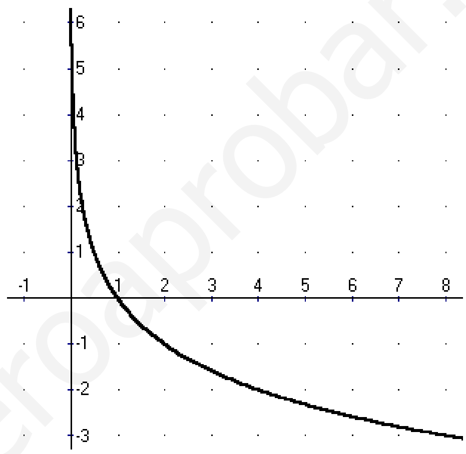
Propiedades del logaritmos y la función logarítmica

- El dominio de la función logarítmica es $]0,+\infty]$
- El recorrido de la función logarítmica es R.
- La función es continua en $]0,+\infty]$
- Si $\log_a x = \log_a y$, entonces, $x = y$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^{p} = p$
- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

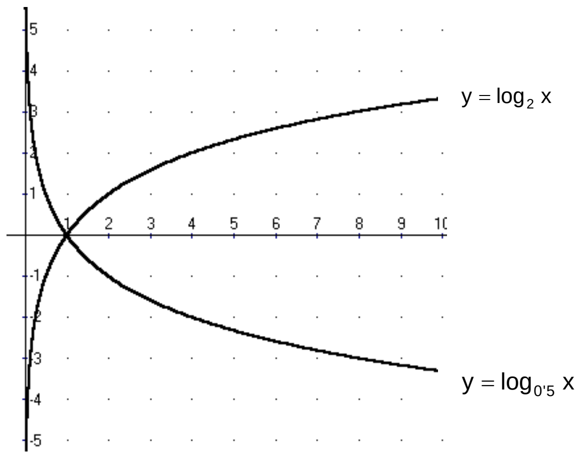
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
- La función $f(x) = \log_a x$, y la función $g(x) = a^x$ son inversas, por tanto son simétricas respecto de la recta $y = x$



-

Si $a > 1$ la función es creciente	Si $0 < a < 1$ la función es decreciente
 $y = \log_{1'5} x$	 $y = \log_{0'5} x$

- Las funciones $f(x) = \log_a x$, $g(x) = \log_{1/a} x$ son simétricas respecto del eje de abscisas OX



Uso de la calculadora.

La calculadora tiene dos funciones logarítmicas:

$\boxed{\log}$ que son los logaritmos decimales o de base 10. Escribiremos $\log x = \log_{10} x$

$\boxed{\ln}$ que son los logaritmos neperianos o de base e. Escribiremos $\ln x = \log_e x$

Calcula: $\log 25$, $\ln 3$

Con calculadoras antiguas:

Para calcular $\log 25$	25	log	1.397940009
Para calcular $\ln 3$	3	ln	1.098612289

Con calculadoras modernas:

Para calcular $\log 25$	log	25	=	1.397940009
Para calcular $\ln 3$	ln	3	=	1.098612289

Ejercicio 5:

Con la ayuda de la calculadora efectúa las siguientes operaciones:

$\log_2 3$, $\log_3 2$.

Las calculadoras sólo tienen logaritmos decimales y neperianos. Para poder calcular logaritmos de otras bases efectuaremos el cambio de base:

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0'4771}{0'3010} = 1'5850$$

$$\log_3 2 = \frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{0'6931}{1'0986} = 0'6309$$

Ejercicio 6:

Estudia y representa la función $y = \log_2 x$

Es una función logarítmica de base 2.

El dominio de la función logarítmica es $]0,+\infty]$

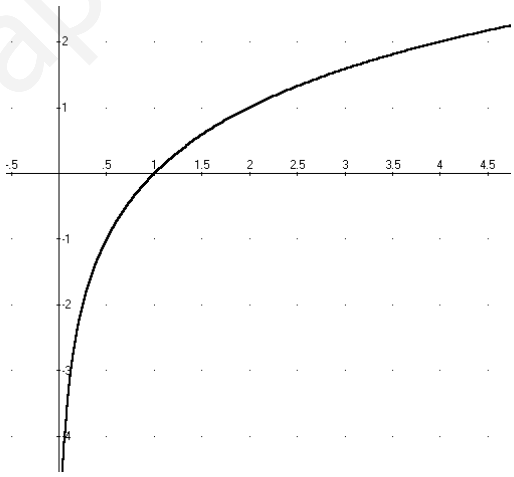
El recorrido de la función logarítmica es R.

La función es continua en $]0,+\infty]$

Es una función creciente.

Con la ayuda de la calculadora construimos una tabla de valores:

x	0'25	0'5	1	1'5	2	2'5	3	3'5	4	4'5
y	–2	–1	0	0'58	1	1'32	1'58	1'81	2	2'17



Ejercicio 7:

Resuelve la ecuación exponencial $2^x = 5$

5 no se puede poner como potencia de base 2, entonces calcularemos logaritmos decimales en las dos partes de la igualdad:

$\log 2^x = \log 5$

Apliquemos la propiedad del logaritmo de una potencia:

$x \cdot \log 2 = \log 5$

Despejamos la incógnita x

$x = \dfrac{\log 5}{\log 2}$, con ayuda de la calculadora podemos aproximar el resultado: $x = \dfrac{\log 5}{\log 2} \approx 2'3219$

Ejercicios propuestos:

10. Sin utilizar calculadora efectúa las siguientes operaciones:

a) $\log_2 4 =$
b) $\log_9 729 =$
c) $\log 1000 =$
d) $\log_3 1 =$
e) $\log_{25} 5 =$
f) $\log_{16} 2 =$
g) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) =$
h) $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) =$
i) $\log_3\left(\frac{1}{3}\right) =$
j) $\log 0'001 =$
k) $\log_{1/3}\left(\frac{1}{243}\right) =$
l) $\log_3 \sqrt{27} =$
m) $\log_4 \sqrt{2} =$
n) $\log_5 \sqrt[4]{125} =$

11. Con la ayuda de la calculadora efectúa las operaciones del ejercicio anterior:

12. Representa las funciones siguientes:

a) $f(x) = \log x$
b) $g(x) = \ln x$
c) $h(x) = \log_{1'5} x$
d) $m(x) = \log_4 x$
e) $n(x) = \log_{0'5} x$
f) $p(x) = \log_{0'2} x$

13. Dada la función $f(x) = \log_2 x$
Sin utilizar tablas de valores dibuja las funciones:

$g(x) = 3 + \log_2 x$
$h(x) = -1 + \log_2 x$
$m(x) = \log_2 (x+2)$
$f(x) = \log_2 (x-4)$